

JOAMIR SOUZA

ÁREA DO CONHECIMENTO:
MATEMÁTICA E SUAS
TECNOLOGIAS

MATEMÁTICA

MANUAL
DO
PROFESSOR

CÓDIGO DA COLEÇÃO
0038P260101202814
PNLD EM 2026-2029 • CATEGORIA 1
Material de divulgação
Versão em processo de avaliação

1º
ANO

ENSINO MÉDIO

FTD

MATERIAL PARA DIVULGAÇÃO DA EDITORA FTD
REPRODUÇÃO PROIBIDA

MANUAL
DO
PROFESSOR

360°

MATEMÁTICA

ÁREA DO CONHECIMENTO:
MATEMÁTICA E SUAS
TECNOLOGIAS

JOAMIR SOUZA

Mestre em Matemática pela Universidade Estadual de Londrina (UEL-PR).

Especialista em Estatística pela Universidade Estadual de Londrina (UEL-PR).

Licenciado em Matemática pela Universidade Estadual de Londrina (UEL-PR).

Autor de livros didáticos para o Ensino Fundamental e o Ensino Médio.

1^o
ANO

ENSINO MÉDIO

FTD

1ª edição

São Paulo – 2024

Direção-geral Ricardo Tavares de Oliveira

Direção de conteúdo e negócios Cayube Galas

Direção editorial adjunta Luiz Tonolli

Gerência editorial Roberto Henrique Lopes da Silva e Nubia de Cassia de M. Andrade e Silva

Edição Cibeli de Oliveira Chibante Bueno (coord.)

Alessandra Maria Rodrigues da Silva, Bianca Cristina Fratelli, Emike Luzia Pereira Correia, Janaina Bezerra Pereira, Juliana Montagner, Marcell Megumi Hamazi Iwai, Rizia Sales Carneiro, Wagner Jose Razvickas Filho

Preparação e revisão Maria Clara Paes (coord.)

Ana Carolina Rollemberg, Cintia R. M. Salles, Denise Morgado, Desirée Araújo, Eloise Melero, Kátia Cardoso, Márcia Pessoa, Maura Loria, Veridiana Maenaka, Yara Affonso

Produção de conteúdo digital João Paulo Bortoluci

Gerência de produção e arte Ricardo Borges

Design Andréa Dellamagna (coord.)

Sergio Cândido (criação), Ana Carolina Orsolin, Everson de Paula

Projeto de capa Sergio Cândido

Imagem de capa ViDI Studio/Shutterstock.com

Arte e produção Isabel Cristina Corandin Marques (coord.)

André Gomes Vitale, Débora Jóia, Jorge Katsumata, Kleber B. Cavalcante, Rodrigo Bastos Marchini, Maria Paula Santo Siqueira (Assist.)

Diagramação VS Pages

Coordenação de imagens e textos Elaine Bueno Koga

Licenciamento de textos Erica Brambila

Iconografia Karine Ribeiro de Oliveira, Izabela Mariah Rocha Santos, Leticia dos Santos Domingos (trat. imagens)

Ilustrações Alan Carvalho, Artur Fujita, Bentinho, Cbook Produções, Dacosta Mapas, Daniel Bogni, Fabio Eugenio, Leo Teixeira, Lucas Farauj, OracicArt e Sergio Lima

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
(Câmara Brasileira do Livro, SP, Brasil)

Souza, Joamir Roberto de

360° matemática : 1ª série : ensino médio :
volume I / Joamir Roberto de Souza. -- 1. ed. --
São Paulo : FTD, 2024.

Componente curricular: Matemática. Área do
conhecimento: Matemática e suas tecnologias.
ISBN 978-85-96-04626-8 (livro do estudante)
ISBN 978-85-96-04627-5 (manual do professor)
ISBN 978-85-96-04632-9 (livro do estudante HTML 5)
ISBN 978-85-96-04633-6 (manual do professor HTML 5)

1. Matemática (Ensino médio) I. Título.

24-227680

CDD-510.7

Índices para catálogo sistemático:

1. Matemática : Ensino médio 510.7

Cibele Maria Dias - Bibliotecária - CRB-8/9427

Reprodução proibida: Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610
de 19 de fevereiro de 1998. Todos os direitos reservados à

EDITORA FTD.

Rua Rui Barbosa, 156 – Bela Vista – São Paulo – SP
CEP 01326-010 – Tel. 0800 772 2300

Caixa Postal 65149 – CEP da Caixa Postal 01390-970

www.ftd.com.br

central.relacionamento@ftd.com.br

Em respeito ao meio ambiente, as folhas deste
livro foram produzidas com fibras obtidas de
árvores de florestas plantadas, com origem
certificada.

Impresso no Parque Gráfico da Editora FTD
CNPJ 61.186.490/0016-33
Avenida Antonio Bardella, 300
Guarulhos-SP – CEP 07220-020
Tel. (11) 3545-8600 e Fax (11) 2412-5375

APRESENTAÇÃO

Caro estudante,

Quando você observa a sociedade em que está inserido, provavelmente identifica diversas situações desafiadoras que influenciam diretamente suas ações. Os avanços tecnológicos, por exemplo, estão modificando as maneiras de acesso às informações, as relações de trabalho, os hábitos de consumo, as interações sociais e outros aspectos que impactam diversas áreas da vida das pessoas.

Esta etapa do Ensino Médio será muito importante para sua formação cidadã e crítica, uma vez que você será incentivado a compreender conhecimentos historicamente construídos e a relacioná-los com a realidade. Dessa maneira, é esperado que o seu repertório cultural e intelectual seja ampliado, possibilitando o enfrentamento de desafios contemporâneos locais e globais.

Este livro foi elaborado para contribuir com o seu aprendizado em Matemática, favorecendo a exploração de diferentes situações que, sempre que possível, envolvem outras áreas do conhecimento, as quais auxiliam na continuidade do estudo em etapas posteriores, na sua relação com o mercado de trabalho e na sua vida social.

Por fim, desejo que você, estudante, explore este livro com dedicação e entusiasmo e desenvolva as propostas de estudo, interagindo com os professores e os colegas e compreendendo a importância do conhecimento matemático em sua formação como cidadão atuante na comunidade em que vive e na busca de uma sociedade mais justa e inclusiva.

O autor.

CONHEÇA SEU LIVRO

UNIDADE

1 CONJUNTOS

Banco de dados

Diversas atividades que realizamos no dia a dia envolvem a tecnologia de banco de dados, que consiste em um sistema de gerenciamento de informações que possibilita a organização e a busca de conteúdos em diferentes categorias de maneira rápida e assertiva.

Imagine, por exemplo, um aplicativo de loja de calçados com milhares de itens disponíveis para venda. Para comprar um calçado, um cliente pode selecionar opções nas categorias organizadas no banco de dados da loja, de acordo com suas preferências, restringindo informações como tamanho, preço, cor e marca.

Nome do estabelecimento e as marcas dos produtos que aparecem na figura são fictícios.



- Respostas nas Orientações para o professor.**
Após ler as informações, converse com os colegas e o professor sobre os itens a seguir.
1. Descreva uma situação do seu dia a dia em que você acredita que esteja envolvida a tecnologia de banco de dados.
 2. Você já comprou algum produto on-line utilizando opções de filtro? Descreva como foi essa experiência.
 3. Dois clientes da loja virtual representada na imagem selecionaram as mesmas opções de tamanho, cor e marca de calçado. Porém apenas um deles selecionou uma opção de preço. Para qual desses clientes serão apresentados menos itens para comprar? Explique.

ABERTURA DE UNIDADE

Nesta página, você é convidado a refletir sobre um tema relacionado ao conteúdo a ser estudado.

ATIVIDADES

É a oportunidade de retomar os conteúdos apresentados por meio de atividades e problemas propostos.

ATIVIDADES

13. Determine os zeros da função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, definida por:

- $f(x) = 5x^2 + 3$ (não tem zero real).
- $f(x) = 8x - 2x^2 + 4$
- $f(x) = x^2 - 10x + 25$
- $f(x) = -2x^2 + 3x - 5$ (não tem zero real).
- $f(x) = 3x^2 + 8x + 4 - 2x - 3$
- $f(x) = -2x^2 + 2x + 24 - 3x + 4$

14. Retorne a atividade 13 e confira as respostas usando uma estratégia diferente da que você usou. Podem ser empregadas técnicas de fatoração ou fórmula resolvente. **Resposta pessoal.**

15. Seja $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função quadrática, definida por $g(x) = (2m - 3)x^2 + 2x + 2$. Calcule para quais valores reais de m a função g :

- tem dois zeros reais distintos; $m < \frac{7}{4}$
- tem dois zeros reais e iguais; $m = \frac{7}{4}$
- não tem zero real. $m > \frac{7}{4}$

16. O gestor de uma microempresa do ramo moveleiro, que produz e vende móveis planejados, elaborou um modelo matemático para descrever o lucro $y = s(x)$, em reais, obtido com a venda de cada unidade de cadeira produzida pela empresa, de acordo com a quantidade x de unidades vendidas na semana. Com base em dados registrados e utilizando um programa de computador, ele concluiu que $s(x) = -0,01x^2 + 1,2x - 11$.

- Calcule $s(20)$. O que esse resultado representa?
- Após vender em certa semana 80 cadeiras, quantos reais, ao todo, essa microempresa terá de lucro com esse produto? R\$ 1480,00
- Para que o lucro por unidade seja nulo, quantas cadeiras devem ser vendidas em uma semana? 10 cadeiras ou 110 cadeiras

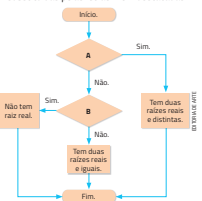
17. Em uma comunidade foi construída uma cisterna para armazenamento de água da chuva. Em uma visita técnica, foi constatado um vazamento por causa de uma rachadura na estrutura dessa cisterna. Com isso, identificou-se

que a cada hora o volume v de água na cisterna, em metro cúbico, diminuía de acordo com a função v dada por $v(t) = -\frac{1}{12}t^2 + 48$, após t horas do início do vazamento e considerando-a inicialmente cheia.

- Qual é a capacidade de armazenamento de água dessa cisterna? 48 metros cúbicos
- Qual é o volume de água da cisterna 6 h após o início do vazamento? 48 metros cúbicos

18. Considerando que a cisterna precisa estar completamente vazia para que seja feito o reparo da rachadura, quantas horas após o início do vazamento poderá ser realizado esse reparo? 34 h

18. O fluxograma a seguir representa um algoritmo que descreve características das raízes de uma equação do 2º grau de acordo com o valor do discriminante Δ . Nele, duas perguntas foram substituídas pelas letras A e B destacadas.



Associe cada uma das letras A e B destacadas no fluxograma a uma das questões indicadas a seguir. $\Delta > 0$; $\Delta < 0$

$\Delta = 0$ $\Delta < 0$ $\Delta > 0$

19. Junte-se a um colega e, utilizando a fórmula resolvente, mostrem que, sendo x_1 e x_2 zeros da função quadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$, temos que $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$ e $x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$. **Resposta nas Orientações para o professor.**

16. $s(20) = 9$. Representa que, se forem vendidas 20 cadeiras na semana, a microempresa terá um lucro de R\$ 9,00 por cadeira.

ATIVIDADES RESOLVIDAS

R1. A densidade d de um corpo é a razão entre sua massa m e seu volume v . Por exemplo, a prata tem densidade de $10,5 \text{ g/cm}^3$, ou seja, cada 1 cm^3 de prata tem $10,5 \text{ g}$. Observe os objetos representados a seguir e algumas de suas medidas. (As imagens apresentadas estão fora de proporção.)



► Vaso de vidro.
Massa: 1560 g.
Volume: 600 cm^3 .



► Objeto decorativo em alumínio.
Massa: 405 g.
Densidade do alumínio: $2,7 \text{ g/cm}^3$.



► Banco de ferro.
Volume: 1140 cm^3 .
Densidade do ferro: $7,9 \text{ g/cm}^3$.

Com base nessas informações, determine:

- a densidade do vidro, em grama por centímetro cúbico;
- o volume do objeto decorativo em alumínio, em centímetro cúbico;
- a massa do banco de ferro, em grama.

Resolução

Para resolver esses itens, podemos utilizar a expressão $d = \frac{m}{v}$, sendo d a densidade, m a massa e v o volume.

$$a) d = \frac{1560}{600} = 2,6; \text{ ou seja, } 2,6 \text{ g/cm}^3$$

$$b) 2,7 = \frac{405}{v} \Rightarrow v = \frac{405}{2,7} = 150; \text{ ou seja, } 150 \text{ cm}^3$$

$$c) 7,9 = \frac{m}{1140} \Rightarrow m = 7,9 \cdot 1140 = 9006; \text{ ou seja, } 9006 \text{ g}$$

R2. (Enem/MEC) Numa atividade de treinamento realizada no Exército de um determinado país, três equipes – Alpha, Beta e Gamma – foram designadas a percorrer diferentes caminhos, todos com os mesmos pontos de partida e de chegada.

- A equipe Alpha realizou seu percurso em 90 minutos com uma velocidade média de $6,0 \text{ km/h}$.
- A equipe Beta também percorreu sua trajetória em 90 minutos, mas sua velocidade média foi de $5,0 \text{ km/h}$.
- Com uma velocidade média de $6,5 \text{ km/h}$, a equipe Gamma concluiu seu caminho em 60 minutos.

Com base nesses dados, foram comparadas as distâncias d_{Alpha} , d_{Beta} e d_{Gamma} percorridas pelas três equipes.

A ordem das distâncias percorridas pelas equipes Alpha, Beta e Gamma é

- $d_{\text{Alpha}} < d_{\text{Beta}} < d_{\text{Gamma}}$
- $d_{\text{Beta}} < d_{\text{Alpha}} < d_{\text{Gamma}}$
- $d_{\text{Alpha}} < d_{\text{Gamma}} < d_{\text{Beta}}$
- $d_{\text{Beta}} < d_{\text{Gamma}} < d_{\text{Alpha}}$

Resposta correta: a
A velocidade média v é dada pela razão entre a distância d e o tempo t de percurso.

58

ATIVIDADES RESOLVIDAS

Para ampliar seu repertório de estratégias, acompanhe a resolução detalhada de atividades e de problemas relacionados aos conteúdos estudados.

INTEGRANDO COM... CIÊNCIAS DA NATUREZA E SUAS TECNOLOGIAS

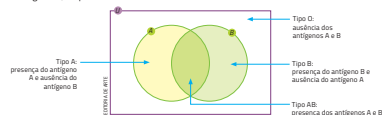
Transfusão sanguínea

Você sabe o que é transfusão sanguínea? Esse procedimento médico consiste em transferir o sangue, ou parte de seus componentes, de uma pessoa (doador) para outra (receptor). É importante ressaltar que, atualmente no Brasil, milhares de pessoas precisam desse procedimento e, para isso, contam com a doação voluntária de sangue, que é a única maneira de obtê-lo, pois somente o organismo do ser humano é capaz de produzi-lo.

Em uma transfusão, um aspecto que deve ser considerado é a compatibilidade entre o sangue do receptor e o sangue do doador. Para isso, são analisados os tipos de antígeno presentes nos glóbulos vermelhos de cada um dos envolvidos. Esse teste determina em qual tipo sanguíneo – A, B, AB ou O –, pertencente ao sistema ABO, se enquadram o receptor e o doador.

Observe no diagrama a seguir a representação do sistema ABO em relação à presença de **antígenos** no sangue. Nesse esquema, o conjunto A e o conjunto B indicam os tipos sanguíneos que têm presença do antígeno A e do antígeno B, respectivamente.

Antígeno é uma substância que, ao ser introduzida no receptor, provoca uma resposta imune.



Por exemplo, caso um indivíduo com sangue tipo A receba acidentalmente sangue tipo B, serão produzidos anticorpos contra o sangue B, pois seu organismo não o reconhece. Isso pode obstruir vasos e artérias.

Simultaneamente à análise do sistema ABO, é necessário avaliar o fator Rh. Quando o sangue apresenta o antígeno Rh, dizemos que o sangue do indivíduo é Rh positivo (Rh+). Quando há ausência desse antígeno, dizemos que o sangue do indivíduo é Rh negativo (Rh-). Por exemplo, no caso de uma transfusão, haveria incompatibilidade entre um receptor de sangue Rh- e um doador de sangue Rh+, porque o organismo do receptor, que não tem o antígeno Rh, produziria anticorpos contra o antígeno Rh do doador.

Fonte: dados: POTTER, Patricia A. et al. **Fundamentos de enfermagem**. Tradução: Maria Roney. 10ª ed. São Paulo: Elsevier, 2010, p. 531.

	Doa para	Recebe de
A-	A, A+, AB-, a AB+	A- e O-

24

presentes nos glóbulos vermelhos do tipo sanguíneo – A, B, AB ou O –.

Antígeno é uma substância que, ao ser introduzida no receptor, provoca uma resposta imune.

VOCABULÁRIO

Este box apresenta o significado de termos destacados no texto.

INTEGRANDO COM...

Esta seção propõe discussões de assuntos de maior integração com outras áreas do conhecimento.

PENSANDO NO ASSUNTO

1. Responda às questões a seguir. **Respostas pessoais.**

a) Você sabe qual é seu tipo sanguíneo, de acordo com o sistema ABO? E o fator Rh? b) Em seu entendimento, qual é a importância de conhecermos nosso tipo sanguíneo e o das pessoas de nosso convívio? Pense no assunto e, se necessário, realize uma pesquisa.

c) No município ou na região em que você mora, é comum a realização de campanhas incentivando a doação de sangue? De que modo você acredita que essas campanhas impactam a sociedade? Qual é a importância delas?

2. Observe o diagrama que representa o sistema ABO, apresentado na página 24. Em relação à presença ou à ausência dos antígenos A e B nas hemácias, interprete os conjuntos a seguir.

$A = \{ \text{presença do antígeno A} \}$
 $B = \{ \text{presença do antígeno B} \}$
 $AB = \{ \text{presença dos antígenos A e B} \}$
 $O = \{ \text{ausência dos antígenos A e B} \}$

3. Justifique as afirmativas a seguir.

a) Em uma transfusão sanguínea, um receptor AB- é incompatível com um doador B+. b) Em uma transfusão sanguínea, um doador A- é compatível com um receptor A+.

4. Em relação ao sistema ABO e ao fator Rh, costuma ser chamado de **doador universal** o indivíduo que pode doar sangue àqueles de qualquer tipo sanguíneo. Já o **receptor universal** é o indivíduo que pode receber sangue de qualquer tipo sanguíneo.

Em grupos, investiguem quais tipos sanguíneos correspondem aos doadores e receptores universais. Para isso, resolvam os itens a seguir.

a) Observem a página 24 e respondam: para quem o indivíduo A- é doador? E de quem ele é receptor? b) Identifiquem todos os possíveis tipos sanguíneos e, para cada um deles, construam um quadro indicando de quem ele recebe e para quem doa.

5. Responda às questões a seguir. **Respostas pessoais.** a) Observe o diagrama que representa o sistema ABO, apresentado na página 24. Em relação à presença ou à ausência dos antígenos A e B nas hemácias, interprete os conjuntos a seguir.

b) Em uma transfusão sanguínea, um receptor AB- é incompatível com um doador B+. c) Em uma transfusão sanguínea, um doador A- é compatível com um receptor A+.

6. Em relação ao sistema ABO e ao fator Rh, costuma ser chamado de **doador universal** o indivíduo que pode doar sangue àqueles de qualquer tipo sanguíneo. Já o **receptor universal** é o indivíduo que pode receber sangue de qualquer tipo sanguíneo.

Em grupos, investiguem quais tipos sanguíneos correspondem aos doadores e receptores universais. Para isso, resolvam os itens a seguir.

a) Observem a página 24 e respondam: para quem o indivíduo A- é doador? E de quem ele é receptor? b) Identifiquem todos os possíveis tipos sanguíneos e, para cada um deles, construam um quadro indicando de quem ele recebe e para quem doa.

7. Responda às questões a seguir. **Respostas pessoais.** a) Observe o diagrama que representa o sistema ABO, apresentado na página 24. Em relação à presença ou à ausência dos antígenos A e B nas hemácias, interprete os conjuntos a seguir.

b) Em uma transfusão sanguínea, um receptor AB- é incompatível com um doador B+. c) Em uma transfusão sanguínea, um doador A- é compatível com um receptor A+.

8. Em relação ao sistema ABO e ao fator Rh, costuma ser chamado de **doador universal** o indivíduo que pode doar sangue àqueles de qualquer tipo sanguíneo. Já o **receptor universal** é o indivíduo que pode receber sangue de qualquer tipo sanguíneo.

Em grupos, investiguem quais tipos sanguíneos correspondem aos doadores e receptores universais. Para isso, resolvam os itens a seguir.

a) Observem a página 24 e respondam: para quem o indivíduo A- é doador? E de quem ele é receptor? b) Identifiquem todos os possíveis tipos sanguíneos e, para cada um deles, construam um quadro indicando de quem ele recebe e para quem doa.

9. Responda às questões a seguir. **Respostas pessoais.** a) Observe o diagrama que representa o sistema ABO, apresentado na página 24. Em relação à presença ou à ausência dos antígenos A e B nas hemácias, interprete os conjuntos a seguir.

b) Em uma transfusão sanguínea, um receptor AB- é incompatível com um doador B+. c) Em uma transfusão sanguínea, um doador A- é compatível com um receptor A+.

10. Em relação ao sistema ABO e ao fator Rh, costuma ser chamado de **doador universal** o indivíduo que pode doar sangue àqueles de qualquer tipo sanguíneo. Já o **receptor universal** é o indivíduo que pode receber sangue de qualquer tipo sanguíneo.

Em grupos, investiguem quais tipos sanguíneos correspondem aos doadores e receptores universais. Para isso, resolvam os itens a seguir.

a) Observem a página 24 e respondam: para quem o indivíduo A- é doador? E de quem ele é receptor? b) Identifiquem todos os possíveis tipos sanguíneos e, para cada um deles, construam um quadro indicando de quem ele recebe e para quem doa.

11. Responda às questões a seguir. **Respostas pessoais.** a) Observe o diagrama que representa o sistema ABO, apresentado na página 24. Em relação à presença ou à ausência dos antígenos A e B nas hemácias, interprete os conjuntos a seguir.

b) Em uma transfusão sanguínea, um receptor AB- é incompatível com um doador B+. c) Em uma transfusão sanguínea, um doador A- é compatível com um receptor A+.

12. Em relação ao sistema ABO e ao fator Rh, costuma ser chamado de **doador universal** o indivíduo que pode doar sangue àqueles de qualquer tipo sanguíneo. Já o **receptor universal** é o indivíduo que pode receber sangue de qualquer tipo sanguíneo.

Em grupos, investiguem quais tipos sanguíneos correspondem aos doadores e receptores universais. Para isso, resolvam os itens a seguir.

a) Observem a página 24 e respondam: para quem o indivíduo A- é doador? E de quem ele é receptor? b) Identifiquem todos os possíveis tipos sanguíneos e, para cada um deles, construam um quadro indicando de quem ele recebe e para quem doa.

13. Responda às questões a seguir. **Respostas pessoais.** a) Observe o diagrama que representa o sistema ABO, apresentado na página 24. Em relação à presença ou à ausência dos antígenos A e B nas hemácias, interprete os conjuntos a seguir.

b) Em uma transfusão sanguínea, um receptor AB- é incompatível com um doador B+. c) Em uma transfusão sanguínea, um doador A- é compatível com um receptor A+.

14. Em relação ao sistema ABO e ao fator Rh, costuma ser chamado de **doador universal** o indivíduo que pode doar sangue àqueles de qualquer tipo sanguíneo. Já o **receptor universal** é o indivíduo que pode receber sangue de qualquer tipo sanguíneo.

Em grupos, investiguem quais tipos sanguíneos correspondem aos doadores e receptores universais. Para isso, resolvam os itens a seguir.

a) Observem a página 24 e respondam: para quem o indivíduo A- é doador? E de quem ele é receptor? b) Identifiquem todos os possíveis tipos sanguíneos e, para cada um deles, construam um quadro indicando de quem ele recebe e para quem doa.

15. Responda às questões a seguir. **Respostas pessoais.** a) Observe o diagrama que representa o sistema ABO, apresentado na página 24. Em relação à presença ou à ausência dos antígenos A e B nas hemácias, interprete os conjuntos a seguir.

b) Em uma transfusão sanguínea, um receptor AB- é incompatível com um doador B+. c) Em uma transfusão sanguínea, um doador A- é compatível com um receptor A+.

16. Em relação ao sistema ABO e ao fator Rh, costuma ser chamado de **doador universal** o indivíduo que pode doar sangue àqueles de qualquer tipo sanguíneo. Já o **receptor universal** é o indivíduo que pode receber sangue de qualquer tipo sanguíneo.

Em grupos, investiguem quais tipos sanguíneos correspondem aos doadores e receptores universais. Para isso, resolvam os itens a seguir.

a) Observem a página 24 e respondam: para quem o indivíduo A- é doador? E de quem ele é receptor? b) Identifiquem todos os possíveis tipos sanguíneos e, para cada um deles, construam um quadro indicando de quem ele recebe e para quem doa.

17. Responda às questões a seguir. **Respostas pessoais.** a) Observe o diagrama que representa o sistema ABO, apresentado na página 24. Em relação à presença ou à ausência dos antígenos A e B nas hemácias, interprete os conjuntos a seguir.

b) Em uma transfusão sanguínea, um receptor AB- é incompatível com um doador B+. c) Em uma transfusão sanguínea, um doador A- é compatível com um receptor A+.

18. Em relação ao sistema ABO e ao fator Rh, costuma ser chamado de **doador universal** o indivíduo que pode doar sangue àqueles de qualquer tipo sanguíneo. Já o **receptor universal** é o indivíduo que pode receber sangue de qualquer tipo sanguíneo.

Em grupos, investiguem quais tipos sanguíneos correspondem aos doadores e receptores universais. Para isso, resolvam os itens a seguir.

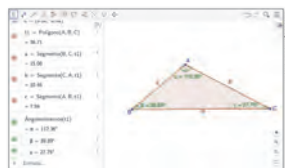
a) Observem a página 24 e respondam: para quem o indivíduo A- é doador? E de quem ele é receptor? b) Identifiquem todos os possíveis tipos sanguíneos e, para cada um deles, construam um quadro indicando de quem ele recebe e para quem doa.

VOCÊ CONECTADO

Comprovando a validade da lei dos senos

Observe como podemos comprovar geometricamente a validade da lei dos senos em um triângulo qualquer, utilizando o software de geometria dinâmica **GeoGebra**. Disponível para acesso on-line e download em <https://www.geogebra.org/download> (acesso em: 1 jul. 2024).

a) Com a opção **[Polígono]**, construímos um triângulo ABC qualquer. Em seguida, com a opção **[Ângulo]**, clicamos sobre o triângulo construído para obter a medida de seus ângulos internos.



b) A razão (r) entre a medida do lado a e o seno de α , ângulo oposto a esse lado no triângulo ABC, corresponde a $r = \frac{a}{\sin \alpha}$. Para determinar o valor de r, clicamos no campo **Entrada**, digitamos $r = a / \sin \alpha$ e pressionamos a tecla **Enter**. O valor de r pode ser observado na **janela de Álgebra**.



DICA
Para inserir o símbolo α no campo **Entrada**, podemos clicar em **[Símbolo]** (Teclado virtual) e escolher a opção α localizada na parte direita desse campo.

242

c) De maneira análoga à etapa anterior, calculamos as razões $s = \frac{b}{\sin \beta}$ e $t = \frac{c}{\sin \gamma}$ digitando $s = b / \sin \beta$ e $t = c / \sin \gamma$, respectivamente, no campo **Entrada**.



1. Sim, pois as razões entre a medida de cada lado e do seno do ângulo interno oposto a esse lado são, respectivamente, iguais.

MÃOS À OBRA Não construa no GeoGebra.

2. a) Resposta esperada: Os valores dessas razões são iguais.

2. Utilizamos as opções **[Ângulo]** e **[Perímetro]** para obter as medidas de um dos ângulos internos do triângulo e dos lados que formam o ângulo escolhido.

3) Com base na lei dos cossenos, digitamos no campo **Entrada** uma expressão para determinar a medida do lado oposto ao ângulo cuja medida foi obtida.

4) Comparamos o valor obtido pela expressão digitada com a medida do lado apresentada na **janela de Álgebra** do programa.

Junte-se a um colega, e comprovem geometricamente a validade da lei dos cossenos, conforme as etapas indicadas. **Construção dos estudantes.**

5. Nesta Unidade, foram apresentadas as seguintes relações:

• o seno de um ângulo obtuso é igual ao seno de seu suplementar;

• o cosseno de um ângulo obtuso é igual ao oposto do cosseno de seu suplementar.

Junte-se a um colega, e, utilizando o **GeoGebra**, pensem em uma estratégia para verificar cada uma dessas relações e realizem-na. Depois, registrem as etapas que vocês realizaram. **Construção dos estudantes.**

6. a) Resposta esperada: Os valores de r, s e t foram modificados, mas as razões se mantiveram iguais. Sim.

7. a) Resposta esperada: Os valores de r, s e t foram modificados, mas as razões se mantiveram iguais. Sim.

8. a) Resposta esperada: Os valores de r, s e t foram modificados, mas as razões se mantiveram iguais. Sim.

9. a) Resposta esperada: Os valores de r, s e t foram modificados, mas as razões se mantiveram iguais. Sim.

10. a) Resposta esperada: Os valores de r, s e t foram modificados, mas as razões se mantiveram iguais. Sim.

11. a) Resposta esperada: Os valores de r, s e t foram modificados, mas as razões se mantiveram iguais. Sim.

12. a) Resposta esperada: Os valores de r, s e t foram modificados, mas as razões se mantiveram iguais. Sim.

13. a) Resposta esperada: Os valores de r, s e t foram modificados, mas as razões se mantiveram iguais. Sim.

14. a) Resposta esperada: Os valores de r, s e t foram modificados, mas as razões se mantiveram iguais. Sim.

15. a) Resposta esperada: Os valores de r, s e t foram modificados, mas as razões se mantiveram iguais. Sim.

16. a) Resposta esperada: Os valores de r, s e t foram modificados, mas as razões se mantiveram iguais. Sim.

17. a) Resposta esperada: Os valores de r, s e t foram modificados, mas as razões se mantiveram iguais. Sim.

18. a) Resposta esperada: Os valores de r, s e t foram modificados, mas as razões se mantiveram iguais. Sim.

19. a) Resposta esperada: Os valores de r, s e t foram modificados, mas as razões se mantiveram iguais. Sim.

20. a) Resposta esperada: Os valores de r, s e t foram modificados, mas as razões se mantiveram iguais. Sim.

21. a) Resposta esperada: Os valores de r, s e t foram modificados, mas as razões se mantiveram iguais. Sim.

22. a) Resposta esperada: Os valores de r, s e t foram modificados, mas as razões se mantiveram iguais. Sim.

23. a) Resposta esperada: Os valores de r, s e t foram modificados, mas as razões se mantiveram iguais. Sim.

24. a) Resposta esperada: Os valores de r, s e t foram modificados, mas as razões se mantiveram iguais. Sim.

25. a) Resposta esperada: Os valores de r, s e t foram modificados, mas as razões se mantiveram iguais. Sim.

26. a) Resposta esperada: Os valores de r, s e t foram modificados, mas as razões se mantiveram iguais. Sim.

27. a) Resposta esperada: Os valores de r, s e t foram modificados, mas as razões se mantiveram iguais. Sim.

28. a) Resposta esperada: Os valores de r, s e t foram modificados, mas as razões se mantiveram iguais. Sim.

29. a) Resposta esperada: Os valores de r, s e t foram modificados, mas as razões se mantiveram iguais. Sim.

30. a) Resposta esperada: Os valores de r, s e t foram modificados, mas as razões se mantiveram iguais. Sim.

31. a) Resposta esperada: Os valores de r, s e t foram modificados, mas as razões se mantiveram iguais. Sim.

32. a) Resposta esperada: Os valores de r, s e t foram modificados, mas as razões se mantiveram iguais. Sim.

33. a) Resposta esperada: Os valores de r, s e t foram modificados, mas as razões se mantiveram iguais. Sim.

34. a) Resposta esperada: Os valores de r, s e t foram modificados, mas as razões se mantiveram iguais. Sim.

35. a) Resposta esperada: Os valores de r, s e t foram modificados, mas as razões se mantiveram iguais. Sim.

36. a) Resposta esperada: Os valores de r, s e t foram modificados, mas as razões se mantiveram iguais. Sim.

37. a) Resposta esperada: Os valores de r, s e t foram modificados, mas as razões se mantiveram iguais. Sim.

38. a) Resposta esperada: Os valores de r, s e t foram modificados, mas as razões se mantiveram iguais. Sim.

39. a) Resposta esperada: Os valores de r, s e t foram modificados, mas as razões se mantiveram iguais. Sim.

40. a) Resposta esperada: Os valores de r, s e t foram modificados, mas as razões se mantiveram iguais. Sim.

41. a) Resposta esperada: Os valores de r, s e t foram modificados, mas as razões se mantiveram iguais. Sim.

42. a) Resposta esperada: Os valores de r, s e t foram modificados, mas as razões se mantiveram iguais. Sim.

43. a) Resposta esperada: Os valores de r, s e t foram modificados, mas as razões se mantiveram iguais. Sim.

44. a) Resposta esperada: Os valores de r, s e t foram modificados, mas as razões se mantiveram iguais. Sim.

45. a) Resposta esperada: Os valores de r, s e t foram modificados, mas as razões se mantiveram iguais. Sim.

46. a) Resposta esperada: Os valores de r, s e t foram modificados, mas as razões se mantiveram iguais. Sim.

47. a) Resposta esperada: Os valores de r, s e t foram modificados, mas as razões se mantiveram iguais. Sim.

48. a) Resposta esperada: Os valores de r, s e t foram modificados, mas as razões se mantiveram iguais. Sim.

49. a) Resposta esperada: Os valores de r, s e t foram modificados, mas as razões se mantiveram iguais. Sim.

50. a) Resposta esperada: Os valores de r, s e t foram modificados, mas as razões se mantiveram iguais. Sim.

51. a) Resposta esperada: Os valores de r, s e t foram modificados, mas as razões se mantiveram iguais. Sim.

52. a) Resposta esperada: Os valores de r, s e t foram modificados, mas as razões se mantiveram iguais. Sim.

53. a) Resposta esperada: Os valores de r, s e t foram modificados, mas as razões se mantiveram iguais. Sim.

54. a) Resposta esperada: Os valores de r, s e t foram modificados, mas as razões se mantiveram iguais. Sim.

55. a) Resposta esperada: Os valores de r, s e t foram modificados, mas as razões se mantiveram iguais. Sim.

56. a) Resposta esperada: Os valores de r, s e t foram modificados, mas as razões se mantiveram iguais. Sim.

57. a) Resposta esperada: Os valores de r, s e t foram modificados, mas as razões se mantiveram iguais. Sim.

58. a) Resposta esperada: Os valores de r, s e t foram modificados, mas as razões se mantiveram iguais. Sim.

59. a) Resposta esperada: Os valores de r, s e t foram modificados, mas as razões se mantiveram iguais. Sim.

60. a) Resposta esperada: Os valores de r, s e t foram modificados, mas as razões se mantiveram iguais. Sim.

61. a) Resposta esperada: Os valores de r, s e t foram modificados, mas as razões se mantiveram iguais. Sim.

62. a) Resposta esperada: Os valores de r, s e t foram modificados, mas as razões se mantiveram iguais. Sim.

63. a) Resposta esperada: Os valores de r, s e t foram modificados, mas as razões se mantiveram iguais. Sim.

64. a) Resposta esperada: Os valores de r, s e t foram modificados, mas as razões se mantiveram iguais. Sim.

65. a) Resposta esperada: Os valores de r, s e t foram modificados, mas as razões se mantiveram iguais. Sim.

66. a) Resposta esperada: Os valores de r, s e t foram modificados, mas as razões se mantiveram iguais. Sim.

67. a) Resposta esperada: Os valores de r, s e t foram modificados, mas as razões se mantiveram iguais. Sim.

68. a) Resposta esperada: Os valores de r, s e t foram modificados, mas as razões se mantiveram iguais. Sim.

69. a) Resposta esperada: Os valores de r, s e t foram modificados, mas as razões se mantiveram iguais. Sim.

70. a) Resposta esperada: Os valores de r, s e t foram modificados, mas as razões se mantiveram iguais. Sim.

71. a) Resposta esperada: Os valores de r, s e t foram modificados, mas as razões se mantiveram iguais. Sim.

72. a) Resposta esperada: Os valores de r, s e t foram modificados, mas as razões se mantiveram iguais. Sim.

73. a) Resposta esperada: Os valores de r, s e t foram modificados, mas as razões se mantiveram iguais. Sim.

74. a) Resposta esperada: Os valores de r, s e t foram modificados, mas as razões se mantiveram iguais. Sim.

75. a) Resposta esperada: Os valores de r, s e t foram modificados, mas as razões se mantiveram iguais. Sim.

76. a) Resposta esperada: Os valores de r, s e t foram modificados, mas as razões se mantiveram iguais. Sim.

77. a) Resposta esperada: Os valores de r, s e t foram modificados, mas as razões se mantiveram iguais. Sim.

78. a) Resposta esperada: Os valores de r, s e t foram modificados, mas as razões se mantiveram iguais. Sim.

79. a) Resposta esperada: Os valores de r, s e t foram modificados, mas as razões se mantiveram iguais. Sim.

80. a) Resposta esperada: Os valores de r, s e t foram modificados, mas as razões se mantiveram iguais. Sim.

81. a) Resposta esperada: Os valores de r, s e t foram modificados, mas as razões se mantiveram iguais. Sim.

82. a) Resposta esperada: Os valores de r, s e t foram modificados, mas as razões se mantiveram iguais. Sim.

83. a) Resposta esperada: Os valores de r, s e t foram modificados, mas as razões se mantiveram iguais. Sim.

84. a) Resposta esperada: Os valores de r, s e t foram modificados, mas as razões se mantiveram iguais. Sim.

85. a) Resposta esperada: Os valores de r, s e t foram modificados, mas as razões se mantiveram iguais. Sim.

86. a) Resposta esperada: Os valores de r, s e t foram modificados, mas as razões se mantiveram iguais. Sim.

87. a) Resposta esperada: Os valores de r, s e t foram modificados, mas as razões se mantiveram iguais. Sim.

88. a) Resposta esperada: Os valores de r, s e t foram modificados, mas as razões se mantiveram

O QUE ESTUDEI

Não escreva no livro.

- Leia com atenção cada frase a seguir e faça uma reflexão sobre seu comportamento durante o estudo desta Unidade. Depois, responda se você **concorda**, **concorda parcialmente** ou **não concorda** com cada uma das afirmações. *Resposta pessoal.*

a) Ouvi com atenção as explicações do professor.

d) Participei das discussões propostas à turma.

e) Respeitei os colegas nas atividades em grupo.

b) Quando precisei, pedi ajuda ao professor.

f) Fiz as atividades propostas na sala de aula.

h) Auxiliei os colegas quando eles tiveram dúvidas.

c) Auxiliei o professor quando ele me pediu.

i) Fiz as atividades escolares propostas para casa.

j) Levei para a sala de aula os materiais necessários.
- Nas fichas a seguir, estão indicados os principais conteúdos que estudamos nesta Unidade. Reflita sobre cada um deles e verifique se você precisa retomar algum para melhor compreendê-lo. *Resposta pessoal.*

Gráfico de uma função

Estudo do sinal de uma função

Função

Unidades de medida

Grandezas

Zero da função

Sistema Internacional de Unidades (SI)

Variável dependente e variável independente

Domínio, contradomínio e conjunto imagem de uma função

Função constante, função crescente e função decrescente
- Agora, para retomar de maneira colaborativa o estudo de um conteúdo desta Unidade, junte-se a dois colegas, e sigam as etapas. *Resposta pessoal.*

1 SELECIONAR

Consultem os conteúdos indicados na atividade anterior e escolham um deles. Deem preferência a um conteúdo em que foi constatada necessidade de retomada de estudo.

2 REVISAR

Juntos, façam uma revisão do estudo desse conteúdo. É importante a participação de todos os integrantes nessa revisão.

3 PREPARAR

Elaborem uma apresentação sobre esse conteúdo, o que pode ser realizado por meio de slides, cartazes, vídeos, entre outros recursos. Na apresentação, podem ser incluídos exemplos e atividades resolvidas. Também podem ser propostas atividades para que os demais colegas da turma resolvam.

4 APRESENTAR


Na apresentação, é importante usar uma linguagem adequada, simples e objetiva. É necessário oportunizar um momento para que cada integrante do grupo possa contribuir com as explicações. Ao final, vocês podem disponibilizar os materiais produzidos aos demais colegas da turma.

O QUE ESTUDEI

4. Na abertura desta Unidade, foram apresentadas algumas informações sobre o Sistema Internacional de Unidades (SI), criado para padronizar as principais unidades de medidas utilizadas no mundo. No Brasil, o Instituto de Pesos e Medidas (Ipem) é um órgão delegado do Inmetro responsável por proteger o brasileiro nas relações de consumo, executando atividades de metrologia e fiscalizando, por exemplo, se os comércios estão de acordo com as normas estabelecidas pelo Inmetro.


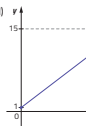

Em outubro de 2006, o Inmetro determinou que a venda de pão francês (ou pão de sal) fosse feita apenas por sua massa, e não mais por unidade, como era comercializado em alguns estabelecimentos.

Fonte dos dados: BRASIL. Ministério do Desenvolvimento, Indústria e Comércio Exterior. Instituto Nacional de Metrologia, Qualidade e Tecnologia. **Portaria nº 146, de 20 de junho de 2006.** Brasília, DF: Serviço Público Federal, 2006. Disponível em: <http://www.inmetro.gov.br/tac/pdf/1679/CD00032.pdf>. Acesso em: 11 set. 2024.



► Pães sendo pesados em uma padaria de São José dos Campos (SP). O pão francês recebe nomes diferentes em distintas partes do país, como "pão d'água", "mêdia", "cacetinho" e "filão".

- Você concorda com a determinação do Inmetro em relação à venda do pão francês pela massa? Justifique. *Resposta pessoal.*
- Supondo que, antes da determinação do Inmetro, cada pão francês era vendido por R\$ 0,35 em certa padaria, escreva uma função que relacione o preço a pagar c , em reais, e a quantidade de pão p .
- Se um consumidor pagar R\$ 10,80 por uma quantidade de pães em certa padaria, cujo quilograma é vendido a R\$ 15,00, quantos gramas de pão esse consumidor comprou? *720 g*
- Considerando que o quilograma do pão francês custe R\$ 15,00, identifique qual dos gráficos representados a seguir corresponde a uma função f que relaciona o preço a pagar, em reais, por x quilograma de pão francês. *gráfico III*

DICA

Nos gráficos, as escalas dos eixos estão diferentes.

- Considerando a função f cujo gráfico você identificou no item d, determine:
 - a lei de formação da função: $f(x) = 15x$
 - o domínio, o contradomínio e o conjunto imagem da função: $D(f) = \mathbb{R}_+$; $CD(f) = \mathbb{R}_+$; $Im(f) = \mathbb{R}_+$
 - se a função é crescente, decrescente ou constante: *crescente*
 - o zero da função: $x = 0$
 - para quais valores de $x \in D(f)$ a função é negativa: *para nenhum valor do domínio da função*
 - para quais valores de $x \in D(f)$ a função é positiva: *para todo $x > 0$*
- Com três colegas, pesquisem, em estabelecimentos da região onde moram, alguns alimentos tradicionais que são vendidos por massa e comparem os preços desses produtos. Se possível, registrem também se há algum produto alimentício típico da região que seja vendido por unidade. *Pesquisa dos estudantes.*

O QUE ESTUDEI

É um momento para você refletir sobre o seu desenvolvimento ao estudar a Unidade tanto com relação a suas atitudes como aos conteúdos aprendidos.

BOXES

DICA

Apresentação de alguma dica ou de um lembrete importante para a resolução de uma atividade ou para a compreensão de algum conceito em discussão.

PARA AMPLIAR

Boxe em que são apresentadas sugestões de *sites*, vídeos, *softwares* ou textos para complementar os assuntos discutidos no livro.

PARA PENSAR

Neste boxe, você tem oportunidade de resolver questões que contribuem para a reflexão e a argumentação a respeito do conteúdo em estudo e, assim, participar ativamente da aula.

MATEMÁTICA NA HISTÓRIA

Neste boxe, são apresentadas informações sobre a história da Matemática com tópicos relacionados ao conteúdo em estudo.

NO MUNDO DO TRABALHO

Neste boxe, são exploradas as profissões e suas características, destacando as habilidades comportamentais essenciais para os profissionais atuais. Além disso, você terá acesso a informações sobre o mercado de trabalho.

PRATICANDO: ENEM E VESTIBULARES

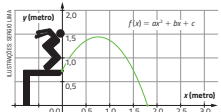
Não escreva no livro.

1. (Enem/MEC) Um túnel deve ser lacrado com uma tampa de concreto. A seção transversal do túnel e a tampa de concreto têm contornos de um arco de parábola e mesmas dimensões. Para determinar o custo da obra, um engenheiro deve calcular a área sob o arco parabólico em questão. Usando o eixo horizontal no nível do chão e o eixo de simetria da parábola como eixo vertical, obteve a seguinte equação para a parábola:

$y = 9 - x^2$, sendo x e y medidos em metros. Sabe-se que a área sob uma parábola como esta é igual a $\frac{2}{3}$ da área do retângulo cujas dimensões são, respectivamente, iguais à base e à altura da entrada do túnel. Qual é a área da parte frontal da tampa de concreto, em metro quadrado? **alternativa c**

a) 18 b) 20 c) 36 d) 45 e) 54

2. (Enem/MEC) A trajetória de uma pessoa que pula de um andaime até o chão é descrita por uma função $y = f(x)$, sendo x e y medidos em metro, conforme mostra a figura.

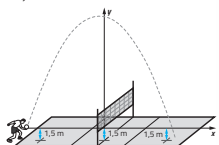


Seja D o domínio da função $f(x)$, como definida na figura. **alternativa b**

Para que a situação representada na figura seja real, o domínio dessa função deve ser igual a

- a) $\{x_1\}$, sendo x_1 a raiz positiva de $f(x)$.
b) $\{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x \leq x_1\}$, sendo x_1 a raiz positiva de $f(x)$.
c) $\{x \in \mathbb{R} \mid x_1 \leq x \leq x_2\}$, sendo x_1 e x_2 raízes de $f(x)$, com $x_1 < x_2$.
d) $\{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\}$.
e) $x \in \mathbb{R}$.

3. (Enem/MEC) Em jogos de voleibol, um saque é invalidado se a bola atingir o teto do ginásio onde ocorre o jogo. Um jogador de uma equipe tem um saque que atinge uma grande altura. Seu recorde foi quando a batida do saque se iniciou a uma altura de 1,5 m do piso da quadra, e a trajetória da bola foi descrita pela parábola $y = -\frac{x^2}{6} - \frac{7x}{3} + 12$, em que y representa a altura da bola em relação ao eixo x (das abscissas) que está localizado a 1,5 m do piso da quadra, como representado na figura. Suponha que em todas as partidas algum saque desse jogador atinja a mesma altura do seu recorde.



A equipe desse jogador participou de um torneio de voleibol no qual jogou cinco partidas, cada uma delas em um ginásio diferente. As alturas dos tetos desses ginásios, em relação aos pisos das quadras, são:

- ginásio I: 17 m;
- ginásio II: 18 m;
- ginásio III: 19 m;
- ginásio IV: 21 m;
- ginásio V: 40 m.

O saque desse atleta foi invalidado: **alternativa d**

- a) apenas no ginásio I.
b) apenas nos ginásios I e II.
c) apenas nos ginásios I, II e III.
d) apenas nos ginásios I, II, III e IV.
e) em todos os ginásios.

4. (UFRGS-RS) Se $p = 10$ e q são as raízes reais da equação $x^2 - 5x + 20 = 0$, então o valor de $5q$:
a) 0. b) 2. c) 6. d) 10. e) 12.
alternativa e

5. (Enem/MEC) Ao analisar os dados de uma epidemia em uma cidade, peritos obtiveram um modelo que avalia a quantidade de pessoas infectadas a cada mês, ao longo de um ano. O modelo é dado por $p(t) = -t^2 + 10t + 24$, sendo t um número natural, variando de 1 a 12, que representa os meses do ano, e $p(t)$ a quantidade de pessoas infectadas no mês t do ano. Para tentar diminuir o número de infectados no próximo ano, a Secretaria Municipal de Saúde decidiu intensificar a propaganda oficial sobre os cuidados com a epidemia. Foram apresentadas cinco propostas (I, II, III, IV e V), com diferentes períodos de intensificação das propagandas:

- I) $1 \leq t \leq 2$;
- II) $3 \leq t \leq 4$;
- III) $5 \leq t \leq 6$;
- IV) $7 \leq t \leq 9$;
- V) $10 \leq t \leq 12$.

A sugestão dos peritos é que seja escolhida a proposta cujo período de intensificação da propaganda englobe o mês em que, segundo o modelo, há a maior quantidade de infectados. A sugestão foi aceita.

A proposta escolhida foi a: **alternativa c**

a) I. b) II. c) III. d) IV. e) V.

6. (Enem/MEC) O chocolate é um dos alimentos mais apreciados e desejados do mundo. Uma loja especializada nesse produto oferece uma promoção para os bombons, que custam R\$ 2,00 cada. Cada cliente tem $x\%$ de desconto na compra de x bombons. A promoção é válida para a compra de até 40 bombons, ou seja, 40% é o desconto máximo possível. Queremos escrever uma expressão para V em função de x , com $x \leq 40$.

Qual é a expressão do valor V , em reais, na compra de x bombons da promoção, por cliente? **alternativa c**

- a) $V = \frac{1}{50}x^2$ d) $V = x - \frac{1}{100}x^2$
b) $V = 2 - \frac{1}{50}x$ e) $V = 2x - \frac{1}{100}x$
c) $V = 2x - \frac{1}{50}x^2$

7. (UEG-GO) A temperatura, em graus Celsius, de um objeto armazenado em um determinado local é modelada pela função $f(x) = -\frac{x^2}{12} + 2x + 10$ com x dado em horas. A temperatura máxima atingida por esse objeto nesse local de armazenamento é de: **alternativa d**

- a) 0 °C. b) 10 °C. c) 12 °C. d) 22 °C. e) 24 °C.

8. (UFG-GO) Uma companhia aérea oferece locação de aeronaves, para viagem de ida e volta de São Paulo a Fortaleza, com as seguintes condições: um avião, com lotação para 160 pessoas custa R\$ 800,00 por pessoa e se o número de desistentes for inferior a 80 pessoas, cada pessoa que permanecer no grupo deverá pagar R\$ 4,00 a mais por cada desistente do pacote de viagem. Se o número de desistentes for superior a 80 pessoas, a viagem será cancelada.

A viagem foi realizada, faturando-se R\$ 125.504,00, então, o número de pessoas que realizou a viagem foi igual a: **alternativa c**

- a) 84. b) 96. c) 148. d) 158.

9. (UEG-GO) Dadas as funções $f(x) = -x^2$ e $g(x) = 2x$, um dos pontos de interseção entre as funções f e g é: **alternativa b**

- a) (0, 2) d) (0, -2)
b) (-2, -4) e) (-2, 4)
c) (2, 4)

10. (Ifal) Certo fabricante, segundo levantamentos estatísticos, percebe que seus clientes não têm comprado mais de 100 de seus produtos por compras. Para incentivar as compras em maior quantidade, ele estabelece um preço unitário p por produto dado pela função $p(x) = 400 - x$, onde x é a quantidade de produtos comprados, considerando uma compra de, no máximo, 300 produtos. Sabendo-se que a receita de uma empresa é o valor arrecadado com a venda de uma certa quantidade de produtos, qual a receita máxima que essa empresa pode ter quando fechar uma venda com um determinado cliente, na moeda corrente no Brasil? **alternativa d**

- a) R\$ 200,00. d) R\$ 40.000,00.
b) R\$ 400,00. e) R\$ 80.000,00.
c) R\$ 20.000,00.

11. (UECE) No plano, com o sistema de coordenadas cartesianas usual, o gráfico da função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^2 + 2mx + 9$ é uma parábola que tangencia o eixo das abscissas, e um de seus pontos com ordenada igual a 9 tem abscissa negativa. Nessas condições, o valor do parâmetro m está entre: **alternativa b**

- a) 1,5 e 2,5. d) 3,5 e 4,5.
b) 2,5 e 3,5. e) 4,5 e 5,5.

PRATICANDO ENEM E VESTIBULARES

A seção fornece diversas questões do Enem e de vestibulares de diferentes regiões do Brasil relacionadas ao que foi estudado na Unidade.

ÍCONES



Resposta oral ■ Quando este ícone for apresentado, a resposta para a atividade deve ser dada oralmente, sem a necessidade de registro escrito no caderno.



Atividade em grupo ■ É sugerido que, nas atividades com este ícone, sejam formadas duplas ou grupos. Dessa maneira, você pode discutir com os colegas utilizando, como argumento, os conhecimentos adquiridos ao longo de sua vida escolar.



Calculadora ■ Este ícone entra nas atividades em que se sugere o uso da calculadora.

OBJETOS EDUCACIONAIS DIGITAIS

Os ícones a seguir identificam os diferentes tipos de objetos educacionais digitais presentes neste volume. Esses materiais digitais apresentam assuntos complementares ao conteúdo trabalhado na obra, ampliando a aprendizagem.



VIDEO



PODCAST



CARROSSEL DE IMAGENS



INFOGRÁFICO CLICÁVEL



MAPA CLICÁVEL

Os sites indicados nesta obra podem apresentar imagens e eventuais textos publicitários junto ao conteúdo de referência, os quais não condizem com o objetivo didático da coleção. Não há controle sobre esses conteúdos, pois eles estão estritamente relacionados ao histórico de pesquisa de cada usuário e à dinâmica dos meios digitais.

SUMÁRIO

UNIDADE

1

Conjuntos 11

Noção de conjunto	12	Representação de número racional	30
Igualdade de conjuntos	13	Atividades	31
Relação de inclusão de conjuntos	14	Números racionais e algumas aplicações	33
Atividades	15	Atividades	35
Operações com conjuntos	17	Conjunto dos números irracionais (I)	38
União e interseção de conjuntos	17	O número irracional π	42
Diferença entre conjuntos	21	Conjunto dos números reais (R)	43
Atividades	22	Módulo de um número real	43
Integrando com Ciências da Natureza e suas Tecnologias Transfusão sanguínea	24	Intervalo real	44
Conjunto dos números naturais (N) e conjunto dos números inteiros (Z)	26	Atividades	46
Conjunto dos números racionais (Q)	28	Você conectado Representando um retângulo áureo	48
		O que estudei	50
		Praticando: Enem e vestibulares	52

UNIDADE

2

Relações entre grandezas e noção de função 55

Grandezas	56	Gráfico de uma função	83
Outras grandezas	60	Análise do gráfico de uma função	86
Atividades	62	Crescimento e decrescimento de uma função	87
Relações entre grandezas	66	Atividades	89
Atividades	68	Estudo do sinal de uma função	91
Conceito de função	72	Atividades	92
Atividades	75	Você conectado Representando pontos do gráfico de funções	93
Integrando com Ciências da Natureza e suas Tecnologias Velocidade de conexão	77	O que estudei	96
Estudo do domínio de uma função real	80	Praticando: Enem e vestibulares	98
Atividades	81		

UNIDADE

3

Função afim e função modular 101

Função afim: ideias iniciais e definição 102

Determinação de uma função afim 105

▶ **Atividades** 107

Taxa de variação média de uma função 111

Taxa de variação média de uma função afim 112

▶ **Atividades** 113

Gráfico da função afim 114

Interseção do gráfico de uma função afim com os eixos cartesianos 119

Translação do gráfico de uma função afim 120

▶ **Atividades** 122

Equação da reta 126

▶ **Atividades** 128

▶ **Integrando com Ciências da Natureza e suas Tecnologias** Movimento retilíneo uniforme 129

Estudo do sinal de uma função afim 132

▶ **Atividades** 134

Algumas aplicações 135

Função afim e perímetro de polígonos regulares 135

Função afim e juro simples 136

Função afim e progressão aritmética 137

▶ **Atividades** 138

Função modular 141

Translação do gráfico de uma função modular 142

▶ **Atividades** 143

▶ **Você conectado** Construindo e analisando o gráfico da função afim; Construindo um modelo para representar relações entre grandezas 145

O que estudei 149

Praticando: Enem e vestibulares 151

UNIDADE

4

Função quadrática 153

A parábola 154

Função quadrática: características e definição 155

▶ **Atividades** 157

Zeros de uma função quadrática 160

A fórmula resolutiva 162

▶ **Atividades** 165

Gráfico de uma função quadrática 166

Interseção do gráfico de uma função quadrática com os eixos cartesianos 167

A parábola e os coeficientes de uma função quadrática 169

▶ **Atividades** 170

Vértice da parábola 174

Conjunto imagem de uma função quadrática 176

▶ **Atividades** 177

Valor máximo ou valor mínimo da função quadrática 178

▶ **Atividades** 181

▶ **Você conectado** Determinando as coordenadas do vértice de uma função quadrática; Estudando relações entre grandezas por meio de modelos correspondentes a funções quadráticas 184

Estudo do sinal de uma função quadrática 188

▶ **Atividades** 190

Equação da parábola 192

▶ **Atividades** 196

▶ **Integrando com Ciências da Natureza e suas Tecnologias** Antena parabólica 197

O que estudei 200

Praticando: Enem e vestibulares 202

UNIDADE

5

Relações métricas e trigonometria no triângulo 205

Teorema de Tales	206	Integrando com Ciências Humanas e Sociais Aplicadas Acessibilidade	231
▶ Atividades	210	Razões trigonométricas em um triângulo qualquer	234
Semelhança de polígonos	211	Lei dos senos	234
Semelhança de triângulos	212	▶ Atividades	236
▶ Atividades	215	Lei dos cossenos	238
Relações métricas no triângulo retângulo	216	▶ Atividades	240
▶ Atividades	219	▶ Você conectado Comprovando a validade da lei dos senos	242
Razões trigonométricas no triângulo retângulo	221	O que estudei	244
▶ Atividades	224	Praticando: Enem e vestibulares	246
Tabela trigonométrica	225		
▶ Atividades	227		

UNIDADE

6

Estatística: gráficos e tabelas 249

Tabelas	250	Distribuição de frequência	270
Gráficos	251	▶ Atividades	272
Gráfico de colunas e gráfico de barras	251	Intervalo de classes e histograma	273
Gráfico de segmentos	252	▶ Atividades	275
Gráfico de setores	253	▶ Você conectado Construindo gráficos	278
Diagrama de caixas ou <i>box-plot</i>	254	Gráficos e tabelas: inadequações que podem induzir a erro de interpretação	280
▶ Atividades	255	▶ Atividades	284
Diagrama de ramos e folhas	263	O que estudei	287
▶ Atividades	264	Praticando: Enem e vestibulares	289
▶ Integrando com Ciências Humanas e Sociais Aplicadas <i>Bullying</i>	266		

Respostas das atividades	291
Siglas dos exames oficiais	300
Bibliografia comentada	301

OBJETOS EDUCACIONAIS DIGITAIS

Vídeo: Número pi	42	Vídeo: Fórmula resolutiva ou fórmula de Bhaskara?	162
Infográfico clicável: A internet e a transferência de dados	62	Infográfico clicável: Energias renováveis no Brasil	230
Podcast: Direitos trabalhistas para todos	67	Podcast: Acessibilidade: um direito de todos	231
Carrossel de imagens: Principais poluentes do ar	110	Mapa clicável: Cultura e História: Sítios Arqueológicos da Região Nordeste	256
Vídeo: René Descartes	126	Podcast: A Matemática no combate às fake news	280
Infográfico clicável: Agricultura familiar: um modelo sustentável	132		
Carrossel de imagens: Trajetórias parabólicas em diferentes contextos	154		

1

CONJUNTOS

Banco de dados

Diversas atividades que realizamos no dia a dia envolvem a tecnologia de banco de dados, que consiste em um sistema de gerenciamento de informações que possibilita a organização e a busca de conteúdos em diferentes categorias de maneira rápida e assertiva.

Imagine, por exemplo, um aplicativo de loja de calçados com milhares de itens disponíveis para venda. Para comprar um calçado, um cliente pode selecionar opções nas categorias organizadas no banco de dados da loja, de acordo com suas preferências, restringindo informações como tamanho, preço, cor e marca.

O nome do estabelecimento e as marcas dos produtos que aparecem na figura são fictícios.



Não escreva no livro.

Respostas nas **Orientações para o professor.**

Após ler as informações, converse com os colegas e o professor sobre os itens a seguir.

1. Descreva uma situação do seu dia a dia em que você acredita que esteja envolvida a tecnologia de banco de dados.
2. Você já comprou algum produto *on-line* utilizando opções de filtro? Descreva como foi essa experiência.
3. Dois clientes da loja virtual representada na imagem selecionaram as mesmas opções de tamanho, cor e marca de calçado. Porém apenas um deles selecionou uma opção de preço. Para qual desses clientes serão apresentados menos itens para compra? Explique.



Noção de conjunto

O nome do estabelecimento e as marcas dos produtos que aparecem na figura são fictícios.

Na abertura desta Unidade, foi apresentado que um sistema de gerenciamento de banco de dados pode ser utilizado para selecionar um ou mais objetos de uma coleção. Uma coleção de objetos quaisquer é chamada de **conjunto**. Cada objeto de um conjunto é chamado de **elemento** desse conjunto. Por exemplo, no aplicativo de loja descrito na abertura, todos os pares de calçados cadastrados formam um conjunto em que cada par de calçado é um elemento desse conjunto.

Usualmente, um conjunto é indicado por uma letra maiúscula do alfabeto, e um elemento é indicado por uma letra minúscula. Podemos representar um conjunto de diferentes maneiras.

Exemplos:

- a) Seja A o conjunto cujos elementos são todos os divisores positivos de 20. Acompanhe algumas maneiras de representar esse conjunto.

- Colocando seus elementos entre chaves e separados por vírgula.

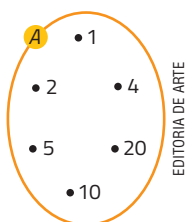
$$A = \{1, 2, 4, 5, 10, 20\}$$

- Apresentando as características que definem seus elementos.

$$A = \{x \mid x \text{ é divisor positivo de } 20\}$$

↑ Lê-se: tal que.

- Utilizando um esquema conhecido como diagrama de Venn. Nele, cada elemento é representado por uma marcação ao lado da sua indicação.



- b) Para conjuntos com “muitos” elementos, podemos usar as reticências. Seja B o conjunto de todos os números naturais menores que 100.

$$B = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, \dots, 97, 98, 99\}$$

Quando um elemento faz parte de um conjunto, dizemos que ele **pertence** a esse conjunto. E quando um elemento não faz parte de um conjunto, dizemos que ele **não pertence** a esse conjunto. Por exemplo, em relação ao conjunto $A = \{1, 2, 4, 5, 10, 20\}$, temos:

- $5 \in A$, pois 5 é divisor positivo de 20;
↑ Lê-se: pertence.
- $3 \notin A$, pois 3 não é divisor positivo de 20.
↑ Lê-se: não pertence.

Agora, considere os conjuntos a seguir.

$$B = \{x \mid x \text{ é capital da Bahia}\}$$

$$C = \{x \mid x \text{ é um número ímpar múltiplo de } 2\}$$



- ▶ Esse par de tênis é um elemento do conjunto formado por todos os pares de calçados cadastrados nesse aplicativo.

Resposta esperada:
Falsa, pois a expressão indica que o número 10 não pertence ao conjunto A , mas 10 é divisor positivo de 20. Portanto, 10 pertence a A ($10 \in A$).

PARA PENSAR

A expressão $10 \notin A$ é verdadeira ou falsa? Explique.

Em relação a esses conjuntos, temos:

- B é um **conjunto unitário**, pois tem um único elemento: o município de Salvador.
- C é um **conjunto vazio**, pois não há número ímpar múltiplo de 2; portanto, o conjunto não tem nenhum elemento. Para denotar um conjunto vazio, utilizamos \emptyset ou $\{ \}$, ou seja, $C = \emptyset$ ou $C = \{ \}$.

Outro conjunto que podemos destacar é o **conjunto universo**, geralmente denotado por U . A esse conjunto pertencem todos os elementos de determinada situação em estudo. Por exemplo, considerando B como o conjunto das capitais brasileiras que começam com a letra **B**, o conjunto universo U é formado por todas as capitais do Brasil.

Outro conceito importante no estudo de conjuntos é a ideia de conjuntos finitos e infinitos. Dizemos que um conjunto é **finito** se ele for vazio ou tiver uma quantidade finita de elementos, de modo que seja possível contá-los e chegar ao final. Quando não é finito, dizemos que o conjunto é **infinito**.

Exemplos:

- a)** O conjunto A das capitais da Região Sul do Brasil é um conjunto finito.

$$A = \{\text{Curitiba, Florianópolis, Porto Alegre}\}$$

- b)** O conjunto B dos números possíveis de serem sorteados em um dado comum é um conjunto finito.

$$B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

- c)** O conjunto C dos números pares é um conjunto infinito.

$$C = \{0, 2, 4, 6, 8, 10, \dots\}$$

Utilizamos as reticências para indicar um conjunto infinito.

- d)** O conjunto D dos múltiplos positivos de 5 é um conjunto infinito.

$$D = \{5, 10, 15, 20, 25, \dots\}$$

Em um conjunto finito, podemos determinar a quantidade de elementos que esse conjunto tem. Indicamos por $n(A)$ a quantidade de elementos do conjunto finito A . Assim, nos exemplos **a** e **b**, temos $n(A) = 3$ e $n(B) = 6$.

● Igualdade de conjuntos

Considere os conjuntos $A = \{x \mid x \text{ é um estado da Região Norte}\}$ e $B = \{\text{Acre, Amapá, Amazonas, Pará, Rondônia, Roraima, Tocantins}\}$. Note que os conjuntos A e B têm os mesmos elementos. Nesse caso, dizemos que A é **igual a** B e indicamos $A = B$.

PARA PENSAR

Os conjuntos $A = \{1, 2, 3\}$ e $B = \{x \mid x \text{ é um divisor positivo de } 6\}$ são iguais? Justifique.

Não, pois $6 \in B$ e $6 \notin A$.

Dois conjuntos A e B são iguais quando todo elemento de A pertence a B e, de maneira recíproca, todo elemento de B pertence a A .

$$A = B \Leftrightarrow (\forall x) (x \in A \Leftrightarrow x \in B)$$

Lê-se: se, e somente se.

Lê-se: qualquer.

Se algum elemento de um conjunto C não pertence a um conjunto D , então dizemos que esses conjuntos são **diferentes** e indicamos $C \neq D$.

• Relação de inclusão de conjuntos

Considere os conjuntos:

$$A = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$$

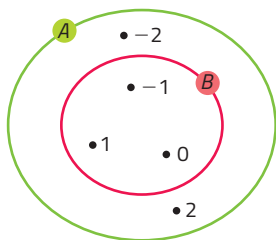
$$C = \{5, 6, 7, 8\}$$

$$B = \{-1, 0, 1\}$$

$$D = \{7, 8, 9\}$$

Agora, observe a representação da relação entre alguns desses conjuntos por meio do diagrama de Venn.

- Conjuntos A e B .



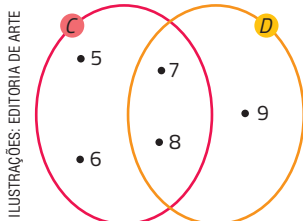
Note que todos os elementos do conjunto B também são elementos do conjunto A . Assim, dizemos que B é parte de A , ou B **está contido** em A , ou, ainda, que B é um **subconjunto** de A .

Indicamos: $B \subset A$.

↑ Lê-se: está contido.

A relação $B \subset A$ é chamada de **relação de inclusão**.

- Conjuntos C e D .



Note que há elemento do conjunto D que não é elemento do conjunto C (o elemento 9). Assim, dizemos que D não é parte de C , ou D **não está contido** em C , ou, ainda, que D não é um subconjunto de C .

Indicamos: $D \not\subset C$.

↑ Lê-se: não está contido.

Propriedades da inclusão de conjuntos

Vamos destacar algumas propriedades da relação de inclusão de conjuntos. Para isso, considere os conjuntos A , B e C quaisquer.

- **O conjunto vazio é subconjunto de qualquer conjunto:** $\emptyset \subset A$.

Para demonstrar essa propriedade, podemos realizar uma prova por absurdo, ou seja, supor por hipótese que isso não acontece e concluir uma contradição. Nesse caso, supondo $\emptyset \not\subset A$, existiria um elemento $x \in \emptyset$ de maneira que $x \notin A$. No entanto, isso é um absurdo, uma vez que, por definição, elemento algum pertence a \emptyset . Portanto, $\emptyset \subset A$.

- **Propriedade reflexiva:** $A \subset A$.

Um conjunto qualquer está contido em si mesmo.

- **Propriedade antissimétrica:** se $A \subset B$ e $B \subset A$, então $A = B$.

Essa propriedade pode ser utilizada quando é necessário demonstrar que dois conjuntos são iguais. Nesse caso, basta mostrar que $A \subset B$ (todo elemento de A também é elemento de B) e que $B \subset A$ (todo elemento de B também é elemento de A).

- **Propriedade transitiva:** se $A \subset B$ e $B \subset C$, então $A \subset C$.

MATEMÁTICA NA HISTÓRIA

Em Matemática, o conceito de conjunto foi tratado no decorrer da história por diversos estudiosos, com destaque para o russo Georg Cantor (1845-1918), que, em 1874, começou a desenvolver seu trabalho inovador em Teoria dos Conjuntos. Outros contribuintes para o desenvolvimento dessa área da Matemática foram Julius Wilhelm Richard Dedekind (1831-1916), Giuseppe Peano (1858-1932) e Kurt Gödel (1906-1978).

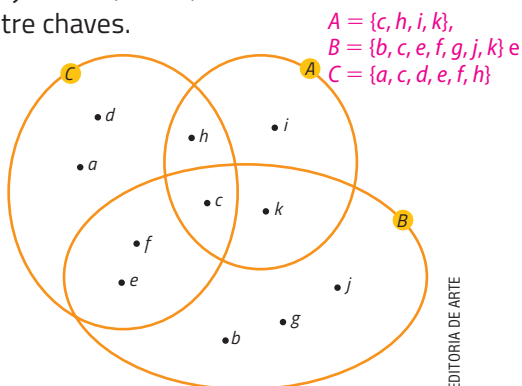
Fonte dos dados: BOYER, Carl Benjamin. **História da matemática**. Tradução: Elza Furtado Gomide. 1. ed. São Paulo: Edgard Blücher, 1974. p. 414.

2. a) $A = \{2, 4, 6\}$, $B = \{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$ e $C = \{1, 4, 9, 16, 25\}$

ATIVIDADES

Não escreva no livro.

1. Analise o diagrama a seguir e represente os conjuntos A , B e C , indicando seus elementos entre chaves.



2. Considere os seguintes conjuntos e resolva as questões.

- $A = \{x \mid x \text{ é número par positivo, menor que } 7\}$.
- $B = \{y \mid y \text{ é divisor positivo de } 12\}$.
- $C = \{z \mid z \text{ é número quadrado perfeito menor que } 30\}$.

- a) Represente cada conjunto, indicando seus elementos entre chaves.

- b) Entre esses conjuntos, algum é subconjunto de outro? Justifique.

3. Escreva quatro subconjuntos do conjunto $A = \{3, 6, 9\}$. Respostas possíveis: \emptyset , $\{3, 6, 9\}$, $\{3, 6\}$, $\{3, 9\}$, $\{6, 9\}$, $\{3\}$, $\{6\}$, $\{9\}$.

4. Represente, em um único diagrama, os conjuntos $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{1, 4, 5, 6\}$, $C = \{4, 6\}$ e $D = \{3\}$. Depois, copie os itens a seguir e substitua cada $///$ pelo símbolo \subset ou $\not\subset$.

- a) $D /// A$ d) $C /// B$
b) $B /// C$ e) $\emptyset /// D$
c) $A /// B$ f) $B /// D$

Resposta nas **Orientações para o professor**.

2. b) Sim, A é subconjunto de B , pois todo elemento de A também é elemento de B .

5. Agora é a sua vez! Com base nos conjuntos A , B , C e D da atividade anterior, escreva outros dois itens que relacionem os conjuntos por meio dos símbolos \subset e $\not\subset$. Resposta possível: $\emptyset \subset A$; $B \not\subset A$.

6. Leia o texto a seguir.

Reino animal

Os seres vivos do reino animal podem ser classificados em dois grandes grupos, conforme segue.

Invertebrados: animais que não apresentam coluna vertebral. Os moluscos, como caramujos, lesmas e ostras, são exemplos de animais invertebrados.

Vertebrados: animais dotados de espinha ou coluna vertebral. Os répteis, como lagartos, cobras e tartarugas, são exemplos de animais vertebrados.

Fonte dos dados: REECE, Jane B. et al. **Biologia de Campbell**. 10. ed. Porto: Artmed, 2015.

Agora, considere os conjuntos a seguir.

$$A = \{a \mid a \text{ é animal}\}$$

$$V = \{v \mid v \text{ é animal vertebrado}\}$$

$$I = \{i \mid i \text{ é animal invertebrado}\}$$

$$R = \{r \mid r \text{ é réptil}\}$$

$$M = \{m \mid m \text{ é molusco}\}$$

6. a) Resposta nas **Orientações para o professor**.

- a) Construa um diagrama para representar os conjuntos descritos anteriormente.

- b) Qual destas sentenças é falsa? Justifique.

- $V \subset A$ $I \subset V$. Resposta nas **Orientações para o professor**.
- $M \subset A$
- $I \subset V$ $R \subset V$

- c) Podemos dizer que determinada tartaruga é elemento de quais desses conjuntos?
 $A, V \text{ e } R$



7. Seis funcionários de uma empresa se inscreveram para participar de um treinamento visando à melhoria contínua de suas práticas. Algumas informações sobre esses funcionários foram organizadas em uma planilha eletrônica. Observe.

7. b) Não, pois existe um funcionário nessa faixa etária que é do setor de produção; no caso, Antônio, com 36 anos de idade.

7. d) Resposta possível: Selecionar apenas funcionários com idade inferior a 30 anos.

	A	B	C
1	Nome ▾	Setor ▾	Idade (anos) ▾
2	Antônio	Produção	36
3	Bruna	Vendas	29
4	Elza	Administração	38
5	Keila	Produção	42
6	Mário	Vendas	48
7	Rosana	Produção	22

EDITORA DE ARTE

- a) Quantos desses funcionários são do setor de produção? Independentemente do setor, quantos têm idade inferior a 30 anos? **3 funcionários; 2 funcionários**
- b) Podemos afirmar que todos os funcionários com idade entre 30 e 40 anos que se inscreveram são exclusivamente do setor de administração? Explique.
- c) Para a primeira etapa de treinamento, foram selecionados funcionários com mais de 40 anos de idade, dos setores de administração ou de produção. Quais funcionários participaram dessa etapa de treinamento? **Keila**
-  d) Pense e registre no caderno um critério para a seleção dos funcionários que participarão da segunda etapa de treinamento. De acordo com esse critério, apenas Rosana e Bruna devem ser selecionadas. Por fim, compare sua resposta com a de outros colegas.
-  8. Pesquise aspectos diferentes daqueles mencionados na atividade 6 relacionados aos seres vivos do reino animal, como alimentação (carnívoro, herbívoro, onívoro), simetria (assimétrico, simétrico radial, simétrico bilateral), reprodução (sexuada, assexuada) e regulação térmica (endotérmicos e ectotérmicos). Com base nas características pesquisadas, elabore uma situação-problema envolvendo a ideia de conjunto. Depois, troque essa situação-problema com um colega para que ele a resolva, enquanto você resolve a que ele elaborou. Ao final, confirmem juntos as resoluções. **Resposta pessoal.**

NO MUNDO**DO TRABALHO****Proatividade e melhoria contínua**

O mercado de trabalho tem exigido dos profissionais, além dos conhecimentos técnicos de cada profissão, o desenvolvimento de competências comportamentais chamadas de **soft skills**. Entre essas competências estão a **proatividade** e a **melhoria contínua**. O profissional proativo é aquele que busca antecipar-se a problemas e necessidades da empresa antes que eles surjam, além de resolver tarefas e auxiliar os colegas sem que lhe seja ordenado. Já o profissional que tem a competência da melhoria contínua desenvolvida está disposto a estudar, fazer cursos de capacitação, inovar suas práticas de trabalho, entre outras ações que visam melhorar seus resultados constantemente.

Acesse o *podcast* indicado a seguir para obter mais informações sobre as *soft skills*.

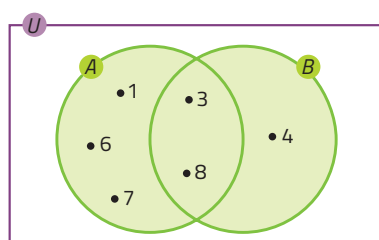
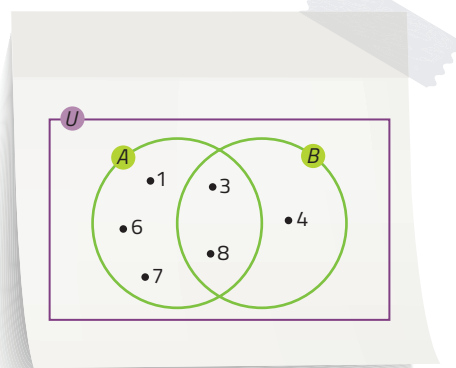
- BBC LÊ: o que são 'soft skills': habilidades comportamentais cada vez mais buscadas por empregadores. Locução de: Rodrigo Durão. [S. l.]: BBC News Brasil, 14 ago. 2022. *Podcast*. Disponível em: <https://www.youtube.com/watch?v=rcWm0xc8AEA>. Acesso em: 25 jun. 2024.

Operações com conjuntos

• União e interseção de conjuntos

Observe os conjuntos $A = \{1, 3, 6, 7, 8\}$ e $B = \{3, 4, 8\}$ representados no diagrama ao lado direito da página.

Podemos determinar um conjunto C , formado por todos os elementos que pertencem a A **ou** a B , ou seja, tal conjunto terá elementos que pertencem apenas a A , ou apenas a B , ou a ambos os conjuntos. Nesse caso, $C = \{1, 3, 4, 6, 7, 8\}$. Esse conjunto é denominado **união dos conjuntos** A e B , denotado por $A \cup B$ (lê-se: A união B).

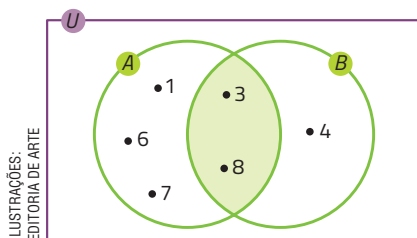


► A parte destacada em verde corresponde a $A \cup B$.

Sejam A e B dois conjuntos quaisquer. Denominamos **união** (ou **reunião**) de A e B , indicada por $A \cup B$, o conjunto C formado pelos elementos que pertencem a A ou a B .

$$C = A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ ou } x \in B\}$$

Também podemos determinar um conjunto D , formado por todos os elementos que pertencem a A **e** a B , ou seja, tal conjunto terá elementos que pertencem **simultaneamente** aos conjuntos A e B . Nesse caso, $D = \{3, 8\}$. Esse conjunto é denominado **interseção dos conjuntos** A e B , denotado por $A \cap B$ (lê-se: A interseção B).



► A parte destacada em verde corresponde a $A \cap B$.

Sejam A e B dois conjuntos quaisquer. Denominamos **interseção** de A e B , indicada por $A \cap B$, o conjunto D formado pelos elementos que pertencem a A e a B .

$$D = A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ e } x \in B\}$$

DICA

A palavra **ou**, utilizada na definição de união de conjuntos, não tem apenas sentido de exclusão, como pode ocorrer na linguagem habitual, por exemplo, quando dizemos “vou à escola ou vou à livreria”.

ILUSTRAÇÕES:
EDITORIA DE ARTE

ATIVIDADES RESOLVIDAS

R1. Considere os conjuntos $A = \{5, 9\}$, $B = \{-1, 1, 2, 9\}$ e $C = \{0, 1, 4\}$ e determine:

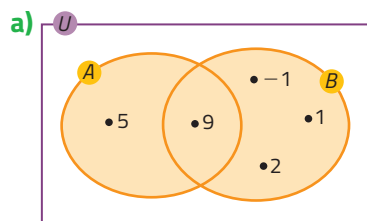
a) $A \cup B$

b) $A \cap B$

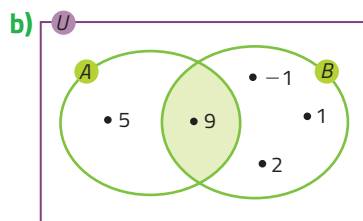
c) $A \cap C$

Resolução

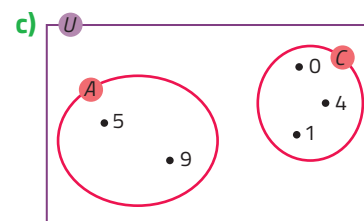
Para resolver cada item, podemos representar os conjuntos por meio de diagramas de Venn.



$$A \cup B = \{-1, 1, 2, 5, 9\}$$



$$A \cap B = \{9\}$$



$$A \cap C = \emptyset$$

Note que $A \cap C$ é um conjunto vazio, pois não há elemento algum que pertença simultaneamente a A e a C . Nesse caso, dizemos que A e C são **conjuntos disjuntos**.

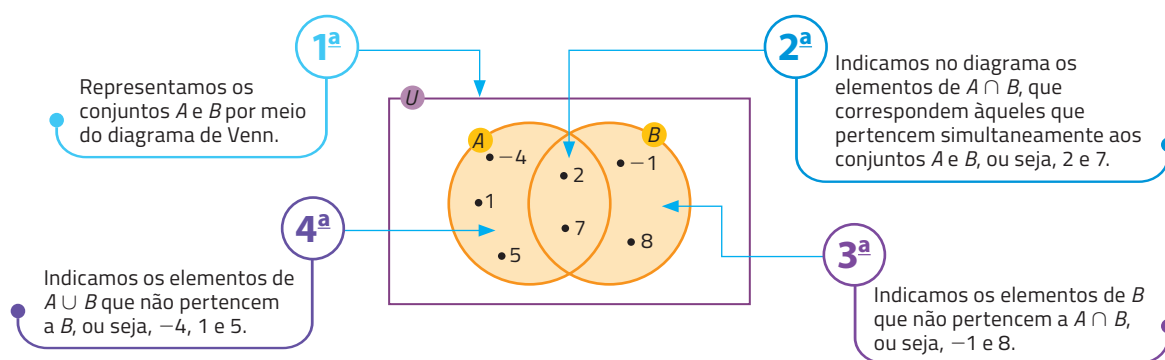
Sejam D e E dois conjuntos quaisquer. Dizemos que D e E são **conjuntos disjuntos** quando D e E não têm elemento comum.

$$D \text{ e } E \text{ são disjuntos} \Leftrightarrow D \cap E = \emptyset$$

R2. Dados os conjuntos $B = \{-1, 2, 7, 8\}$, $A \cup B = \{-4, -1, 1, 2, 5, 7, 8\}$ e $A \cap B = \{2, 7\}$, determine o conjunto A .

Resolução

Para resolver esta questão, podemos elaborar um algoritmo, que consiste em etapas com instruções descritas e ordenadas. Acompanhe.



Portanto, $A = \{-4, 1, 2, 5, 7\}$.

PARA PENSAR

Esse **algoritmo** pode ser adaptado para resolver outras questões com estruturas parecidas. No caderno, determine os elementos de um conjunto E , dados os conjuntos $D = \{-3, -1, 0, 7, 9\}$, $D \cup E = \{-3, -1, 0, 2, 5, 7, 9\}$ e $D \cap E = \{-1, 7, 9\}$. $E = \{-1, 2, 5, 7, 9\}$

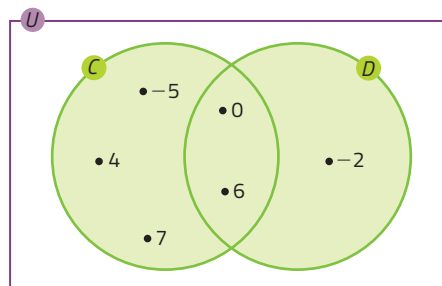
Quantidade de elementos da união de dois conjuntos

Dados os conjuntos $C = \{-5, 0, 4, 6, 7\}$ e $D = \{-2, 0, 6\}$, temos:

- $n(C) = 5$
- $n(D) = 3$
- $C \cup D = \{-5, -2, 0, 4, 6, 7\}$ e $n(C \cup D) = 6$
- $C \cap D = \{0, 6\}$ e $n(C \cap D) = 2$

Note que $n(C \cup D) \neq n(C) + n(D)$, pois os elementos que pertencem a $C \cap D$ (no caso, 0 e 6) estão sendo considerados nesse cálculo duas vezes, tanto em $n(C)$ quanto em $n(D)$. Assim, podemos escrever a igualdade a seguir.

$$\underbrace{n(C \cup D)}_6 = \underbrace{n(C)}_5 + \underbrace{n(D)}_3 - \underbrace{n(C \cap D)}_2$$



ILUSTRAÇÕES: EDITORIA DE ARTE

De modo geral, dados os conjuntos A e B finitos, a quantidade de elementos da união de A e B pode ser expressa por:

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$

Observe que, se $A \cap B = \{\}$, então $n(A \cap B) = 0$. Com isso, $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - 0$. Assim, quando os conjuntos A e B forem disjuntos, temos $n(A \cup B) = n(A) + n(B)$.

ATIVIDADES RESOLVIDAS

- R3.** Considere o conjunto A com 7 elementos e o conjunto B com 5 elementos. Sabendo que esses conjuntos têm 2 elementos em comum, determine quantos elementos há em $A \cup B$.

Resolução

De acordo com o enunciado, temos: $n(A) = 7$, $n(B) = 5$ e $n(A \cap B) = 2$. Dessa maneira:

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B) = 7 + 5 - 2 = 10$$

Logo, $A \cup B$ tem 10 elementos.

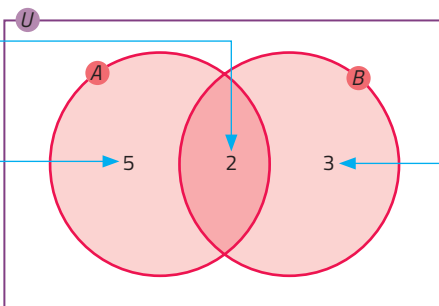
Outra maneira de resolver essa atividade é representando os conjuntos A e B por meio de um diagrama de Venn e realizando as seguintes etapas.

1ª

Indicamos a quantidade de elementos comuns aos dois conjuntos; nesse caso, $n(A \cap B) = 2$.

2ª

Calculamos a quantidade de elementos que pertence apenas a A ; nesse caso, $n(A) - n(A \cap B) = 7 - 2 = 5$.



3ª

Calculamos a quantidade de elementos que pertence apenas a B ; nesse caso, $n(B) - n(A \cap B) = 5 - 2 = 3$.

4ª

Calculamos $n(A \cup B)$ por meio da adição das quantidades de elementos que pertencem a ambos os conjuntos, apenas a A e apenas a B ; nesse caso, $2 + 5 + 3 = 10$.

DICA

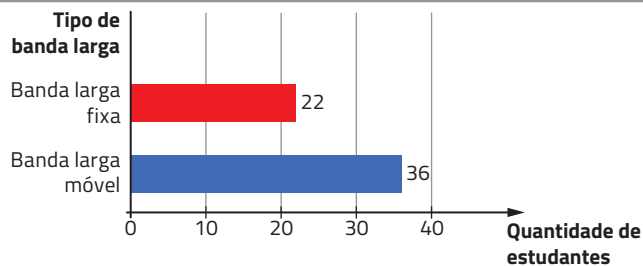
Note que os números indicados nesse diagrama representam quantidades de elementos. Por exemplo, o número 2 indica a quantidade de elementos de $A \cap B$.

R4. Em uma pesquisa realizada com 50 estudantes de uma escola, identificou-se que todos eles têm acesso à internet por meio de banda larga fixa ou móvel. Observe os dados obtidos nessa pesquisa e determine quantos estudantes têm acesso à internet por ambos os tipos de conexão.

Resolução

Para resolver essa atividade, podemos realizar as seguintes etapas.

Resultado da pesquisa sobre acesso à internet



EDITORIA DE ARTE

Fonte: Dados fictícios.

1ª COMPREENDER O ENUNCIADO

Do enunciado, temos que:

- 50 estudantes foram entrevistados e todos eles têm acesso à internet por meio de banda larga fixa ou móvel;
- 22 estudantes têm acesso à internet por banda larga fixa;
- 36 estudantes têm acesso à internet por banda larga móvel.

Temos de determinar quantos estudantes têm acesso à internet por meio de ambos os tipos de conexão.

2ª ELABORAR UM PLANO

Considerando F o conjunto dos estudantes que têm acesso à internet por banda larga fixa e M o conjunto dos estudantes que têm acesso por banda larga móvel, temos:

- $n(F \cup M) = 50$;
- $n(F) = 22$;
- $n(M) = 36$.

Então, temos de determinar $n(F \cap M)$, que pode ser obtido por meio da expressão a seguir.

$$n(F \cup M) = n(F) + n(M) - n(F \cap M)$$

3ª EXECUTAR O PLANO

Substituindo os valores na expressão $n(F \cup M) = n(F) + n(M) - n(F \cap M)$, temos:

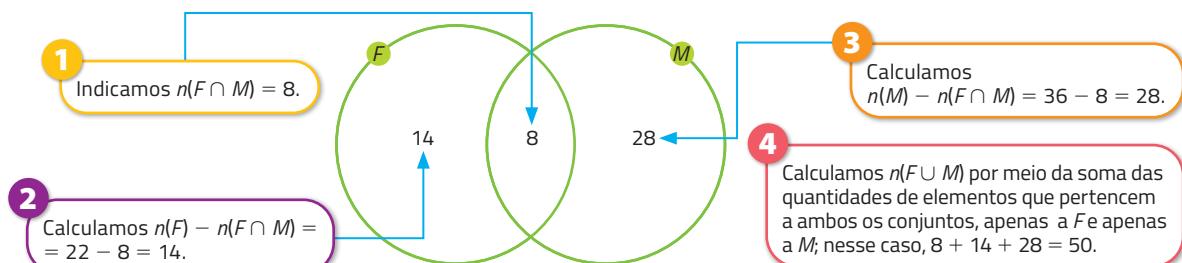
$$50 = 22 + 36 - n(F \cap M) \Rightarrow 50 = 58 - n(F \cap M) \Rightarrow 50 - 58 = -n(F \cap M) \Rightarrow -8 = -n(F \cap M) \Rightarrow n(F \cap M) = 8$$



Lê-se: implica em ou então.

4ª VERIFICAR OS RESULTADOS

Para verificar o resultado obtido, podemos utilizar um diagrama de Venn.

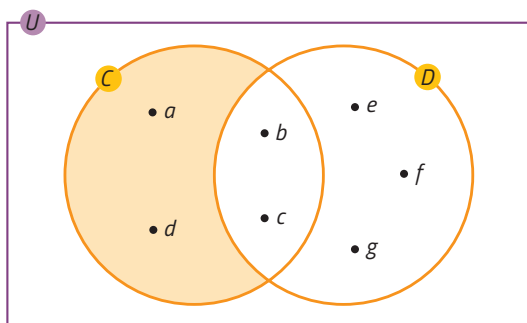


EDITORIA DE ARTE

Portanto, 8 estudantes têm acesso à internet em ambos os tipos de conexão.

Diferença entre conjuntos

Considere os conjuntos $C = \{a, b, c, d\}$ e $D = \{b, c, e, f, g\}$. Podemos determinar um conjunto E , formado por todos os elementos que pertencem a C , mas que não pertencem a D . Nesse caso, $E = \{a, d\}$. Esse conjunto é denominado **diferença** entre os conjuntos C e D , e o denotamos por $C - D$.



► A parte destacada em laranja corresponde a $C - D$.

PARA PENSAR

Quando realizamos a operação de subtração de números reais, também costumamos utilizar o símbolo “-”, como em $10 - 3 = 7$.

O símbolo “-” tem o mesmo significado na operação de subtração de números reais e na operação de diferença entre conjuntos? Explique a um colega.

Resposta pessoal.

Sejam A e B dois conjuntos quaisquer. Denominamos **diferença** entre A e B , indicada por $A - B$, o conjunto formado pelos elementos que pertencem a A e não pertencem a B .

$$A - B = \{x \mid x \in A \text{ e } x \notin B\}$$

Atividade resolvida

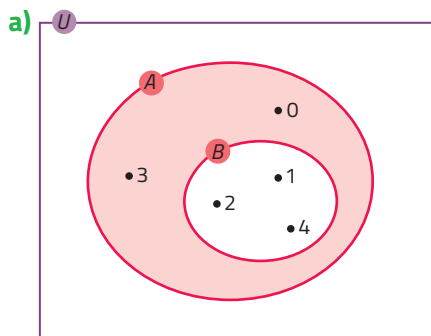
R5. Dados os conjuntos $A = \{0, 1, 2, 3, 4\}$, $B = \{1, 2, 4\}$ e $C = \{0, 1, 4, 5\}$, determine:

a) $A - B$

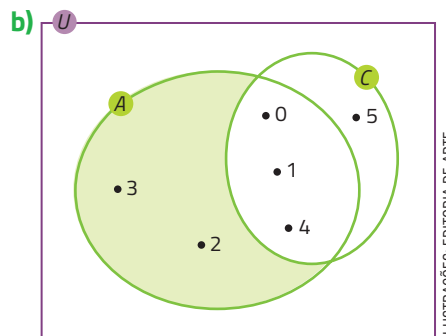
b) $A - C$

Resolução

Para resolver cada item, podemos representar os conjuntos por meio de diagramas de Venn.



$$A - B = \{0, 3\}$$



$$A - C = \{2, 3\}$$

Note que, no item **a**, temos $B \subset A$. Nesse caso, $A - B$ também é chamado de **complementar** de B em relação a A e denotamos por \complement_A^B (lê-se: complementar de B em relação a A).

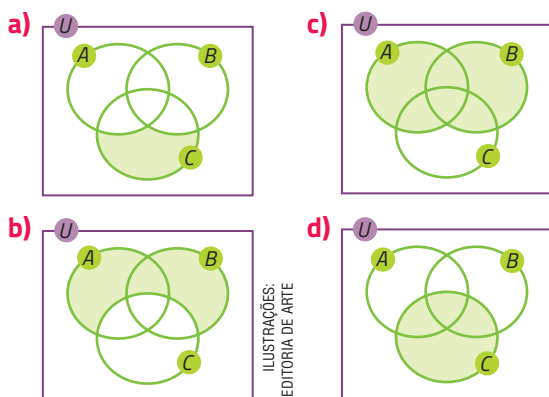
Sejam A e B dois conjuntos quaisquer, em que $B \subset A$. Denominamos **complementar** de B em relação a A , indicado por \complement_A^B , o conjunto $A - B$.

10. Alternativa **b**, pois a parte destacada em verde no diagrama corresponde aos elementos que pertencem aos conjuntos A ou B e não pertencem ao conjunto C , expressa por $(A \cup B) - C$. **a:** $C - (A \cup B)$; **c:** $(A \cup B)$; **d:** C .

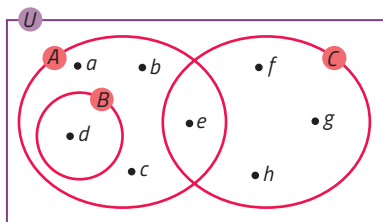
ATIVIDADES

Não escreva no livro.

9. Dados os conjuntos $A = \{-4, -2, 0, 2, 4\}$, $B = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ e $C = \{-2, 5, 7, 9\}$, determine:
- a)** $A \cup C$ $\{-4, -2, 0, 2, 4, 5, 7, 9\}$ **e)** $B - A$ $\{1, 3\}$
b) $C \cap A$ $\{-2\}$ **f)** $A - (B \cup C)$ $\{-4\}$
c) $B \cap C$ \emptyset **g)** $B \cap (A - C)$ $\{0, 2, 4\}$
d) $C \cup (A \cap B)$ $\{-2, 0, 2, 4, 5, 7, 9\}$ **h)** $(A \cup B) - (A \cap B)$ $\{-4, -2, 1, 3\}$
10. Em qual item a seguir a seguir a parte destacada em verde do diagrama representa o conjunto $(A \cup B) - C$? Justifique sua resposta. Depois, escreva uma expressão para representar a parte destacada em verde nos demais diagramas.



11. Observe o diagrama de Venn a seguir e classifique cada sentença como **V** (verdadeira) ou **F** (falsa). Faça a justificativa.



Resposta nas **Orientações para o professor**.

- a)** $B \cup C = \emptyset$ **d)** $n(C \cup A) = 7$
b) $A \cap B = B$ **e)** $\complement_A^B = \{a, b, c, e\}$
c) $n(A) = 5$ **f)** $B - A = \{a, b, c\}$
12. Considere dois conjuntos A e B não vazios. A união desses conjuntos apresenta 31 elementos, e a interseção, 12 elementos. Determine a quantidade de elementos em A .
- a)** Com os dados fornecidos, é possível resolver o problema? Justifique sua resposta.
b) Se não for possível resolver, indique o(s) dado(s) faltante(s) e a solução correspondente.

Respostas nas **Orientações para o professor**.

13. **d)** Conjunto formado pelas unidades da Federação localizadas nas regiões do Brasil em que os estudantes não moram. A quantidade de elementos desse conjunto depende da região em que os estudantes moram.

13. Reúna-se com um colega, pesquisem e respondam às seguintes questões.

- a)** Em quantas regiões o Brasil é dividido? Em qual delas vocês moram? **5 regiões. Resposta pessoal.**
b) Quantas unidades da Federação (UF) existem no Brasil? Em qual delas vocês moram? **27 unidades da Federação. Resposta pessoal.**
Agora considere os conjuntos a seguir e, depois, respondam às questões.

- F , formado por todas as unidades da Federação do Brasil.
 - E , formado pelas unidades da Federação da região em que vocês moram.
- c)** Liste todos os elementos de E e determine $n(E)$. **As respostas dependem da região em que os estudantes moram.**
d) Explique o que representa o conjunto \complement_F^E e determine quantos são seus elementos.

14. Considere os conjuntos A e B , em que $A \cup B = \{-5, -1, 2, 3, 4, 6, 8\}$, $A - B = \{-1, 6\}$ e $B - A = \{3, 4, 8\}$. **a) Resposta nas Orientações para o professor.**

- a)** Escreva um algoritmo para determinar os elementos dos conjuntos A e B e represente-os em um diagrama de Venn.

- b)** No caderno, defina dois conjuntos finitos C e D . Em uma folha avulsa, escreva os elementos de $C \cup D$, $C - D$ e $D - C$ e troque-a com um colega para que ele, utilizando o algoritmo elaborado no item **a**, determine os conjuntos C e D , enquanto você faz o mesmo na folha que receber. Ao final, confirmem juntos as resoluções. **Resposta pessoal.**

15. A escola de música em que Meire estuda oferece aulas de três instrumentos musicais: flauta, teclado e violão. Sabe-se que:

- 27 pessoas estudam flauta;
- 17 pessoas estudam flauta e violão;
- 32 pessoas estudam teclado;
- 25 pessoas estudam teclado e violão;
- 45 pessoas estudam violão;
- 16 pessoas estudam flauta, teclado e violão;
- 19 pessoas estudam flauta e teclado.

Quantas pessoas, no total, estudam nessa escola de música? **59 pessoas**

16. Um clube recreativo analisou os hábitos dos 1450 sócios com relação ao uso de suas instalações em certo mês. Foi constatado que, nesse mês, 930 sócios usaram a piscina, 310 usaram a piscina e a academia e 140 usaram apenas outras instalações. Quantos sócios desse clube usaram apenas a academia?

17. Doenças como poliomielite, sarampo e rubéola foram comuns no Brasil e no mundo. Atualmente, estão quase erradicadas no território nacional, graças à vacinação massiva da população brasileira. O Programa Nacional de Imunizações avança a cada ano, proporcionando a melhor qualidade de vida à população com a prevenção de doenças.

Fonte dos dados: BRASIL. Ministério da Saúde. **Vacinação**. Brasília, DF: MS, [2024]. Disponível em: <https://www.gov.br/saude/pt-br/vacinacao>. Acesso em: 26 jun. 2024.

Ciente da importância da vacinação, uma escola realizou uma pesquisa com todos os estudantes a fim de identificar se eles tinham recebido as vacinas Dupla Adulto (dT) e HPV. Observe uma tabela construída para resumir os dados coletados.

Estudantes da escola que receberam as vacinas

Vacina	Quantidade de estudantes
Apenas Dupla Adulto (dT)	98
Apenas HPV	67
Ambas as vacinas	115
Nenhuma dessas vacinas	33

Fonte: Dados fictícios.

PARA AMPLIAR

Acesse este [site](#) para mais informações sobre a importância da vacinação e sobre o Programa Nacional de Imunizações.

- BRASIL. Ministério da Saúde. **Vacinação**. Brasília, DF: MS, [2024]. Disponível em: <https://www.gov.br/saude/pt-br/vacinacao>. Acesso em: 26 jun. 2024.

De acordo com os dados apresentados, responda às questões.

- a) Represente os dados da tabela em um diagrama de Venn. Para isso, nomeie como A o conjunto dos estudantes que receberam a vacina Dupla Adulto (dT) e como B o conjunto dos estudantes que receberam a vacina HPV. **Resposta nas Orientações para o professor.**
- b) Quantos estudantes foram entrevistados nessa pesquisa? **313 estudantes**
- c) Quantos entrevistados receberam:
- a vacina Dupla Adulto (dT)? **213 estudantes**
 - a vacina HPV? **182 estudantes**
 - ambas as vacinas? **115 estudantes**
- d) Quantos estudantes receberam ao menos uma das vacinas? **280 estudantes**
- e) Para regularizar todos os estudantes em relação a essas duas vacinas, a escola pretende realizar uma campanha de vacinação. Quantas doses de vacina de cada tipo devem ser aplicadas nessa campanha? **100 vacinas Dupla Adulto (dT); 131 vacinas HPV**

18. Para uma reportagem, certa revista *on-line* realizou uma pesquisa com 100 pessoas sobre as plataformas de *streaming* que elas utilizam. Foi constatado que, dos entrevistados, 35 utilizam a plataforma A , 49 utilizam a plataforma B e 23 utilizam ambas as plataformas. Das pessoas entrevistadas, quantas não utilizam nenhuma dessas plataformas de *streaming*? **39 pessoas**

19. Observe a tabela a seguir e elabore um problema envolvendo operações com conjuntos. Em seguida, junte-se a um colega, e troquem o problema para que um resolva o do outro. Juntos, verifiquem se as respostas estão corretas.

Elaboração do estudante.

Domicílios brasileiros que tinham automóvel ou motocicleta, 2022

Veículo	Porcentual
Automóvel	49,8
Motocicleta	25,0
Automóvel e motocicleta	13,1

Fonte dos dados: INSTITUTO BRASILEIRO DE GEOGRAFIA E ESTATÍSTICA. **Pesquisa Nacional por Amostra de Domicílios Contínua**: características gerais dos domicílios e dos moradores 2022. Rio de Janeiro: IBGE, 2024. Disponível em: https://biblioteca.ibge.gov.br/visualizacao/livros/liv102004_informativo.pdf. Acesso em: 26 jun. 2024.

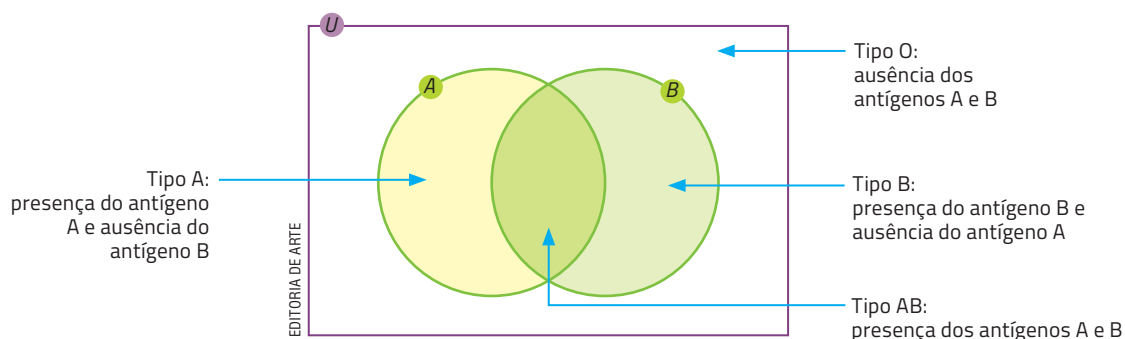
Transfusão sanguínea

Você sabe o que é transfusão sanguínea? Esse procedimento médico consiste em transferir o sangue, ou parte de seus componentes, de uma pessoa (doadora) para outra (receptora). É importante ressaltar que, anualmente no Brasil, milhares de pessoas precisam desse procedimento e, para isso, contam com a doação voluntária de sangue, que é a única maneira de obtê-lo, pois somente o organismo do ser humano é capaz de produzi-lo.

Em uma transfusão, um aspecto que deve ser considerado é a compatibilidade entre o sangue do receptor e o sangue do doador. Para isso, são analisados os tipos de antígeno presentes nos glóbulos vermelhos de cada um dos envolvidos. Esse teste determina em qual tipo sanguíneo – A, B, AB ou O –, pertencente ao sistema ABO, se enquadram o receptor e o doador.

Observe no diagrama a seguir a representação do sistema ABO em relação à presença de **antígenos** no sangue. Nesse esquema, o conjunto A e o conjunto B indicam os tipos sanguíneos que têm presença do antígeno A e do antígeno B, respectivamente.

Antígeno: é uma substância que, ao ser introduzida no receptor, provoca uma resposta imune.



Por exemplo, caso um indivíduo com sangue tipo A receba acidentalmente sangue tipo B, serão produzidos anticorpos contra o antígeno B, pois seu organismo não o reconhece. Isso pode obstruir vasos e artérias.

Simultaneamente à análise do sistema ABO, é necessário avaliar o fator Rh. Quando o sangue apresenta o antígeno Rh, dizemos que o sangue do indivíduo é Rh positivo (Rh+). Quando há ausência desse antígeno, dizemos que o sangue do indivíduo é Rh negativo (Rh-). Por exemplo, no caso de uma transfusão, haveria incompatibilidade entre um receptor de sangue Rh- e um doador de sangue Rh+, porque o organismo do receptor, que não tem o antígeno Rh, produziria anticorpos contra o antígeno Rh do doador.

Fonte dos dados: POTTER, Patricia A. *et al.* **Fundamentos de enfermagem.** Tradução: Mayza Ritomy Ide *et al.* 8. ed. Rio de Janeiro: Elsevier, 2013. p. 931.

Ao analisar as características do Sistema ABO e do fator RH, podemos identificar quem pode receber e quem pode doar sangue a um indivíduo com determinado tipo sanguíneo. Observe o exemplo ao lado direito da página para um indivíduo cujo tipo sanguíneo é A-.

	Doa para	Recebe de
A-	A+, A-, AB+ e AB-	A- e O-

PENSANDO NO ASSUNTO

1. Responda às questões a seguir. **Respostas pessoais.**
 - a) Você sabe qual é seu tipo sanguíneo, de acordo com o sistema ABO? E o fator Rh?
 - b) Em seu entendimento, qual é a importância de conhecermos nosso tipo sanguíneo e o das pessoas de nosso convívio? Pense no assunto e, se necessário, realize uma pesquisa.
 - c) No município ou na região em que você mora, é comum a realização de campanhas incentivando a doação de sangue? De que modo você acredita que essas campanhas impactam a sociedade? Qual é a importância delas?

2. Observe o diagrama que representa o sistema ABO, apresentado na página 24. Em relação à presença ou à ausência dos antígenos A e B nas hemácias, interprete os conjuntos a seguir.

$A - B$ $A \cap B$ $B - A$ $U - (A \cup B)$

Resposta nas **Orientações para o professor.**

3. Justifique as afirmativas a seguir.
 - a) Em uma transfusão sanguínea, um receptor AB⁻ é incompatível com um doador B⁺.
 - b) Em uma transfusão sanguínea, um doador A⁻ é compatível com um receptor A⁺.
4. Em relação ao sistema ABO e ao fator Rh, costuma ser chamado de **doador universal** o indivíduo que pode doar sangue àqueles de qualquer tipo sanguíneo. Já o **receptor universal** é o indivíduo que pode receber sangue de qualquer tipo sanguíneo.

Em grupos, investiguem quais tipos sanguíneos correspondem aos doadores e receptores universais. Para isso, resolvam os itens a seguir.

- a) Observem a página 24 e respondam: para quem o indivíduo A⁻ é doador? E de quem ele é receptor? **É doador para: A⁺, A⁻, AB⁺ e AB⁻. É receptor de: A⁻ e O⁻.**
- b) Identifiquem todos os possíveis tipos sanguíneos e, para cada um deles, construam um quadro indicando de quem ele recebe e para quem doa.
Resposta nas Orientações para o professor.
- c) Analisem os quadros que vocês construíram e respondam: quais tipos sanguíneos correspondem ao doador e ao receptor universal? Explique como vocês pensaram.

3. a) Resposta esperada: Apesar de o doador apresentar em suas hemácias o mesmo antígeno B do receptor, ele também apresenta em suas hemácias o antígeno Rh (Rh⁺), o que o torna incompatível com o receptor, que não tem o antígeno Rh (Rh⁻).
3. b) Resposta esperada: Como o doador apresenta o mesmo antígeno A do receptor e tem ausência de antígeno Rh (Rh⁻) em suas hemácias, ele é compatível com o receptor.

4. c) Resposta esperada: O doador universal corresponde ao tipo O⁻, pois ele pode doar sangue a todos os tipos sanguíneos; e o receptor universal corresponde ao tipo AB⁺, pois ele pode receber sangue de todos os tipos sanguíneos.

Não escreva no livro.

5. Nesta questão, será explorada a seguinte situação-problema. **Respostas pessoais.**

Como orientar um habitante do município em que você mora a respeito da doação de sangue?

Para isso, junte-se a dois colegas, e façam o que se pede em cada um dos itens.

- a) Investiguem, no município e na região em que moram, quais estabelecimentos de saúde recebem doação de sangue da comunidade.
- b) Nesses estabelecimentos, há informações sobre os estoques de sangue obtidos por doações? Caso essas informações estejam disponíveis, registrem-nas.
- c) Pesquisem quais tipos sanguíneos têm maior demanda nesses estabelecimentos.
- d) Em livros ou *sites* especializados, pesquisem informações sobre as etapas relacionadas à doação de sangue.
- e) Com base no que estudamos nesta seção e nas questões anteriores, elaborem uma peça publicitária com o objetivo de estimular a doação de sangue no município em que moram. Vocês podem optar por pôster, cartaz, vídeo, *podcast*, entre outros meios. É importante que essa peça publicitária contenha informações como:
 - características e objetivo da doação de sangue;
 - tipos sanguíneos de maior demanda para doação;
 - etapas da doação e pré-requisitos para ser um doador.

Lembrem-se de utilizar uma linguagem adequada, simples e objetiva, fazendo uso de recursos visuais para chamar a atenção e incentivar as pessoas. Para divulgar essa peça publicitária, pode ser utilizado o mural da escola ou mídias sociais, por exemplo.

DICA

Na peça publicitária, ressaltem que o ato de doar sangue é estritamente voluntário.

🎯 Conjunto dos números naturais (\mathbb{N}) e conjunto dos números inteiros (\mathbb{Z})

Há indícios de que a habilidade de contar seja uma atividade humana que remonta a milhares de anos, como pode ser sugerido em diversas pinturas rupestres encontradas em diferentes sítios arqueológicos.

Com o passar do tempo, o processo de contar foi desenvolvido para atender a situações de grandes contagens, como as de populações e de produção agrícola. Há registros, por exemplo, de um censo realizado na China, em 2238 a.C., para a contagem da população e das lavouras cultivadas.

Desde então, muitos anos se passaram, e o ser humano continua trabalhando com a habilidade de contagem. Em várias situações do nosso dia a dia, realizamos contagens, por exemplo, para determinar:

a quantidade de dias que faltam para nosso aniversário, a quantidade de pratos e talheres que devem ser colocados à mesa para atender a todos que vão participar de uma refeição, entre outras situações.

Os números que costumamos utilizar para realizar contagens, incluindo o zero, formam o que atualmente denominamos **conjunto dos números naturais**. Esse conjunto tem infinitos elementos e pode ser indicado da seguinte maneira.

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, \dots\}$$

PARA AMPLIAR

Assista a este vídeo para mais informações sobre o Museu do Homem Americano.

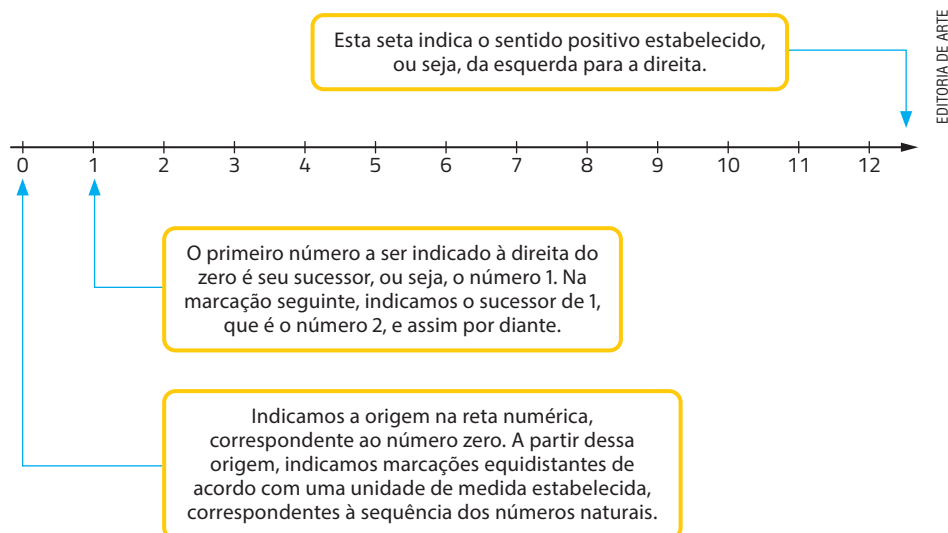
- CONHECENDO museus: ep. 44: Museu do Homem Americano. [S. l.: s. n.], 2015. 1 vídeo (26 min). Publicado pelo canal Conhecendo Museus. Disponível em: www.youtube.com/watch?v=Gi0fvWNz8WE. Acesso em: 26 jun. 2024.



ERICK GUEDES DE CARVALHO/SHUTTERSTOCK.COM

- Pintura rupestre no Parque Nacional Serra da Capivara, localizado na cidade de São Raimundo Nonato (PI). Fotografia de 2021. Essa pintura rupestre retrata, possivelmente, contagens de seres humanos e de animais.

Podemos representar os números naturais na reta numérica. Observe.



Note que todo número natural tem um sucessor e, com exceção do zero, também tem um antecessor natural. Além disso, a diferença entre um número natural qualquer e seu antecessor é igual a 1. Assim, o sucessor de qualquer número natural n é dado por $n + 1$, e o antecessor desse número, para $n > 0$, é dado por $n - 1$.

Podemos indicar o subconjunto de \mathbb{N} formado por todos os números naturais positivos da seguinte maneira.

$$\mathbb{N}^* = \{1, 2, 3, 4, 5, \dots\}$$

Dizemos que \mathbb{N} é um conjunto fechado para as operações de adição e multiplicação, ou seja, ao adicionar ou multiplicar quaisquer dois números naturais, o resultado também será um número natural. No entanto, isso não ocorre com a subtração; por exemplo, embora $8 - 3$ resulte no número natural 5, não obtemos em \mathbb{N} o resultado de $3 - 8$.

PARA PENSAR

Existe um número natural que seja menor que todos os outros números naturais? E um número natural que seja maior que qualquer um dos demais? Justifique.

Respostas esperadas: Sim, o número zero é o menor dos naturais. Não, pois, na sequência dos números naturais, é sempre possível obter o próximo número, adicionando 1 ao número anterior.

No decorrer da história, algumas situações, como aquelas relacionadas a débitos e dívidas em transações comerciais, cuja ideia pode ser associada ao fato de o conjunto dos números naturais não ser fechado para a operação de subtração, contribuíram para o surgimento do conceito de número negativo.

Dessa maneira, foi necessário ampliar o conjunto dos números naturais, acrescentando os números inteiros negativos $\{\dots, -4, -3, -2, -1\}$, para formar o **conjunto dos números inteiros**. Esse conjunto tem infinitos elementos e pode ser indicado da seguinte maneira.

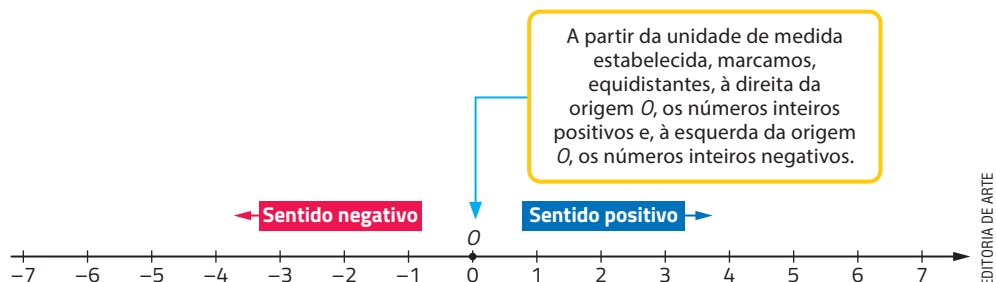
$$\mathbb{Z} = \{\dots, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, \dots\}$$

PARA PENSAR

Existe um número inteiro que seja menor que todos os outros números inteiros? E um número inteiro que seja maior que qualquer um dos demais? Justifique.

Respostas esperadas: Não, pois, na sequência dos números inteiros, é sempre possível obter o antecessor de um número, subtraindo 1 desse número. Não, pois, na sequência dos números inteiros, é sempre possível obter o sucessor de um número adicionando 1 a ele.

Acompanhe a representação dos números inteiros na reta numérica.



Note que todo número inteiro m tem um antecessor, dado por $m - 1$, e um sucessor, dado por $m + 1$.

Podemos destacar alguns subconjuntos de \mathbb{Z} .

- Conjunto dos números inteiros não nulos:

$$\mathbb{Z}^* = \{\dots, -4, -3, -2, -1, 1, 2, 3, 4, \dots\} = \mathbb{Z} - \{0\}.$$

- Conjunto dos números inteiros não negativos:

$$\mathbb{Z}_+ = \{0, 1, 2, 3, 4, \dots\} = \mathbb{N}.$$

- Conjunto dos números inteiros positivos:

$$\mathbb{Z}_+^* = \{1, 2, 3, 4, \dots\} = \mathbb{N}^*.$$

- Conjunto dos números inteiros não positivos:

$$\mathbb{Z}_- = \{\dots, -4, -3, -2, -1, 0\}.$$

- Conjunto dos números inteiros negativos:

$$\mathbb{Z}_-^* = \{\dots, -4, -3, -2, -1\}.$$

Como todo elemento de \mathbb{N} também é elemento de \mathbb{Z} , temos que $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$, ou seja, \mathbb{N} é subconjunto de \mathbb{Z} .

Conjunto dos números racionais (\mathbb{Q})

Estudamos que o conjunto \mathbb{N} é fechado exclusivamente para as operações de adição e de multiplicação. O conjunto \mathbb{Z} , por sua vez, é fechado para as operações de adição, subtração e multiplicação, porém não é fechado para a divisão; por exemplo, não obtemos em \mathbb{Z} o resultado de $5 : 2$.

Assim, foi necessário ampliar o conjunto dos números inteiros, de maneira a obter o **conjunto dos números racionais**, cujos elementos correspondem aos quocientes de dois números inteiros quaisquer, sendo o divisor diferente de zero. Esse conjunto tem infinitos elementos e pode ser indicado da seguinte maneira.

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{a}{b} \mid a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{Z} \text{ e } b \neq 0 \right\}$$

PARA PENSAR

Elabore uma situação-problema envolvendo o conjunto dos números naturais e o conjunto dos números inteiros. Dê preferência a algum contexto relacionado ao seu dia a dia. Depois, troque essa situação-problema com um colega para que ele a resolva, enquanto você resolve a que ele elaborou. Ao final, confirmem juntos as resoluções. *Elaboração do estudante.*

Há indícios de que a necessidade de números racionais positivos não inteiros foi identificada, inicialmente, em situações que envolviam medições. Nas construções de moradias, de grandes obras e nas demarcações de terras, muitas vezes a unidade de medida escolhida para fazer uma medição poderia “não caber” uma quantidade inteira de vezes naquilo que se queria medir.

Observe exemplos de números racionais.

a) $\frac{21}{6} = 3,5$

d) $-\frac{15}{3} = -5$

b) $\frac{8}{2} = 4$

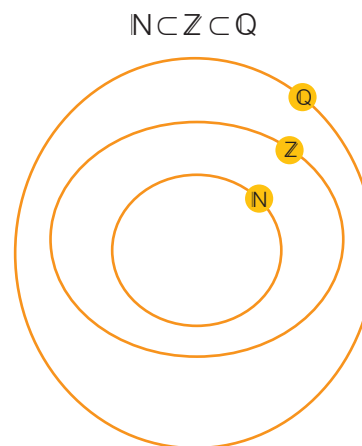
e) $\frac{17}{100} = 0,17$

c) $\frac{4}{9} = 0,444\dots$

Note que qualquer número inteiro pode ser escrito na forma $\frac{a}{b}$,

com $a \in \mathbb{Z}$, $b \in \mathbb{Z}$ e $b \neq 0$, como é o caso de $9 = \frac{9}{1}$, $4 = \frac{8}{2}$ e $-5 = -\frac{15}{3}$.

Assim, todo número inteiro é também racional e $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$, ou seja, \mathbb{Z} é subconjunto de \mathbb{Q} . O diagrama de Venn representado mostra a relação de inclusão desses conjuntos.



ILUSTRAÇÕES: EDITORIA DE ARTE

MATEMÁTICA NA HISTÓRIA

No Egito antigo, em algumas situações, como na medição de terras para o plantio, eram utilizadas cordas demarcadas com nós indicando certa unidade de comprimento. No entanto, nem sempre as unidades cabiam uma quantidade inteira de vezes nessas medições. Nesses casos, era necessário utilizar frações dessa unidade.



TIMQUO/
SHUTTERSTOCK.COM

► Corda de juta com 3 nós.

A seguir, estão indicadas algumas frações da maneira como os egípcios escreviam.

Notação atual	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{15}$
Representação egípcia				

Fonte dos dados: IFRAH, Georges. **História universal dos algarismos**: a inteligência dos homens contada pelos números e pelo cálculo. Tradução: Alberto Muñoz e Ana Beatriz Katinsky. Rio de Janeiro: Nova Fronteira, 1997. p. 348-349.

PARA PENSAR

No Egito antigo, de maneira geral, as frações não unitárias eram expressas por adições de frações unitárias. Mostre como a fração $\frac{3}{8}$ pode ser expressa pela soma de duas frações unitárias. Lembre-se de que frações unitárias são aquelas de numerador 1.

Uma resposta possível: $\frac{1}{8} + \frac{1}{4} = \frac{3}{8}$.

● Representação de número racional

Você provavelmente estudou, em anos anteriores, como podemos transformar um número racional na forma de fração para a forma de número decimal e como transformar um número racional na forma decimal para a forma de fração. Agora, vamos relembrar e ampliar esse estudo.

Transformação de um número racional na forma de fração para a forma de decimal

Uma maneira prática de obter a forma decimal de um número racional na forma de fração consiste em realizar a divisão indicada pela fração, ou seja, determinar o quociente entre o numerador e o denominador dela.

Exemplos:

a) $-\frac{9}{5} = -9 : 5 = -1,8$

Nessa divisão, em que o resto é zero, o quociente está na forma de um **número decimal exato**.

b) $\frac{11}{3} = 11 : 3 = 3,666... = 3,\overline{6}$

Para indicar a repetição de algarismos após a vírgula, colocamos um traço acima dos algarismos que se repetem.

Nessa divisão, em que não é possível obter resto igual a zero, o algarismo 6 se repete indefinidamente no quociente. Em casos como esse, dizemos que o quociente está na forma de **dízima periódica**.

PARA PENSAR

Mostre, por meio do algoritmo da divisão, por que o algarismo 6 se repete indefinidamente no quociente de $11 : 3$.

Resposta pessoal.

Outra maneira consiste em determinar uma fração decimal equivalente para, em seguida, realizar a divisão indicada.

Exemplos:

a) $\frac{3}{2} = \frac{15}{10} = 1,5$

b) $\frac{17}{25} = \frac{68}{100} = 0,68$

Resposta esperada: As frações equivalentes são frações decimais (com denominadores 10, 100 etc.), o que facilita o cálculo da divisão.

PARA PENSAR

Em seu entendimento, por que foram escolhidas essas frações equivalentes nos exemplos?

Transformação de um número racional na forma de decimal para a forma de fração

Acompanhe, inicialmente, os exemplos em que números racionais na forma de decimal exato são transformados na forma de fração.

Exemplos:

a) $0,8 = \frac{8}{10} = \frac{4}{5}$

b) $2,48 = \frac{248}{100} = \frac{62}{25}$

Também podemos transformar uma dízima periódica em uma fração, ou seja, obter uma **fração geratriz**. Acompanhe, nos casos a seguir, um modo de determinar a fração geratriz de uma dízima periódica.

DICA

Observe que há dois tipos possíveis de representação decimal para os números racionais: a finita ou a infinita periódica.

Exemplos:

a) $0,\overline{2} = 0,222\dots$
 $x = 0,222\dots$ ← Representamos $0,222\dots$ por x .
 $10x = 2,222\dots$ ← Multiplicamos cada membro da equação por 10.
 $10x = 2 + \underbrace{0,222\dots}_x$ ← Decompomos $2,222\dots$ em $2 + 0,222\dots$
 $10x = 2 + x$ ← Como $0,222\dots = x$, realizamos a substituição.
 $9x = 2$ ← Subtraímos x em cada membro da equação.
 $x = \frac{2}{9}$ ← Dividimos por 9 cada membro da equação $9x = 2$.
 $0,\overline{2} = \frac{2}{9}$ ← A fração geratriz de $0,\overline{2}$ é $\frac{2}{9}$.

Resposta esperada:
 Para se obter, no membro da direita, um número racional cuja parte decimal corresponda apenas a algarismos do período da dízima periódica.

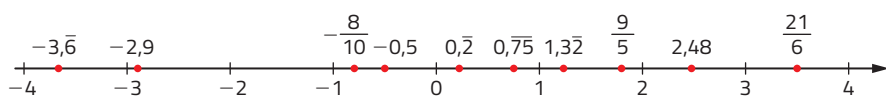
PARA PENSAR

Explique por que em uma das etapas da obtenção da fração geratriz de $0,\overline{2}$ e de $1,3\overline{2}$ os membros da igualdade são multiplicados por 10, enquanto na obtenção da fração geratriz de $0,\overline{75}$ os membros da igualdade são multiplicados por 100.

b) $0,\overline{75} = 0,7575\dots$
 $x = 0,7575\dots$
 $100x = 75,7575\dots$
 $100x = 75 + \underbrace{0,7575\dots}_x$
 $100x = 75 + x$
 $99x = 75$
 $x = \frac{75}{99} \Rightarrow 0,\overline{75} = \frac{75}{99}$

c) $1,3\overline{2} = 1,3222\dots$
 $x = 1,3222\dots$
 $10x = 13,222\dots$
 $10x = 13 + \underbrace{0,222\dots}_{\frac{2}{9}}$
 $10x = 13 + \frac{2}{9}$
 $10x = \frac{119}{9}$
 $x = \frac{119}{90} \Rightarrow 1,3\overline{2} = \frac{119}{90}$

Observe alguns números racionais representados na reta numérica.



EDITORIA DE ARTE

Atividades

Não escreva no livro.

21. a) $A = \{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$

21. b) $B = \{-1, 0, 1, 2, 3\}$

21. c) $A \cup B = \{-1, 0, 1, 2, 3, 4, 6, 12\}$

21. d) $A \cap B = \{1, 2, 3\}$

20. Copie os itens a seguir e substitua cada $///$ pelo símbolo \in ou \notin .

a) $2,5 /// \mathbb{Z} \notin$

c) $0 /// \mathbb{Z} \in$

e) $54 /// \mathbb{N} \in$

g) $9 /// \mathbb{Q} \in$

b) $-3 /// \mathbb{N} \notin$

d) $\frac{31}{3} /// \mathbb{Q} \in$

f) $-5,8\overline{3} /// \mathbb{Z} \notin$

h) $-7,6 /// \mathbb{Q} \in$

21. Considere $A = \{x \in \mathbb{N} \mid x \text{ é divisor de } 12\}$ e $B = \{y \in \mathbb{Z} \mid -1 \leq y < 4\}$ e determine os elementos de cada conjunto a seguir.

a) A

b) B

c) $A \cup B$

d) $A \cap B$

22. Escreva cada número racional a seguir na forma de número decimal.

a) $\frac{7}{9}$ $0,\overline{7}$

b) $\frac{26}{5}$ $5,2$

c) $\frac{83}{90}$ $0,9\overline{2}$

d) $\frac{17}{250}$ $0,068$

23. Escreva cada número racional a seguir na forma de fração irredutível.

a) $0,65$ $\frac{13}{20}$

b) $8,024$ $\frac{1003}{125}$

c) $2,\overline{7}$ $\frac{25}{9}$

d) $3,9\overline{5}$ $\frac{178}{45}$

26. a) $\frac{1}{3} + \frac{1}{2} = \frac{5}{6}$ 26. b) $\frac{1}{2} + \frac{1}{15} = \frac{17}{30}$ 26. c) $\frac{1}{10} + \frac{1}{3} = \frac{13}{30}$

27. • Resposta esperada: Não, o comprimento do cano, por exemplo, é um dado desnecessário para a resolução desta atividade.

24. Desenhe um diagrama para representar os conjuntos \mathbb{N} e \mathbb{Z} . Depois, com a cor de sua preferência, destaque a parte correspondente a $\mathbb{Z} - \mathbb{N}$. Quais números pertencem ao conjunto correspondente a essa parte destacada?

Resposta nas **Orientações para o professor**.

25. Reúna-se a um colega para resolver os itens a seguir. **Respostas pessoais.**

- a) Escolham dois números racionais x e y , com $x < y$. Depois, determinem um número racional z que esteja entre x e y , ou seja, $x < z < y$.
- b) Agora, entre os números racionais z e y que vocês indicaram no item anterior, determinem um número racional w , ou seja, $z < w < y$. Repita essa operação mais duas vezes com os números seguintes.
- c) No entendimento de vocês, sempre será possível obter um número racional que esteja entre dois números racionais quaisquer? Escrevam um breve texto argumentando suas escolhas.
- d) Para verificar a proposição do item anterior, considerem dois números racionais a e b quaisquer, com $a < b$, e pensem em uma estratégia para obter um número racional c que esteja entre eles, ou seja, $a < c < b$. Para auxiliar, vocês podem representar esses números na reta numérica.

26. Na página 29, estudamos algumas frações na escrita do Egito antigo. Nos itens a seguir, estão indicadas, nessa escrita, frações não unitárias expressas pela soma de frações unitárias. Em cada item, determine, em notação atual, a adição e a fração não unitária representadas.



27. Marcelo precisa comprar um cano com 2,3 m de comprimento e cuja medida do diâmetro é indicada por $\frac{3}{4}$ ", ou seja, três quartos de polegada. Sabe-se que 1" corresponde a aproximadamente 2,54 cm. Podemos afirmar que a medida do diâmetro desse cano, em centímetro, está entre: **alternativa c**

- a) 0,75 e 1 d) 2 e 2,5
b) 1 e 1,5 e) 2,5 e 3
c) 1,5 e 2

28. a) Algumas respostas possíveis: 1; 3; 5; 7; 9; 11.

28. c) $B = \{x \mid x = 2n, \text{ com } n \in \mathbb{N}\}$

28. d) Resposta esperada: Nenhum elemento, pois $A \cap B = \emptyset$, uma vez que não há número que seja simultaneamente par e ímpar.

- Todos os dados informados no enunciado desta atividade foram necessários para resolvê-la? Comente com um colega.

28. Flávia definiu o seguinte conjunto numérico: $A = \{x \mid x = 2n + 1, \text{ com } n \in \mathbb{N}\}$.

- a) Escreva cinco elementos de A .
- b) A qual dos itens a seguir corresponde o conjunto A ? **II**
- Conjunto dos números naturais quadrados perfeitos.
 - Conjunto dos números naturais ímpares.
 - Conjunto dos números naturais primos.
- c) Da mesma maneira que Flávia, utilize notação matemática para representar o conjunto B dos números naturais pares.
- d) Que elemento pertence simultaneamente aos conjuntos A e B ? Justifique.

29. Você possivelmente já estudou a paridade dos números naturais; por exemplo, um número natural é necessariamente par ou ímpar. Vamos estudar propriedades relacionadas a esses números. Para isso, junte-se a dois colegas, e calculem as potências indicadas a seguir.

29. b)

número par:

342² e 2778²;

número ímpar:

1655² e 81²

1 ²	2 ²	3 ²	4 ²	5 ²	6 ²
7 ²	8 ²	9 ²	10 ²	11 ²	12 ²

- a) Comparem a base de cada potência com o resultado correspondente. Que regularidades, em relação à paridade desses números, vocês podem identificar? **Resposta pessoal.**
- b) De acordo com as regularidades que vocês identificaram no item a e sem realizar cálculos, classifiquem os resultados das potências a seguir em número par ou ímpar.

342²

1655²

2778²

81²



- Agora, utilizando calculadora, verifiquem se a classificação feita por vocês está correta. **Resposta pessoal.**
- c) Escrevam **conjecturas** para expressar as regularidades identificadas. **Resposta nas Orientações para o professor.**

• **Conjecturas:** afirmações que se supõem verdadeiras, mas que não foram provadas como válidas ou não.

29. 1² = 1; 2² = 4; 3² = 9; 4² = 16; 5² = 25; 6² = 36; 7² = 49; 8² = 64; 9² = 81; 10² = 100; 11² = 121; 12² = 144

• Números racionais e algumas aplicações

Compreender as características e propriedades dos números racionais é fundamental para a interpretação e a análise crítica de situações envolvendo diferentes áreas do conhecimento. A seguir, estudaremos alguns temas em que podemos perceber isso.

Densidade demográfica

Densidade demográfica é um indicador que representa a distribuição de habitantes em certa região, auxiliando na avaliação de possíveis riscos humanos e ambientais e contribuindo para o planejamento urbano. Esse cálculo corresponde à razão entre a quantidade de habitantes e a extensão territorial de uma região e costuma ser expresso em habitantes por quilômetro quadrado (hab./km²). Assim:

$$\text{densidade demográfica} = \frac{\text{quantidade de habitantes}}{\text{extensão territorial}}$$

Observe, a seguir, como podemos calcular a densidade demográfica de Taboão da Serra (SP), o município com a maior densidade demográfica do Brasil.

Resposta esperada: Não, pois a densidade demográfica é uma medida que também está relacionada com a extensão territorial do país.

PARA PENSAR

- É possível afirmar que o país com a menor população do mundo também é o de menor densidade demográfica? Justifique.
- Considere um município que, de um ano para outro, permaneceu com a mesma extensão territorial. Explique como a densidade demográfica desse município pode ter aumentado nesse mesmo período.

Resposta esperada: A população desse município aumentou nesse período.



► Ruas do município de Taboão da Serra (SP). Fotografia de 2024.

Fonte dos dados: INSTITUTO BRASILEIRO DE GEOGRAFIA E ESTATÍSTICA. **Taboão da Serra**. Rio de Janeiro: IBGE, [2022]. Localizável em: *menu* Panorama. Disponível em: <https://cidades.ibge.gov.br/brasil/sp/tabao-da-serra/panorama>. Acesso em: 26 jun. 2024.

DICA

É importante considerar que o IMC não apresenta uma avaliação nutricional da pessoa. Essa informação somente pode ser obtida com auxílio de um profissional de saúde.

Índice de Massa Corporal (IMC)

O Índice de Massa Corporal (IMC) tem como objetivo avaliar, de maneira simples e rápida, o estado corporal de uma pessoa com relação à massa e à altura dela. No entanto, essa avaliação não é muito precisa, o que torna necessário consultar profissionais especializados, como um nutricionista ou um nutrólogo, para que ela seja realizada de maneira mais adequada.

Esse índice é calculado por meio da fórmula a seguir, que corresponde à razão entre a massa (m), em quilograma, e o quadrado da altura (a), em metro quadrado.

$$\text{IMC} = \frac{m}{a^2}$$

Para a avaliação de pessoas adultas, o resultado do cálculo do IMC deve ser comparado com a seguinte classificação, definida pela Organização Mundial da Saúde (OMS).

BAIXO PESO	PESO ADEQUADO	SOBREPESO	OBESIDADE
Menor que 18,5 kg/m ²	Maior ou igual a 18,5 e menor que 25 kg/m ²	Maior ou igual a 25 e menor que 30 kg/m ²	Maior ou igual a 30 kg/m ²

Fonte dos dados: BIBLIOTECA VIRTUAL EM SAÚDE DA ATENÇÃO PRIMÁRIA À SAÚDE. **Cálculo do índice de massa corporal.** São Paulo: BVS APS, [2024]. Disponível em: <https://aps.bvs.br/apps/calculadoras/?page=6>. Acesso em: 26 jun. 2024.

PARA PENSAR

O que uma pessoa adulta, cujo IMC é classificado como “sobrepeso”, tem de fazer para que esse índice seja ajustado de maneira a ser classificado como “peso adequado”? Justifique.

Resposta esperada: Por ser adulta, consideramos que a altura da pessoa permanecerá aproximadamente a mesma; então, para esse ajuste, ela deve reduzir a massa corporal.

Considerando, por exemplo, uma pessoa adulta com 68,5 kg de massa e 1,70 m de altura, temos:

$$\text{IMC} = \frac{68,5}{(1,70)^2} = \frac{68,5}{2,89} \approx 23,7$$

Portanto, o IMC dessa pessoa é de aproximadamente 23,7 kg/m², que pode ser classificado como “peso adequado”, pois $18,5 < 23,7 < 25$.

NO MUNDO

DO TRABALHO Nutricionista e nutrólogo

O nutricionista e o nutrólogo lidam diretamente com cuidados, doenças e distúrbios relacionados à alimentação, mas têm atuações distintas e complementares. Entre as funções do nutricionista, está a avaliação nutricional do corpo do paciente, incluindo a indicação de mudanças na dieta alimentar. Já o médico nutrólogo atua na prevenção, no diagnóstico e no tratamento de doenças e distúrbios alimentares.

Acesse este [site](#) para ler um texto com mais informações sobre as atividades do nutricionista e do nutrólogo.

- O QUE faz um nutrólogo?: tire suas dúvidas sobre esse profissional. *In*: VIDA SAUDÁVEL. [S. l.], 21 jun. 2023. Disponível em: <https://vidasaudavel.einstein.br/o-que-faz-um-nutrologo/>. Acesso em: 26 jun. 2024.

Taxa de mortalidade infantil

A taxa de mortalidade infantil é um importante indicador social, pois é a partir dela que podemos investigar e interpretar algumas das condições de nascimento e de vida de uma população em determinado ano, possibilitando, por exemplo, aprimorar e corrigir problemas relacionados à saúde pública. O cálculo da taxa de mortalidade infantil em determinado ano e região pode ser realizado da seguinte maneira:

$$\frac{\text{quantidade de óbitos de menores de 1 ano de idade}}{\text{quantidade de nascidos vivos}} \cdot 1000$$

A taxa de mortalidade infantil é classificada de acordo com o resultado deste cálculo: baixa se menor que 20, média se de 20 até 49 e alta se maior ou igual a 50.

Fonte dos dados: BRASIL. Ministério da Saúde. Rede Interagencial de Informações para a Saúde. **Indicadores de mortalidade**. Brasília, DF: MS: Ripsa, [2000]. Disponível em: <http://tabnet.datasus.gov.br/cgi/idb2000/fqc01.htm>. Acesso em: 26 jun. 2024.

Por exemplo, em 2020, o município de Uberaba (MG) registrou 3 861 nascidos vivos e 40 óbitos de menores de 1 ano de idade. Nesse caso, a taxa de mortalidade infantil é dada por:

$$\frac{40}{3861} \cdot 1000 \approx 0,01036 \cdot 1000 = 10,36$$

Portanto, a taxa de mortalidade infantil nesse município, em 2020, foi de aproximadamente 10,36 óbitos de menores de 1 ano de idade por 1 000 nascidos vivos, que pode ser classificada como baixa, pois $10,36 < 20$.

Fonte dos dados: INSTITUTO BRASILEIRO DE GEOGRAFIA E ESTATÍSTICA. **Uberaba**: taxa de mortalidade infantil. Rio de Janeiro: IBGE, [2020]. Disponível em: <https://cidades.ibge.gov.br/brasil/mg/uberaba/pesquisa/39/30279?ano=2020>. Acesso em: 26 jun. 2024.

PARA PENSAR

O que pode representar uma baixa taxa de mortalidade infantil? E uma alta taxa de mortalidade infantil?

Respostas esperadas: Representa poucos óbitos de menores de 1 ano de idade em relação à quantidade de nascidos vivos, o que pode indicar boas condições na saúde pública de uma região em certo ano. Representa muitos óbitos de menores de 1 ano de idade em relação à quantidade de nascidos vivos, o que pode indicar condições precárias na saúde pública de uma região em certo ano.

Atividades

Não escreva no livro.

- 30.** Para prevenir doenças e melhorar a qualidade de vida, Sueli procurou o auxílio de profissionais da saúde para fazer um acompanhamento nutricional e realizar atividades físicas supervisionadas. Observe a ficha de Sueli com as anotações do acompanhamento.

Com base nesse período de acompanhamento físico e nutricional, resolva as questões.

- Como pode ser classificado o IMC de Sueli em fevereiro? Justifique. **obesidade, pois $31,6 > 30$**
- Ao todo, de quantos kilogramas foi a redução de massa de Sueli? **19,1 kg**
- Um dos objetivos da reeducação alimentar e do treino propostos era ajustar o IMC de Sueli para ser classificado como “peso adequado”. É possível afirmar que esse objetivo foi alcançado no período apresentado? Justifique. **Resposta esperada: Sim, pois, para ser classificado como “peso adequado”, o IMC deve estar entre $18,5 \text{ kg/m}^2$ e 25 kg/m^2 , e o IMC de Sueli, no mês de novembro, foi de aproximadamente $24,4 \text{ kg/m}^2$.**

ACOMPANHAMENTO NUTRICIONAL

Nome: Sueli Oliveira

Idade: 35 anos

Altura: 1,63 m

Acompanhamento

Mês	Massa (kg)
Fevereiro	83,9
Novembro	64,8

ORACICART

31. b) Respostas possíveis: Sim, ao compararmos, por exemplo, a maior taxa de mortalidade calculada com a menor taxa de mortalidade calculada há uma diferença de 4,6 óbitos de menores de 1 ano de idade por 1 000 nascidos vivos, valor significativo quando expresso em números absolutos. Não, ao compararmos, por exemplo, a taxa de mortalidade do estado do Ceará com a de Goiás, a diferença é de apenas 0,2 óbito de menores de 1 ano de idade por 1 000 nascidos vivos.



d) Junte-se a um colega, e leiam o trecho de texto a seguir.

Ana não gosta do próprio corpo. Ela é magra, inclusive está abaixo do peso ideal para a altura que tem. Mas, quando chega perto do espelho, a única imagem que consegue ver é de uma mulher obesa. Por isso, quando come, sente culpa. Ana também não se sente à vontade quando veste uma roupa. Acredita que nenhuma peça lhe cai bem. Apesar de sentir tanta angústia, não consegue falar com os amigos ou com a família sobre o assunto.

DISMORFIAS corporais e transtornos alimentares são doenças graves que precisam de atenção. In: BLOG DA SAÚDE. [S. l.], 24 jun. 2016. Disponível em: <https://www.amrigs.org.br/dismorfias-corporais-e-transtornos-alimentares-sao-doencas-graves-que-precisam-de-atencao/>. Acesso em: 26 jun. 2024.

Apesar de Ana ser uma personagem fictícia, casos semelhantes ao dela são cada vez mais comuns. Realizem uma breve pesquisa sobre distúrbios nutricionais e transtornos alimentares. Depois, escolham um dos temas pesquisados e elaborem um texto trazendo informações sobre as principais causas, sintomas e possíveis tratamentos de saúde. **Resposta pessoal.**

31. Observe a tabela a seguir.

Registros de nascidos vivos e óbitos de menores de 1 ano de idade em alguns estados brasileiros, 2020

Quantidade Estado	Nascidos vivos	Óbitos
Amazonas	75 635	1 051
Ceará	121 904	1 417
Goiás	92 768	1 054
Santa Catarina	97 916	913
Rio de Janeiro	199 124	2 508

Fonte dos dados: INSTITUTO BRASILEIRO DE GEOGRAFIA E ESTATÍSTICA. **Brasil:** taxa de mortalidade infantil. Rio de Janeiro: IBGE, 2020. Localizável em: Selecionar local: Estados: Ano 2020. Disponível em: <https://cidades.ibge.gov.br/brasil/rj/pesquisa/39/30279?tipo=ranking&indicador=30279&ano=2020>. Acesso em: 23 ago. 2024.



a) Utilizando uma calculadora, calcule a taxa de mortalidade infantil aproximada dos estados apresentados. **Amazonas:** 13,9; **Ceará:** 11,6; **Goiás:** 11,4; **Santa Catarina:** 9,3; **Rio de Janeiro:** 12,6

b) As diferenças entre os valores calculados no item **a** são significativas? Comente.



c) Com um colega, investiguem quais fatores podem estar atrelados às diferenças nas taxas de mortalidade infantil apresentadas nos estados brasileiros. Depois, numa roda de conversa com toda a turma, discutam essa questão. **Resposta pessoal.**



d) Formem grupos de três ou quatro integrantes e pesquisem qual é a taxa de mortalidade do município em que moram. Em seguida, discutam sobre ações que podem contribuir para a redução da taxa de mortalidade infantil, como: investir no atendimento pré-natal, ampliar a rede de saneamento básico etc. Por fim, compartilhem com a comunidade escolar e local as informações pesquisadas e discutidas. **Resposta pessoal.**

32. O Programa de Etiquetagem Veicular (PBE-V) é uma iniciativa do Inmetro que, entre outras funções, classifica os veículos produzidos no Brasil de acordo com seu consumo de combustível.

Certa empresa compara a média de consumo semestral de cada veículo da frota com a média disponibilizada pelo PBE-V. Caso a média do veículo seja menor que 85% da média apresentada pelo PBE-V, o veículo é encaminhado para revisão. Observe os dados referentes aos veículos de certo modelo dessa frota, cuja média de consumo indicada no PBE-V foi de 8,5 km/L.

Dados semestrais de veículos do modelo A

Veículo	Distância percorrida (km)	Consumo de combustível (L)
1	1 400	156
2	1 750	232
3	1 522	179
4	2 300	330
5	2 150	230

Fonte: Dados fictícios.

a) Calcule a média de consumo aproximada, em km/L, de cada um dos veículos indicados na tabela.

b) Qual desses veículos a empresa deve encaminhar à revisão? **veículo 4**

32. a) veículo 1: 8,97 km/L; veículo 2: 7,5 km/L; veículo 3: 8,5 km/L; veículo 4: 6,97 km/L; veículo 5: 9,3 km/L

- 33.** O Índice de Desenvolvimento da Educação Básica (Ideb) foi criado em 2007 pelo Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira (Inep) e formulado para medir a qualidade do aprendizado nacional e estabelecer metas para a melhoria do ensino. De maneira simplificada, para cada escola, o Ideb (I) pode ser obtido por meio da fórmula indicada a seguir.

$$I = t \cdot \frac{M + P}{2}$$

Nessa fórmula, t corresponde à taxa de aprovação dos alunos da unidade de ensino, e M e P correspondem, respectivamente, às notas médias de Matemática e de Língua Portuguesa nos exames oficiais do Ministério da Educação (MEC).

Fontes dos dados: BRASIL. Ministério da Educação. **Ideb**: apresentação. Brasília, DF: MEC, c2018. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/conheca-o-ideb>.

BRASIL. Ministério da Educação. Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira. **Nota informativa do Ideb 2023**. Brasília, DF: MEC, Inep: 2023. p. 6. Disponível em: https://download.inep.gov.br/ideb/nota_informativa_ideb_2023.pdf. Acessos em: 23 ago. 2024.

Observe os dados de certa escola para três níveis de ensino no ano de 2023 e responda às questões a seguir.

Índices educacionais por nível de ensino, 2023


Nível de Ensino	Ensino Fundamental – Anos iniciais	Ensino Fundamental – Anos finais	Ensino Médio
Taxa de aprovação	0,98	0,96	0,90
Média em Matemática	6,2	4,9	4,5
Média em Língua Portuguesa	5,4	6	3,7

Fonte: Dados fictícios.

- a)** Que nível de ensino teve a maior taxa de aprovação nessa escola? **Ensino Fundamental – Anos iniciais**
- b)** Calcule o Ideb dessa escola para cada um dos níveis de ensino apresentados.

33. b) Ensino Fundamental – Anos iniciais: 5,684; Ensino Fundamental – Anos finais: 5,232; Ensino Médio: 3,69

34. a) valores aproximados: Norte: 4,51 hab./km²; Nordeste: 35,21 hab./km²; Sudeste: 91,76 hab./km²; Sul: 51,91 hab./km²; Centro-Oeste: 10,14 hab./km²

-  **Converse com o professor e os colegas sobre a importância do Ideb para o desenvolvimento de políticas públicas na área da educação.**


Resposta pessoal.

- 34.** Observe a tabela.


População e extensão territorial das regiões do Brasil, 2022

Região	População estimada (hab.)	Extensão territorial (km ²)
Norte	17 354 884	3 850 593,105
Nordeste	54 658 515	1 552 175,42
Sudeste	84 840 113	924 558,341
Sul	29 937 706	576 736,822
Centro-Oeste	16 289 538	1 606 354,086

Fonte dos dados: INSTITUTO BRASILEIRO DE GEOGRAFIA E ESTATÍSTICA. **Tabela 9514**: população residente, por sexo, idade e forma de declaração de idade. Rio de Janeiro: IBGE: Sidra, 2023. Disponível em: <https://sidra.ibge.gov.br/tabela/9514#resultado>. Acesso em: 26 jun. 2024.

-  **a)** Calcule a densidade demográfica de cada região do Brasil, em 2022.
- b)** Você concorda com a afirmativa a seguir? Justifique sua resposta, com base na tabela e nos cálculos realizados no item **a**.

A distribuição da população brasileira, entre as cinco regiões do país, ocorre de maneira desigual.

-  **c)** O conhecimento sobre a densidade demográfica de uma região permite entender a dinâmica populacional e realizar um planejamento mais eficaz para enfrentar diferentes desafios.

Junte-se a um colega, e pesquisem aspectos, positivos e negativos, que podem decorrer da alta e da baixa densidade demográfica de uma região e os tipos de ação ou de planejamento que podem ser realizados para lidar com os pontos levantados. Em seguida, investiguem a densidade demográfica do município em que moram e façam uma análise comparativa com base na pesquisa que realizaram anteriormente. Ao final, elaborem um relatório com essas informações e compartilhem-no com a comunidade local. **Resposta pessoal.**

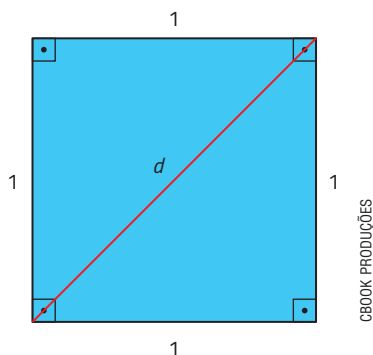
34. b) Resposta esperada: Sim, pois a densidade demográfica varia consideravelmente de uma região para outra do Brasil.

Conjunto dos números irracionais (II)

Estudamos que há indícios de que o desenvolvimento da ideia de número racional teve início a partir de situações práticas envolvendo medições. Ao longo da história da humanidade, acreditou-se, em muitos períodos, que os números racionais eram suficientes para expressar diferentes situações observadas na natureza ou desenvolvidas pelo ser humano.

Apesar de essa crença ter prevalecido em alguns momentos, sabemos que, por meio da história, há cerca de 2 500 anos um grupo de estudiosos na Grécia antiga descobriu a existência de outro tipo de número, o que, na época, causou uma crise nos fundamentos da Matemática até então desenvolvidos.

Os responsáveis por essa descoberta foram os integrantes da chamada Escola Pitagórica. Eles estudaram uma situação que não podia ser expressa por um número racional, no caso, o valor da medida da diagonal de um quadrado de lado unitário. Para determinar essa medida, eles utilizaram o teorema de Pitágoras.



DICA

Lembre-se: de acordo com o teorema de Pitágoras, em um triângulo retângulo qualquer, o quadrado da medida a da hipotenusa é igual à soma dos quadrados das medidas b e c dos catetos.

$$a^2 = b^2 + c^2$$

$$d^2 = 1^2 + 1^2$$

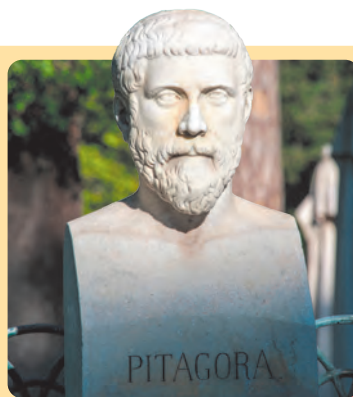
$$d^2 = 1 + 1$$

$$d^2 = 2$$

MATEMÁTICA NA HISTÓRIA

Pitágoras (c. 585 a.C.-c. 500 a.C.) nasceu na ilha de Samos, na Grécia. Em Crotona, na Itália, ele fundou a Escola Pitagórica, um centro de estudos de Filosofia, Matemática e Ciências Naturais. Uma das descobertas mais famosas desenvolvidas nessa escola e creditadas a Pitágoras é o chamado teorema de Pitágoras, que corresponde a uma relação entre os lados de um triângulo retângulo: o quadrado da medida da hipotenusa é igual à soma dos quadrados das medidas dos catetos.

Fonte dos dados: EVES, Howard. **Introdução à história da matemática**. Tradução: Hygino Hugueros Domingues. 3. ed. Campinas: Editora da Unicamp, 2004. p. 94-96.



JOLANTA WOLCICKA/SHUTTERSTOCK.COM

► Escultura do busto de Pitágoras, feita em cerca de 1620, localizada nos jardins de Villa Borghese, Roma (Itália). Fotografia de 2020.

THAWORNUNIRAK/SHUTTERSTOCK.COM

Assim, concluiu-se que a medida d correspondia a um número positivo cujo quadrado era igual a 2. Foi um grande problema para os pitagóricos constatar que esse número, que expressa a medida da diagonal de um quadrado de lado 1, não era racional. Em notação atual, esse número é indicado por $\sqrt{2}$.

Podemos notar que $\sqrt{2}$ é um número entre 1 e 2, pois $\frac{1^2}{1} < 2 < \frac{2^2}{4}$. De modo análogo, utilizamos uma calculadora para verificar outras aproximações para $\sqrt{2}$.

- $1,4 < \sqrt{2} < 1,5$, pois $\frac{(1,4)^2}{1,96} < 2 < \frac{(1,5)^2}{2,25}$.
- $1,41 < \sqrt{2} < 1,42$, pois $\frac{(1,41)^2}{1,9881} < 2 < \frac{(1,42)^2}{2,0164}$.
- $1,414 < \sqrt{2} < 1,415$, pois $\frac{(1,414)^2}{1,999396} < 2 < \frac{(1,415)^2}{2,002225}$.

PARA PENSAR

Utilizando o processo apresentado, e com o auxílio de uma calculadora, determine o número racional, com quatro casas decimais, cujo valor mais se aproxima de $\sqrt{2}$. **1,4142**

Ao continuarmos esse processo, notamos que, por mais que aumentemos o número de casas decimais das aproximações para $\sqrt{2}$, o valor ao quadrado não será igual a 2. Observamos, também, que parece não haver periodicidade na representação decimal. Ou seja, é possível que raiz de 2 não seja um número racional por não ter representação decimal finita ou infinita e periódica (não ser uma dízima periódica). De fato, podemos demonstrar isso. Observe.

Suponhamos que $\sqrt{2}$ seja racional, então utilizaremos argumentações válidas para chegar a uma contradição, o que demonstrará que esse número não é racional. Acompanhe.

Supor que $\sqrt{2}$ seja racional implica que esse número pode ser expresso como uma fração irredutível $\frac{a}{b}$, com $a \in \mathbb{Z}$, $b \in \mathbb{Z}$ e $b \neq 0$. Dessa maneira, temos:

$$\begin{aligned}\sqrt{2} &= \frac{a}{b} \\ (\sqrt{2})^2 &= \left(\frac{a}{b}\right)^2 \\ 2 &= \frac{a^2}{b^2} \\ 2b^2 &= a^2\end{aligned}$$

Como $2b^2 = a^2$, temos que a^2 é um número par e, por consequência, a também é par.

Assim, podemos escrever o número a da seguinte maneira: $a = 2m$, com $m \in \mathbb{Z}$. Substituindo $a = 2m$ na igualdade obtida anteriormente, temos:

$$\begin{aligned}2b^2 &= (2m)^2 \\ b^2 &= \frac{4m^2}{2} \\ b^2 &= 2m^2\end{aligned}$$

Com base no resultado $b^2 = 2m^2$, temos que b^2 é par ou, ainda, que b também é par. Como a e b são números pares, 2 é um fator comum do numerador e do denominador da fração $\frac{a}{b}$. Logo, $\frac{a}{b}$ não é uma fração irredutível, pois pode ser simplificada por 2. Entretanto, esse resultado é uma contradição, pois supomos inicialmente que essa fração era irredutível.

Portanto, podemos concluir que $\sqrt{2}$ não é um número racional, pois não pode ser expressa como uma fração irredutível $\frac{a}{b}$, com $a \in \mathbb{Z}$, $b \in \mathbb{Z}$ e $b \neq 0$, ou seja, $\sqrt{2}$ é um número irracional.

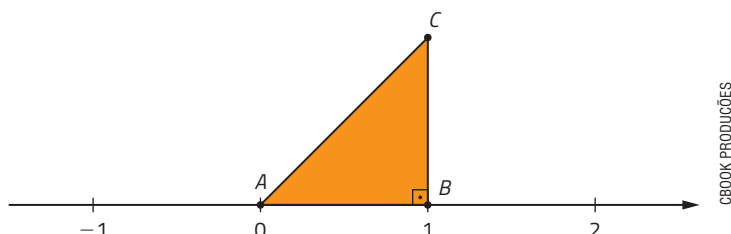
DICA

Nessa demonstração, foram utilizadas as seguintes propriedades, que também podem ser demonstradas.

- Ao multiplicar qualquer número natural por 2, o produto é par.
- Se o quadrado de um número é par, então esse número também é par.

Agora, observe como podemos representar geometricamente $\sqrt{2}$ na reta numérica.

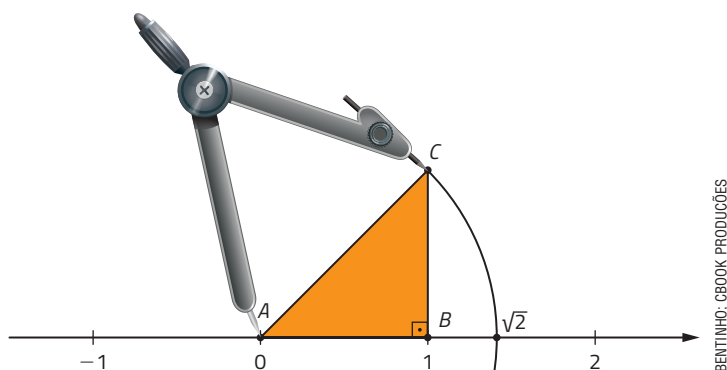
- Representamos um triângulo retângulo isósceles ABC , com catetos medindo 1 u, vértices A e B sobre a origem e abscissa 1 da reta numérica, respectivamente.



- Temos que a medida da hipotenusa \overline{AC} é dada por:

$$(AC)^2 = (AB)^2 + (BC)^2 \Rightarrow (AC)^2 = 1^2 + 1^2 \Rightarrow AC = \sqrt{2}$$

Assim, com a abertura de um compasso igual a \overline{AC} e ponta-seca na origem da reta numérica, traçamos um arco que cruza essa reta em um ponto correspondente a $\sqrt{2}$.



Os números que não podem ser expressos na forma $\frac{a}{b}$, com $a \in \mathbb{Z}$, $b \in \mathbb{Z}$ e $b \neq 0$, formam o **conjunto dos números irracionais**, que pode ser indicado por \mathbb{I} .

Ao serem representados na forma de número decimal, os números irracionais têm infinitas casas decimais sem, porém, um período. De maneira simplificada, podemos dizer que um número irracional é um número cuja representação decimal não é uma dízima periódica nem um decimal exato. Observe, por exemplo, as quinze primeiras casas decimais de $\sqrt{2}$ obtidas em um programa de computador.

$$\sqrt{2} \approx 1,414213562373095$$

Um número é irracional se, e somente se, tem representação decimal infinita e não periódica.

Observe outros exemplos de números irracionais.

a) $\sqrt{3}$ b) $-\sqrt[5]{6}$ c) $1 + \sqrt[3]{4}$ d) $\sqrt{2} - 3$ e) $\sqrt[3]{5}$ f) $\frac{\sqrt{10}}{2}$

É possível demonstrar que a raiz quadrada de todo número natural que não é um quadrado perfeito é um número irracional.

Acompanhe algumas propriedades relacionadas a números irracionais.

- Sejam $a \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{N}$ e $n > 1$; se $\sqrt[n]{a}$ não é um número inteiro, então $\sqrt[n]{a}$ é um número irracional.

Exemplo:

$\sqrt[3]{6}$ não é um número inteiro, pois $1^3 < 6 < 2^3$, ou seja, $1 < \sqrt[3]{6} < 2$. Portanto, $\sqrt[3]{6}$ é um número irracional.

- A soma ou a diferença de um número racional com um número irracional é um número irracional.

Exemplos:

- a) $\sqrt{3} + 2$ é um número irracional, pois $\sqrt{3}$ é um número irracional e 2 é um número racional.
- b) $\sqrt[4]{5} - 0,5$ é um número irracional, pois $\sqrt[4]{5}$ é um número irracional e 0,5 é um número racional.
- O produto ou o quociente de um número racional não nulo por um número irracional também é um número irracional.

Exemplos:

- a) $\sqrt{7} \cdot 4 = 4\sqrt{7}$ é um número irracional, pois $\sqrt{7}$ é um número irracional e 4 é um número racional.
- b) $-5 : \sqrt{2}$ é um número irracional, pois -5 é um número racional e $\sqrt{2}$ é um número irracional.

O conjunto \mathbb{I} não é fechado para nenhuma das quatro operações básicas, isto é, a soma, a diferença, o produto e o quociente de dois números irracionais podem não ser irracionais.

Resposta esperada: Temos que $2\sqrt{16}$ não é irracional, pois $2\sqrt{16} = 2 \cdot 4 = 8$. Já $\sqrt[3]{10}$ é irracional, pois $2 < \sqrt[3]{10} < 3$.

PARA PENSAR

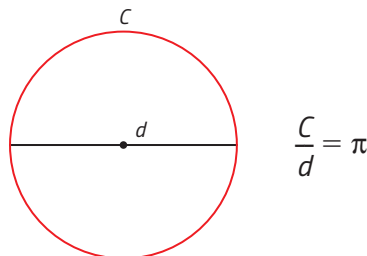
- Consulte as propriedades apresentadas e verifique se $2\sqrt{16}$ e $\sqrt{10}$ são números irracionais. Justifique sua resposta.
- Pense em algumas situações em que a soma, a diferença, o produto e o quociente de dois números irracionais não resultam em um número irracional.

Resposta possível: Soma: $(2 + \sqrt{2}) + (2 - \sqrt{2})$; diferença: $(\pi + 1) - \pi$; produto: $\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}$; quociente: $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}}$.



• O número irracional π

O número π (lê-se: pi), que corresponde à razão entre o comprimento C e o diâmetro d de uma circunferência qualquer, também é um número irracional, ou seja, $\pi \in \mathbb{I}$.



Observe as vinte primeiras casas decimais de π , obtidas em um programa de computador.

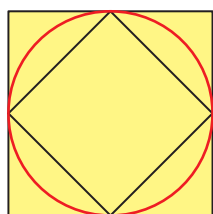
$$\pi \approx 3,14159265358979323846$$

Como esse número é irracional, sua expressão decimal é infinita e não periódica.

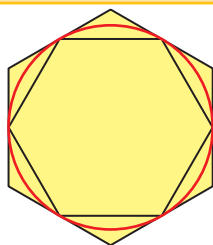
Embora a fração $\frac{C}{d}$ corresponda à razão entre o comprimento e o diâmetro de uma circunferência qualquer, o número π não é racional. Isso ocorre porque, em uma circunferência, o comprimento e o diâmetro são medidas incomensuráveis entre si, ou seja, estabelecida uma unidade de medida de comprimento qualquer, se a medida d corresponder a um número racional, a medida C corresponderá a um número irracional, e vice-versa.

MATEMÁTICA NA HISTÓRIA

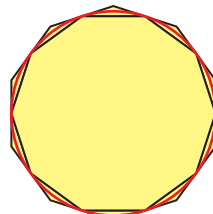
No decorrer da história da humanidade, várias aproximações de π foram calculadas. Uma das mais notáveis foi a realizada por Arquimedes (287 a.C.-c. 212 a.C.). Para fazer a aproximação, ele utilizou o perímetro de polígonos regulares inscritos e circunscritos em uma mesma circunferência, concluindo que π é um número entre $\frac{223}{71}$ e $\frac{22}{7}$.



► Quadrados inscrito e circunscrito a uma circunferência.



► Hexágonos regulares inscrito e circunscrito a uma circunferência.



► Decágonos regulares inscrito e circunscrito a uma circunferência.

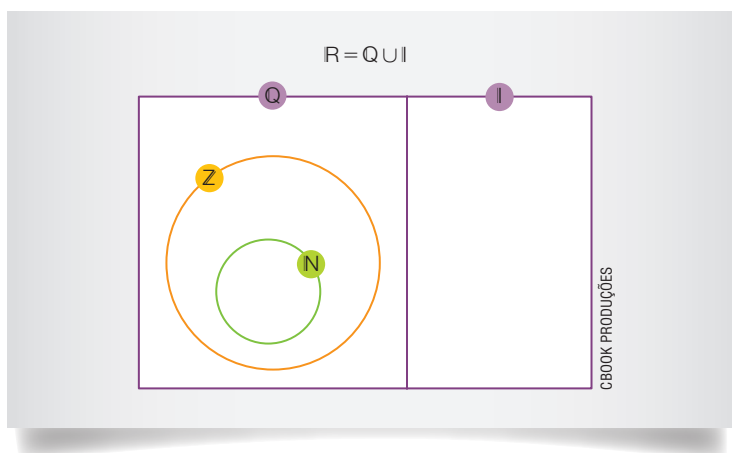
ILUSTRAÇÕES: OBOOK PRODUÇÕES

O método utilizado por Arquimedes para estimar o valor de π é conhecido atualmente como **método da exaustão**. Nesse método, quanto maior a quantidade de lados dos polígonos, mais próximos são os perímetros deles e o da circunferência.

Fonte dos dados: EVES, Howard. **Introdução à história da matemática**. Tradução: Hygino Hugueros Domingues. 3. ed. Campinas: Editora da Unicamp, 2004. p. 141-142.

Conjunto dos números reais (\mathbb{R})

Quando reunimos o conjunto dos números racionais (\mathbb{Q}) com o conjunto dos números irracionais (\mathbb{I}), obtemos o conjunto dos números reais, indicado por \mathbb{R} . Portanto, todo número natural, inteiro, racional ou irracional é um número real.



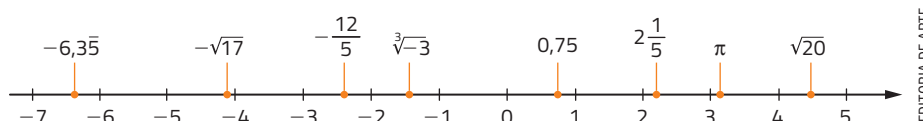
PARA PENSAR

Existe algum número real que não é racional nem irracional? Justifique.

Resposta esperada: Não, pois $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{I}$, ou seja, se o elemento pertence a \mathbb{R} , então esse elemento pertence a \mathbb{Q} ou a \mathbb{I} .

Podemos associar cada número real a um único ponto da reta numérica e, reciprocamente, cada ponto da reta numérica a um único número real. Dessa maneira, podemos dizer que os pontos da reta numérica e os números reais estão em uma correspondência um a um, ou seja, uma **correspondência biunívoca**. Assim, podemos denominar a reta numérica de **reta real**.

Observe a reta real com alguns números indicados.



Módulo de um número real

Observe, a seguir, como podemos definir o módulo de um número real.

O **módulo** ou **valor absoluto** de um número real x , indicado por $|x|$, é dado por:

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{se } x \geq 0 \\ -x, & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

Observe alguns exemplos.

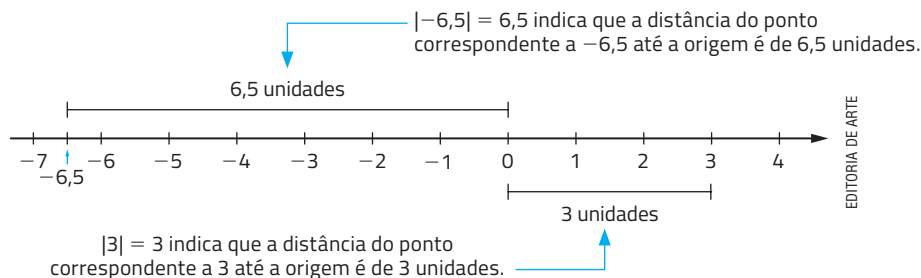
- | | |
|--|----------------------------|
| a) $ 6 = 6$ | d) $ 3,8 = 3,8$ |
| b) $ -4,5 = -(-4,5) = 4,5$ | e) $ -10 = -(-10) = 10$ |
| c) $ \sqrt{11} = -(-\sqrt{11}) = \sqrt{11}$ | f) $ \pi = -(-\pi) = \pi$ |

PARA PENSAR

Existe algum número real cujo módulo seja um número negativo? Justifique.

Resposta esperada: Não, pois, se o número real é não negativo (positivo ou zero), seu módulo também será não negativo e, se o número real for negativo, seu módulo será positivo.

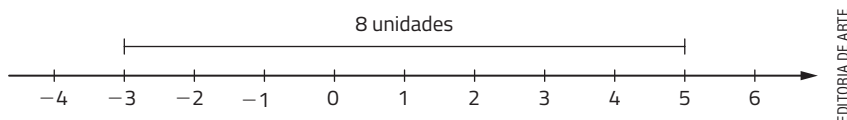
Geometricamente, podemos interpretar o módulo de um número real x como a distância do ponto correspondente a x até a origem na reta real. Acompanhe os exemplos.



Essa mesma ideia pode ser utilizada para interpretar a distância entre quaisquer dois pontos na reta real.

Sejam $a \in \mathbb{R}$ e $b \in \mathbb{R}$, temos que a distância na reta real entre os pontos correspondentes a a e b é dada por $|a - b|$.

Por exemplo, a distância na reta real entre os pontos correspondentes a -3 e 5 pode ser obtida calculando $|-3 - 5| = |-8| = 8$ ou $|5 - (-3)| = |8| = 8$.



PARA PENSAR

Explique como pode ser interpretado geometricamente o módulo $|-7 - (-4)|$.

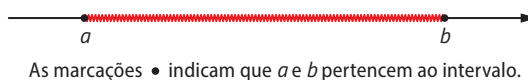
Resposta esperada: A distância na reta real entre os pontos correspondentes a -7 e -4 é de 3 unidades.

Intervalo real

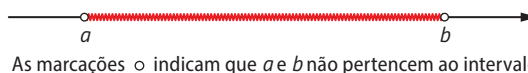
Podemos definir determinados subconjuntos de \mathbb{R} utilizando desigualdades. Esses subconjuntos são chamados de **intervalos reais**.

Considerando os números reais a e b , tal que $a < b$, podemos definir um intervalo real de diferentes maneiras. Observe.

- Intervalo real fechado: $[a, b]$ ou $\{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$



- Intervalo real aberto: $]a, b[$ ou $\{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$



- Intervalo real fechado à esquerda e aberto à direita: $[a, b[$ ou $\{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}$



- Intervalo real aberto à esquerda e fechado à direita: $]a, b]$ ou $\{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}$



Também podemos definir **intervalos reais ilimitados**. Neles, são utilizados os símbolos $-\infty$ (lê-se: menos infinito) e $+\infty$ (lê-se: mais infinito).

- Intervalo real ilimitado fechado à direita: $]-\infty, a]$ ou $\{x \in \mathbb{R} \mid x \leq a\}$



- Intervalo real ilimitado aberto à direita: $]-\infty, a[$ ou $\{x \in \mathbb{R} \mid x < a\}$



- Intervalo real ilimitado fechado à esquerda: $[a, +\infty[$ ou $\{x \in \mathbb{R} \mid x \geq a\}$



- Intervalo real ilimitado aberto à esquerda: $]a, +\infty[$ ou $\{x \in \mathbb{R} \mid x > a\}$



ATIVIDADES RESOLVIDAS

R6. Quantos números inteiros pertencem ao intervalo real $[-3, 7[$?

Resolução

Como o intervalo real é fechado à esquerda e aberto à direita, o número -3 pertence ao intervalo, e o 7 não pertence ao intervalo. Assim, pertencem a esse intervalo real os seguintes números inteiros: $-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5$ e 6 . Portanto, 10 números inteiros pertencem ao intervalo real $[-3, 7[$.

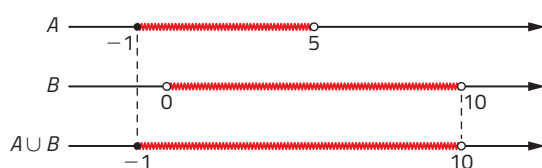
R7. Para cada item, determine $A \cup B$ e $A \cap B$.

a) $A = [-1, 5[$ e $B =]0, 10[$

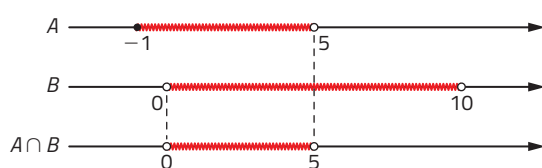
b) $A =]-9, 8[$ e $B = [-4, +\infty[$

Resolução

a) Representando os intervalos na reta real, temos:

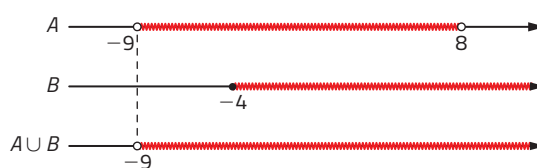


Portanto, $A \cup B = [-1, 10[$.

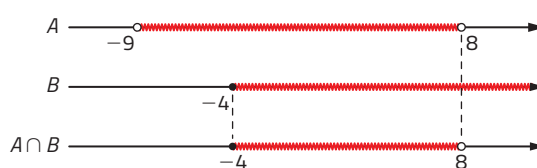


Portanto, $A \cap B =]0, 5[$.

b) Representando os intervalos na reta real, temos:



Portanto, $A \cup B =]-9, +\infty[$.



Portanto, $A \cap B = [-4, 8[$.

ATIVIDADES

Não escreva no livro.

35. números racionais: **b, c e e**; números irracionais: **a, d e f**

35. Classifique cada número indicado a seguir em racional ou irracional.

- a) $\sqrt{5}$ c) $\sqrt[3]{-8}$ e) $\frac{2}{7}$
 b) $2\frac{1}{2}$ d) $\sqrt{11}$ f) $\frac{\pi}{3}$

36. No caderno, represente em um único diagrama os conjuntos numéricos \mathbb{N} , \mathbb{Z} , \mathbb{Q} , \mathbb{I} e \mathbb{R} . Depois, registre nesse diagrama os números do quadro a seguir. **Respostas nas Orientações para o professor.**

-15 5 $3\bar{5}$ $-\frac{1}{3}$ $\sqrt{6}$
 $-\sqrt[3]{4}$ 0 -1 10,4

37. Mostre que a altura h de um triângulo equilátero com 2 cm de lado tem como medida, em centímetro, um número irracional. Lembre-se de que a altura relativa à base de um triângulo equilátero divide essa base em dois segmentos de reta congruentes.

38. Herão de Alexandria foi um matemático de grande destaque que viveu provavelmente entre 150 a.C. e 250 a.C. Na obra **A métrica**, Herão apresenta um método para obter um valor aproximado da raiz quadrada de um número natural. Nesse método, dado um número natural n , que não seja quadrado perfeito, tem-se:

$$\text{se } n = a \cdot b, \text{ então } \sqrt{n} \approx \frac{a + b}{2}.$$

Fonte dos dados: EVES, Howard. **Introdução à história da matemática**. Tradução: Hygino Hugueros Domingues. 3. ed. Campinas: Editora da Unicamp, 2004. p. 205.

É importante considerar que um número natural n pode ser decomposto de diferentes maneiras, o que possibilita determinar distintas aproximações para a raiz quadrada de n pelo método apresentado.

a) Utilize o método de Herão para calcular a aproximação de $\sqrt{24}$, considerando:

- $24 = 1 \cdot 24$; $\sqrt{24} \approx 5,5$ ▪ $24 = 3 \cdot 8$;
 ▪ $24 = 2 \cdot 12$; $\sqrt{24} \approx 7$ ▪ $24 = 4 \cdot 6$.
 $\sqrt{24} \approx 5$

b) Determine uma aproximação de $\sqrt{24}$ com a calculadora e compare com as aproximações obtidas pelo método de Herão.

38. b) $\sqrt{24} \approx 4,898979$. Resposta esperada: Sendo $n = a \cdot b$ um número natural que não seja quadrado perfeito, quanto mais próximos entre si são a e b , melhor é a aproximação de \sqrt{n} pelo método de Herão.

37. Resposta nas **Orientações para o professor.**

39. c) Resposta esperada: Porque a espiral é composta de contornos de triângulos retângulos, e a medida da hipotenusa de cada um desses triângulos pode ser obtida utilizando o teorema de Pitágoras.

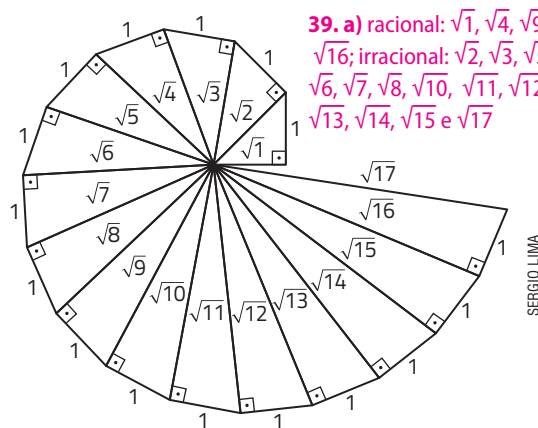
Elabore uma conjectura para expressar em que situações o método de Herão resulta em melhores aproximações.



c) Junte-se a um colega, e calculem com o método de Herão uma aproximação para as raízes indicadas a seguir. Depois, comparem suas aproximações com aquelas obtidas pelos colegas. **Respostas pessoais.**

- $\sqrt{18}$ ▪ $\sqrt{6}$ ▪ $\sqrt{90}$ ▪ $\sqrt{30}$

39. Acredita-se que o matemático e filósofo grego Teodoro de Cirene (465 a.C.-398 a.C.) representou geometricamente a existência de diversos números irracionais por meio da construção de uma figura que ficou conhecida como Espiral de Teodoro ou Espiral Pitagórica. Observe.



39. a) racional: $\sqrt{1}$, $\sqrt{4}$, $\sqrt{9}$ e $\sqrt{16}$; irracional: $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt{6}$, $\sqrt{7}$, $\sqrt{8}$, $\sqrt{10}$, $\sqrt{11}$, $\sqrt{12}$, $\sqrt{13}$, $\sqrt{14}$, $\sqrt{15}$ e $\sqrt{17}$

DICA

Na Espiral de Teodoro, cada raiz indica a medida da hipotenusa de um triângulo retângulo e a medida de um cateto do triângulo retângulo seguinte.

- a) Classifique cada raiz representada na Espiral de Teodoro em racional ou irracional.
 b) Calcule, com o método de Herão, uma aproximação para as raízes que você indicou como irracionais no item a. **Respostas pessoais.**
 c) Em seu entendimento, por que a Espiral de Teodoro também ficou conhecida como Espiral Pitagórica?

40. Represente na reta real os intervalos indicados a seguir. **Respostas nas Orientações para o professor.**

- a) $[-1, 4[$ c) $\{x \in \mathbb{R} \mid 2 < x < 8\}$
 b) $\{x \in \mathbb{R} \mid x \geq -5\}$ d) $] -\infty, 10]$

42. a) $A \cup B =]-20, 25[$; $A \cap B =]-10, 15[$

42. b) $A \cup B = \mathbb{R}$; $A \cap B =]5, 10]$

42. c) $A \cup B =]-\infty, 100[$; $A \cap B =]-35, 0]$

44. $-4,\overline{78} < -\sqrt[3]{35} < -\frac{11}{5} < -0,\overline{25} < \frac{\pi}{3} < \frac{7}{3} < 5,24\overline{1} < 3\sqrt{5} < 2\sqrt{19}$

47. b) Respostas possíveis: $|-7 - (-19)| = 12$; $|-19 - (-7)| = 12$; $|5 - (-7)| = 12$; $|-7 - 5| = 12$.

41. Escreva o intervalo real correspondente a cada representação a seguir.

a) $]-\infty, -7[$ ou $\{x \in \mathbb{R} | x < -7\}$

b) $[-3, \sqrt{45}]$ ou $\{x \in \mathbb{R} | -3 \leq x \leq \sqrt{45}\}$

c) $\left[\frac{2}{3}, +\infty\right[$ ou $\left\{x \in \mathbb{R} \mid x \geq \frac{2}{3}\right\}$

d) $]-\pi, 0]$ ou $\{x \in \mathbb{R} | -\pi < x \leq 0\}$

42. Em cada item a seguir, determine $A \cup B$ e $A \cap B$.

a) $A =]-20, 15[$ e $B =]-10, 25[$

b) $A =]5, +\infty[$ e $B =]-\infty, 10]$

c) $A =]-\infty, 0]$ e $B =]-35, 100[$

d) $A = \mathbb{R}$ e $B =]-150, 300[$
 $A \cup B = \mathbb{R}$; $A \cap B =]-150, 300[$

43. Calcule.

a) $-3 \cdot |-10|$ -30

b) $|-4| \cdot |-7|$ 28

c) $|6 - 18|$ 12

d) $||-10| - 15|$ 5

e) $|3 - 8| - |-13 + 5|$ -3

f) $|2 \cdot (-8)|$ 16

44. Escreva em ordem crescente os números reais indicados no quadro.

$\frac{7}{3}$	$3\sqrt{5}$	$-4,\overline{78}$	$-\frac{11}{5}$	$-\sqrt[3]{35}$
$\frac{\pi}{3}$	$5,24\overline{1}$	$2\sqrt{19}$	$-0,\overline{25}$	

45. A qual desses intervalos reais pertence a solução da equação $4x + 10 = 2$? alternativa b

a) $]-2, 1]$

b) $]-4, 0[$

c) $]-\infty, -2[$

d) $[-1, +\infty[$

46. A questão a seguir constou em um vestibular do qual Jonas participou. Na divulgação do gabarito oficial, indicou-se a alternativa c como correta, o que levou Jonas a cogitar entrar com um recurso pedindo o cancelamento da questão. Escreva um argumento que possa ser utilizado por ele a fim de que tal recurso seja deferido pela organização da prova.

Resposta pessoal.

48. b) Resposta esperada: Temos que $\frac{223}{71} \approx 3,140845$, $\pi \approx 3,141593$ e $\frac{22}{7} \approx 3,142857$. Como3,140845 < 3,141593 < 3,142857, a conclusão de Arquimedes está correta, ou seja, $\frac{223}{71} < \pi < \frac{22}{7}$.

Na reta real, a distância entre os pontos correspondentes aos números não nulos x e y , com $x < y$, é o dobro da distância entre os pontos correspondentes aos números y e z . Nessas condições, podemos afirmar que $|x - y|$ é igual a:

a) $x - z$;

c) $2 \cdot (y - z)$;

b) $y - z$;

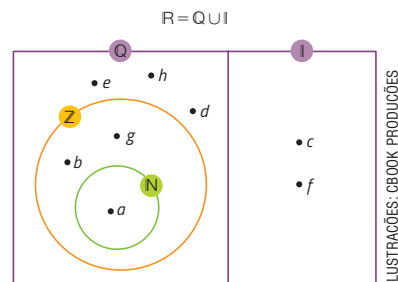
d) 2 unidades.

47. Utilizando módulo, Taís calculou na reta real a distância entre os pontos correspondentes aos números -7 e x . Sabendo que o resultado encontrado foi 12 unidades, faça o que se pede em cada item. a) Respostas possíveis: -19 ou 5 .a) Responda: qual é esse número real x ?

b) Represente como Taís pode ter calculado essa distância.

48. Na página 42, estudamos que o grego Arquimedes utilizou a relação entre o comprimento de uma circunferência de diâmetro unitário e os perímetros de polígonos regulares inscritos e circunscritos a ela para concluir que $\frac{223}{71} < \pi < \frac{22}{7}$.a) A conclusão de Arquimedes estabelece o número π compreendido entre dois números racionais ou irracionais? entre dois números racionaisb) Considere a aproximação de π apresentada na página 42 e, com o auxílio de uma calculadora, mostre que a conclusão de Arquimedes está correta.

49. Observe o diagrama representado a seguir, em que cada letra minúscula representa um número real.



Com base nesse diagrama, elabore e escreva um problema relacionado a conjuntos numéricos. Em seguida, junte-se a um colega, e troquem o problema para que um resolva o do outro. Juntos, verifiquem se as respostas estão corretas. Elaboração do estudante.

VOCÊ CONECTADO



Representando um retângulo áureo

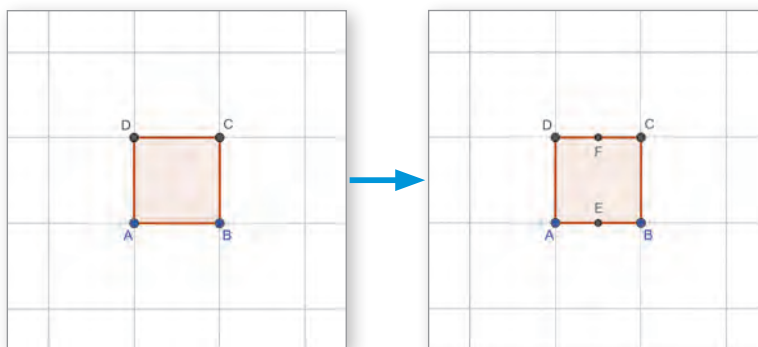
O número ϕ (lê-se: fi) corresponde a uma constante matemática que, assim como o número π , também é um número irracional. Observe, a seguir, a representação decimal de ϕ com suas 10 primeiras casas decimais.



$$\phi \approx 1,6180339887$$

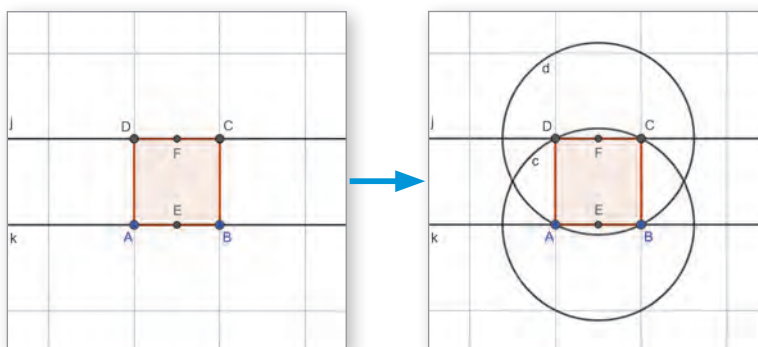
Esse número irracional também é conhecido como **razão áurea** (ou proporção áurea), pois corresponde à razão entre a medida do lado maior e a do lado menor da figura chamada **retângulo áureo**.

Observe como podemos construir um retângulo áureo utilizando o *software* de geometria dinâmica **GeoGebra**, disponível para acesso *on-line* e *download* em www.geogebra.org/ (acesso em: 26 jun. 2024).



- A** Utilizando a opção  (Polígono regular), construímos o quadrado $ABCD$ de lado unitário. Em seguida, com a opção  (Ponto médio ou centro) selecionada, obtemos E e F , pontos médios de \overline{AB} e \overline{CD} , respectivamente.

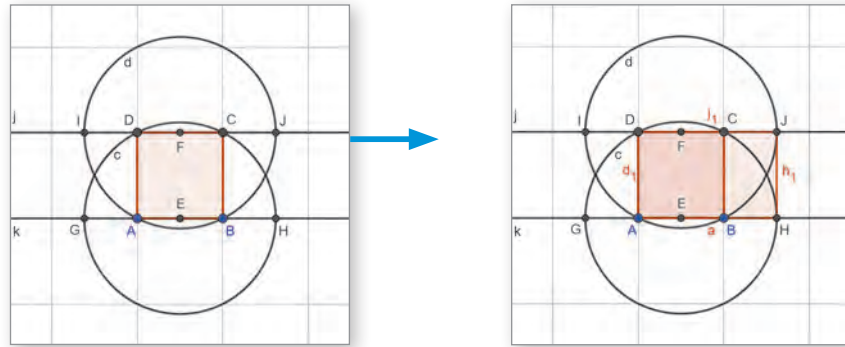


- B** Com a opção  (Reta) selecionada, construímos \overleftrightarrow{CD} e \overleftrightarrow{AB} . Em seguida, selecionamos a opção  (Círculo dados centro e um de seus pontos) para construir a circunferência de centro E , que passa por C e D , e a circunferência de centro F , que passa por A e B .




IMAGENS: REPRODUÇÃO/GEOTREBA

- C** Com a opção  (Interseção de dois objetos) selecionada, marcamos os pontos G e H , interseção da circunferência de centro E e \overleftrightarrow{AB} , e os pontos I e J , interseção da circunferência de centro F e \overleftrightarrow{CD} . Por fim, com a opção  (Polígono) selecionada, construímos o retângulo áureo $AHJD$.



IMAGENS: REPRODUÇÃO/GEOTREBA

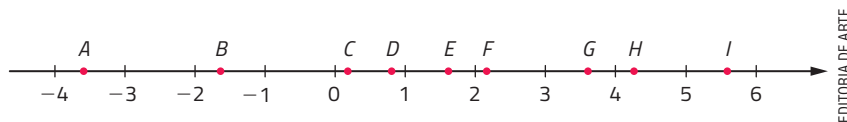
**DICA**

Observe que, ao clicar na circunferência de centro E e em \overleftrightarrow{AB} utilizando a opção  (Interseção de dois objetos), automaticamente são marcados dois pontos, que correspondem aos pontos de interseção dessas figuras (pontos G e H). O mesmo ocorre com a circunferência de centro F e \overleftrightarrow{CD} (pontos I e J). Assim, dependendo da ordem em que os elementos são selecionados, os pontos G e H (e I e J) podem ficar trocados em relação à imagem apresentada. Nesse caso, o retângulo áureo será $AGID$.




MÃOS À OBRA

Não escreva no livro.

1. Na reta real representada a seguir, qual dos pontos indicados por uma letra mais se aproxima ao número ϕ ? **ponto E**



EDITORIA DE ARTE

2. No **GeoGebra**, construa o retângulo áureo conforme apresentado. Depois, com a opção  (Distância, comprimento ou perímetro) selecionada, meça os lados \overline{AH} e \overline{AD} desse retângulo.
- a) Calcule a razão $\frac{AH}{AD}$ e obtenha uma aproximação do número ϕ . $\phi \approx 1,62$
- b) Com a opção  (Mover) selecionada, movimente o ponto B e obtenha reduções e ampliações do retângulo áureo. Com as medidas dos lados das figuras obtidas, calcule outras aproximações para ϕ e compare cada uma delas. **Resposta pessoal.**
3. O número ϕ também pode ser expresso da seguinte maneira: $\frac{1 + \sqrt{5}}{2}$.
-  Com base nessa representação e utilizando uma calculadora, obtenha uma aproximação de ϕ e compare com as aproximações obtidas na atividade anterior. **Resposta pessoal.**
4. Junte-se a um colega, e investiguem a relação entre a razão áurea (ou proporção áurea) e a sequência de Fibonacci. **Resposta esperada:** Os quocientes obtidos na divisão de um termo da sequência (a partir do segundo) pelo imediatamente anterior são aproximações do número ϕ e, conforme aumentam-se os valores utilizados na divisão, mais próximo de ϕ é o quociente obtido.

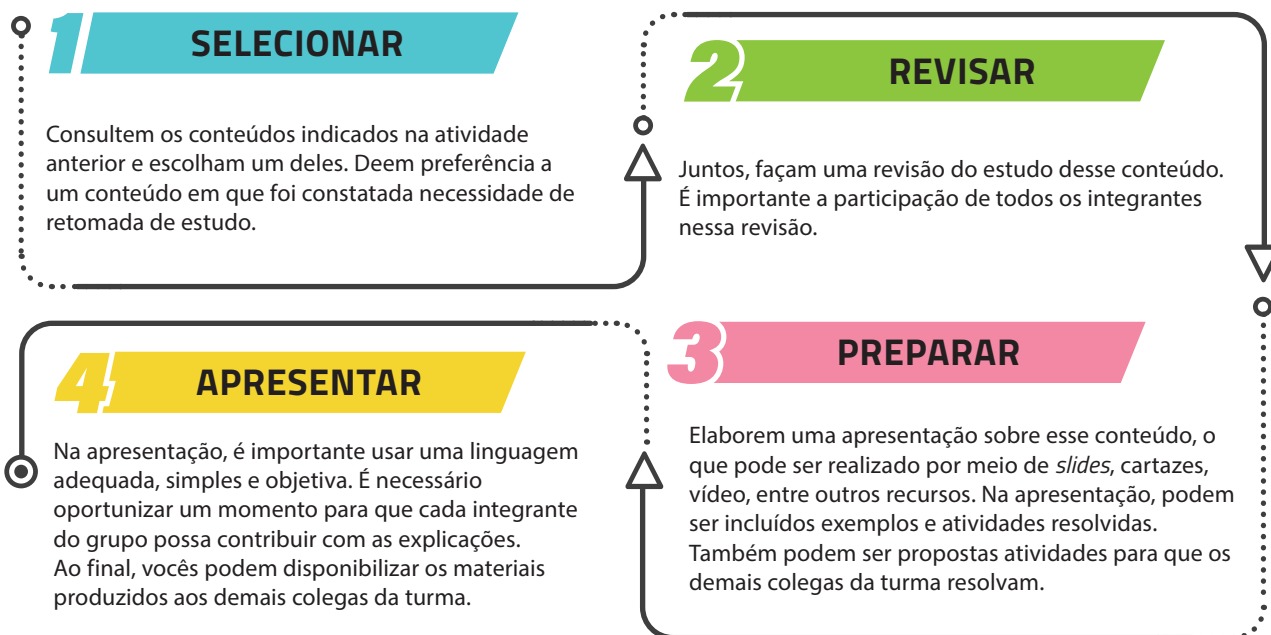
O QUE ESTUDEI

Não escreva no livro.

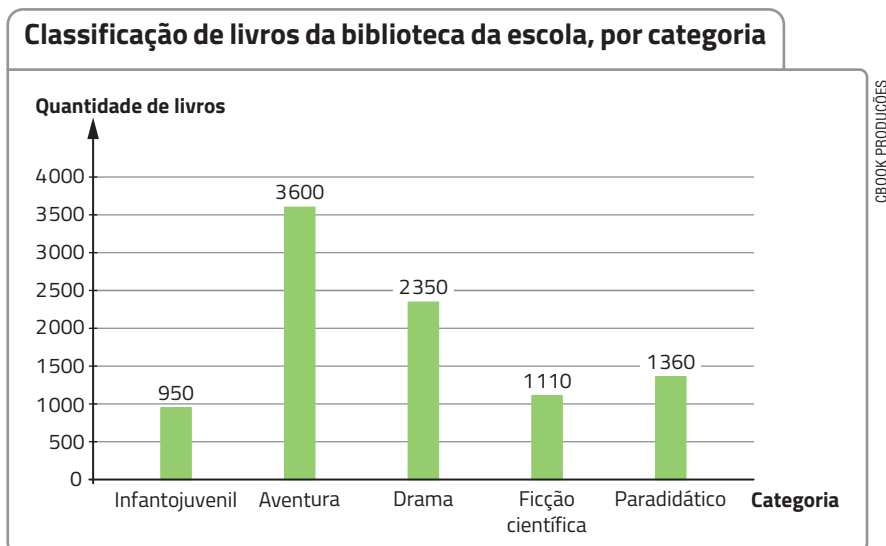
1. Leia com atenção cada frase a seguir e faça uma reflexão sobre seu comportamento durante o estudo desta Unidade. Depois, responda se você **concorda**, **concorda parcialmente** ou **não concorda** com cada uma das afirmações. *Respostas pessoais.*
 - a) Ouvi com atenção as explicações do professor.
 - b) Quando precisei, pedi ajuda ao professor.
 - c) Auxiliei o professor quando ele me pediu.
 - d) Participei das discussões propostas à turma.
 - e) Fiz as atividades propostas na sala de aula.
 - f) Fiz as atividades escolares propostas para casa.
 - g) Respeitei os colegas nas atividades em grupo.
 - h) Auxiliei os colegas quando eles tiveram dúvidas.
 - i) Levei para a sala de aula os materiais necessários.
2. Nas fichas a seguir, estão indicados os principais conteúdos que estudamos nesta Unidade. Reflita sobre cada um deles e verifique se você precisa retomar algum para melhor compreendê-lo. *Resposta pessoal.*

Conjuntos e seus elementos	Diferença entre conjuntos	Conjunto dos números irracionais (\mathbb{I})
Subconjuntos	Conjunto dos números naturais (\mathbb{N})	Conjunto dos números reais (\mathbb{R})
União e interseção de conjuntos	Conjunto dos números inteiros (\mathbb{Z})	Módulo de um número real
Quantidade de elementos da união de dois conjuntos	Conjunto dos números racionais (\mathbb{Q})	Intervalo real

3. Agora, para retomar de maneira colaborativa o estudo de um conteúdo desta Unidade, junte-se a dois colegas, e siga as etapas. *Respostas pessoais.*



4. Na abertura desta Unidade, foram apresentadas algumas informações em relação a banco de dados. Sobre esse tema, resolva as questões a seguir.
- Quais são as principais características da tecnologia de gerenciamento de banco de dados? Qual é sua importância? **Respostas pessoais.**
 - Você já teve contato com algum banco de dados? Em caso positivo, apresente informações sobre a estrutura e o funcionamento desse banco de dados. **Respostas pessoais.**
 - A biblioteca de uma escola tem um banco de dados com 10 000 livros registrados. Cada livro registrado foi classificado em uma das seguintes categorias: infantojuvenil, aventura, drama, ficção científica ou paradidático. Os livros poderiam ser classificados em apenas uma categoria ou não ser classificados em categoria nenhuma. O aplicativo que administra esse banco de dados gerou um gráfico que indica a quantidade de livros classificados por categoria. Observe.



- Em qual categoria há a maior quantidade de livros cadastrados? **aventura**
 - Quantos livros dessa biblioteca não foram classificados em nenhuma categoria? **630 livros**
 - Escreva, na forma de número decimal e de fração irredutível, a razão entre a quantidade de livros classificados na categoria aventura e o total de livros registrados. Essa razão corresponde a um número racional ou irracional? **0,36; $\frac{9}{25}$; número racional**
- André é estagiário em uma empresa de entregas. A pedido da gerência, ele criou um banco de dados para organizar os 45 motoristas da empresa de acordo com o tipo de veículo que eles estão habilitados a conduzir: automóvel ou motocicleta. Nesse banco de dados, quando André filtra os motoristas habilitados para conduzir apenas automóvel ou apenas motocicleta, obtém-se uma lista com 13 e 14 motoristas, respectivamente. Quantos motoristas dessa empresa têm habilitação para conduzir os dois tipos de veículo? **18 motoristas**
 - Em determinada semana, a administração de uma Unidade Básica de Saúde (UBS) criou uma planilha eletrônica para organizar dados e informações sobre a vacinação de um total de 400 pessoas. Utilizando o filtro de informações nessa planilha, foi possível observar que:
 - 200 pessoas foram vacinadas contra a febre amarela;
 - 153 pessoas foram vacinadas contra o sarampo;
 - 23 pessoas foram vacinadas contra o sarampo e a febre amarela.

Quantas das pessoas registradas nesse banco de dados não haviam sido vacinadas contra sarampo nem febre amarela? **70 pessoas**

PRATICANDO: ENEM E VESTIBULARES

Não escreva no livro.

1. (Enem/MEC) Diante da hipótese do comprometimento da qualidade da água retirada do volume morto de alguns sistemas hídricos, os técnicos de um laboratório decidiram testar cinco tipos de filtros de água.

Dentre esses, os quatro com melhor desempenho serão escolhidos para futura comercialização.

Nos testes, foram medidas as massas de agentes contaminantes, em miligrama, que não são capturados por cada filtro em diferentes períodos, em dia, como segue:

- Filtro 1 (F1): 18 mg em 6 dias;
- Filtro 2 (F2): 15 mg em 3 dias;
- Filtro 3 (F3): 18 mg em 4 dias;
- Filtro 4 (F4): 6 mg em 3 dias;
- Filtro 5 (F5): 3 mg em 2 dias.

Ao final, descarta-se o filtro com a maior razão entre a medida da massa de contaminantes não capturados e o número de dias, o que corresponde ao de pior desempenho.

Disponível em: www.redebrasilatual.com.br.
Acesso em: 12 jul. 2015 (adaptado).

O filtro descartado é o **alternativa b**

- a) F1. c) F3. e) F5.
b) F2. d) F4.

2. (Ifal) Em uma pesquisa realizada com estudantes do IFAL, verificou-se que 100 alunos gostam de estudar português, 150 alunos gostam de estudar matemática, 20 alunos gostam de estudar as duas disciplinas e 110 não gostam de nenhuma das duas. Quantos foram os estudantes entrevistados? **alternativa b**

- a) 330.
b) 340.
c) 350.
d) 360.
e) 380.

3. (UEFS-BA) Sejam A , B e C conjuntos contidos no conjunto dos números naturais, tais que A é o conjunto dos números menores do que 250, B é o conjunto dos números múltiplos de 4 e C é o conjunto dos números pares. Sendo A^c , B^c , C^c os conjuntos complementares respectivamente de A , B e C , o número 33 pertence a **alternativa d**

- a) $(A^c \cup B) \cap C^c$
b) $A^c \cap B^c \cap C^c$
c) $(A \cap B) \cup (A^c \cap C^c)$
d) $(A^c \cap B^c) \cup (B^c \cap C^c)$
e) $(A \cap B^c) \cap C$

4. (Enem/MEC) Ao escutar a notícia de que um filme recém-lançado arrecadou, no primeiro mês de lançamento, R\$ 1,35 bilhão em bilheteria, um estudante escreveu corretamente o número que representa essa quantia, com todos os seus algarismos. **alternativa e**

O número escrito pelo estudante foi

- a) 135 000,00.
b) 1 350 000,00.
c) 13 500 000,00.
d) 135 000 000,00.
e) 1 350 000 000,00.

5. (Ifam) A , B , C e x são tais que $x \in (A - B)$ e $x \in (C - B)$, então x é um elemento do conjunto: **alternativa c**

- a) $A \cap B$ c) $A \cap C$ e) $C - A$
b) $B \cap C$ d) $B - C$

6. (ITA-SP) Sejam $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ e $B = \{-1, -2, -3, -4, -5\}$. Se $C = \{xy : x \in A \text{ e } y \in B\}$, então o número de elementos de C é **alternativa e**

- a) 10. d) 13.
b) 11. e) 14.
c) 12.

DICA

Na lei de formação do conjunto C , o símbolo : representa a expressão **tal que**.

7. (Fuvest-SP) Dentre os candidatos que fizeram provas de matemática, português e inglês num concurso, 20 obtiveram nota mínima para aprovação nas três disciplinas. Além disso, sabe-se que:
- I. 14 não obtiveram nota mínima em matemática;
 - II. 16 não obtiveram nota mínima em português;
 - III. 12 não obtiveram nota mínima em inglês;
 - IV. 5 não obtiveram nota mínima em matemática e em português;
 - V. 3 não obtiveram nota mínima em matemática e em inglês;
 - VI. 7 não obtiveram nota mínima em português e em inglês e
 - VII. 2 não obtiveram nota mínima em português, matemática e inglês.
- A quantidade de candidatos que participaram do concurso foi **alternativa e**
- a) 44. c) 47. e) 49.
b) 46. d) 48.
8. (Udesc) Foi solicitado que um grupo de 64 pessoas escolhesse um número natural maior do que 3. Após análise das escolhas, constatou-se que: 12 pessoas escolheram um número primo, 30 um número par, 14 um múltiplo de 3, e 6 um múltiplo de 6.
- O número de pessoas que escolheu um número ímpar, não múltiplo de 3, foi igual a:
- a) 14 c) 12 **alternativa b** e) 34
b) 26 d) 20
9. (UTFPR) Convertendo 843 dm (decímetros) e 35 km (quilômetros) para metros, obtemos, respectivamente: **alternativa b**
- a) 8,43 e 3 500 metros.
b) 84,3 e 35 000 metros.
c) 0,843 e 350 metros.
d) 8 430 e 3,5 metros.
e) 84 300 e 35 metros.
10. (IFSul-RS) Em uma enquete no centro olímpico, foram entrevistados alguns atletas e verificou-se que 300 praticam natação, 250 praticam atletismo e 200 praticam esgrima. Além disso, 70 atletas praticam natação e atletismo,

65 praticam natação e esgrima e 105 praticam atletismo e esgrima, 40 praticam os três esportes e 150 não praticam nenhum dos três esportes citados. Nessas condições, o número de atletas entrevistados foi **alternativa c**

- a) 1 180. c) 700.
b) 1 030. d) 800.

11. (UFPA) Em uma turma de cinquenta alunos de Medicina, há dezoito cursando Anatomia, quinze cursando Citologia e treze cursando Biofísica. Seis alunos cursam simultaneamente Anatomia e Citologia, cinco cursam simultaneamente Citologia e Biofísica e quatro cursam simultaneamente Anatomia e Biofísica. Dezesesseis alunos não cursam nenhuma destas disciplinas. O número de alunos que cursam, simultaneamente, exatamente duas disciplinas é **alternativa e**

- a) 31. c) 12. e) 6.
b) 15. d) 8.

12. (Enem/MEC) Demografia médica é o estudo da população de médicos sob vários aspectos quantitativos e qualitativos. Um dos componentes desse estudo é a densidade médica, a qual é obtida dividindo-se o número de médicos registrados no Conselho Federal de Medicina (CFM) em uma região pela respectiva quantidade de pessoas da Unidade Federativa (UF) correspondente à região em estudo. A tabela apresenta informações sobre cinco unidades federativas, relativamente ao total de médicos registrados no CFM e à população existente.

UF	Total de médicos	População (em milhar)
Distrito Federal	10 800	2 650
Minas Gerais	40 400	19 900
São Paulo	110 450	41 900
Sergipe	3 000	2 120
Piauí	3 300	3 140

Disponível em: www.cremesp.org.br.
Acesso em: 24 jun. 2015 (adaptado).

Dentre as unidades federativas indicadas, qual apresenta a maior densidade médica?

- a) Distrito Federal. **alternativa a** d) Sergipe.
b) Minas Gerais. e) Piauí.
c) São Paulo.

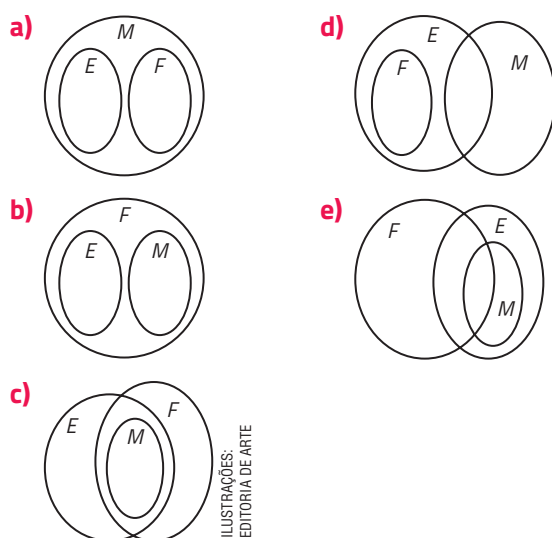
- 13.** (Fatec-SP) Entre as pessoas que compareceram à festa de inauguração da FATEC Pompeia, estavam alguns dos amigos de Eduardo. Além disso, sabe-se que nem todos os melhores amigos de Eduardo foram à festa de inauguração. Considere:

F : conjunto das pessoas que foram à festa de inauguração.

E : conjunto dos amigos de Eduardo.

M : conjunto dos melhores amigos de Eduardo.

Com base nessas informações assinale a alternativa que contém o diagrama de Euler-Venn que descreve corretamente a relação entre os conjuntos. **alternativa e**



- 14.** (Enem/MEC) Para garantir a segurança de um grande evento público que terá início às 4 h da tarde, um organizador precisa monitorar a quantidade de pessoas presentes em cada instante. Para cada 2 000 pessoas se faz necessária a presença de um policial. Além disso, estima-se uma densidade de quatro pessoas por metro quadrado de área de terreno ocupado. Às 10 h da manhã, o organizador verifica que a área de terreno já ocupada equivale a um quadrado com lados medindo 500 m. Porém, nas horas seguintes, espera-se que o público aumente a uma taxa de 120 000 pessoas por hora até o início do evento, quando não será mais permitida a entrada de público. Quantos policiais serão necessários no início do evento para garantir a segurança? **alternativa e**

- a)** 360 **c)** 560 **e)** 860
b) 485 **d)** 740

- 15.** (UFSC) Preocupado com a saúde de seus funcionários, o dono de uma empresa realizou uma pesquisa sobre os hábitos alimentares de seus empregados. Ele constatou que todos se alimentam ao menos uma vez ao dia e que, devido à rotina familiar e de trabalho, os únicos momentos de alimentação são: café da manhã, almoço e jantar. Os funcionários deveriam responder quando se alimentavam com algum tipo de proteína de origem animal. A pesquisa revelou que:

- 12 ingerem algum tipo de proteína animal apenas no café da manhã;
- 17 ingerem algum tipo de proteína animal apenas no jantar;
- 147 ingerem algum tipo de proteína animal no almoço;
- 97 ingerem algum tipo de proteína animal no café da manhã e no almoço;
- 94 ingerem algum tipo de proteína animal no café da manhã e no jantar;
- 87 ingerem algum tipo de proteína animal no almoço e no jantar; e
- 66 ingerem algum tipo de proteína animal no café da manhã, no almoço e no jantar.

Se o total de funcionários da empresa for 260, determine o número de funcionários que não se alimentam com proteína animal em nenhuma das refeições. **56 funcionários**

- 16.** (UFJF-MG) Uma empresa oferece dois cursos não obrigatórios aos seus funcionários no momento da admissão: Primeiros Socorros e Prevenção de Incêndios. Essa empresa tem hoje 500 funcionários. Desses, 200 fizeram o curso de Primeiros Socorros, 150 fizeram o de Prevenção de Incêndios e 70 fizeram os dois cursos.

O Departamento de Pessoal da empresa está fazendo uma pesquisa sobre a qualidade dos cursos ofertados e sorteia aleatoriamente, dentre seus funcionários, aqueles que responderão a um questionário.

Qual é a probabilidade de se sortear um funcionário que não tenha feito nenhum dos dois cursos? **alternativa b**

- a)** 86% **b)** 44% **c)** 42% **d)** 30% **e)** 6%

DICA

Lembre-se de que a probabilidade de um evento ocorrer é dada pela razão entre o número de casos favoráveis e o número de casos possíveis.

RELAÇÕES ENTRE GRANDEZAS E NOÇÃO DE FUNÇÃO

O Sistema Internacional de Unidades (SI)

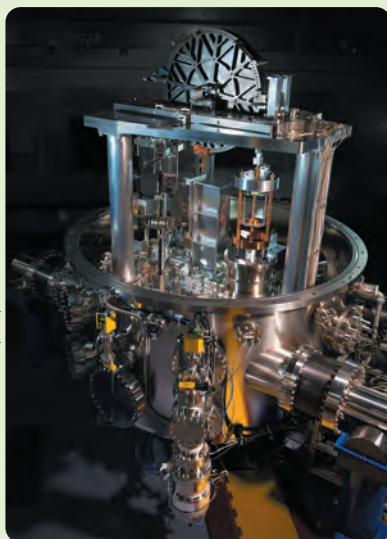
O Sistema Internacional de Unidades (SI) é utilizado em quase todo o mundo como um sistema universal de unidades, contribuindo para diversos aspectos da sociedade, como facilitar as relações comerciais. No SI, estão definidas não apenas as unidades de medida mas também seus nomes, símbolos, prefixos, múltiplos, submúltiplos etc.

Ao longo dos anos, mudanças são implementadas no SI para, por exemplo, serem adotadas definições de unidades de medida mais precisas e menos suscetíveis a alterações. A unidade de medida de massa quilograma (kg), por exemplo, desde sua inserção no SI, era definida por um protótipo cilíndrico de platina (Pt) e irídio (Ir) com 39 mm de diâmetro e 39 mm de altura (conforme a fotografia). No entanto, com o passar dos anos, esse objeto perdeu 50 microgramas de sua massa original. Por esse motivo, a partir de 2019, essa definição passou a ser baseada na relação massa-energia, de maneira que a medida pode ser obtida experimentalmente a partir de um procedimento que relaciona um valor de corrente elétrica e o valor da constante de Planck ($6,62607015 \cdot 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$), que descreve as quantidades de energia emitidas em forma de radiação.



► Protótipo internacional do quilograma utilizado como referência até 2019.

► A balança de watt é um instrumento eletromecânico de alta precisão que mede a massa de um objeto usando a força gerada por corrente e tensão elétricas. Imagens sem escala.



JENNIFER LAUREN LEE/U.S. NATIONAL INSTITUTE OF STANDARDS AND TECHNOLOGY (NIST)/WIKIMEDIA COMMONS

Respostas nas Orientações para o professor.

Não escreva no livro.

Após ler as informações, converse com os colegas e o professor sobre os itens a seguir.

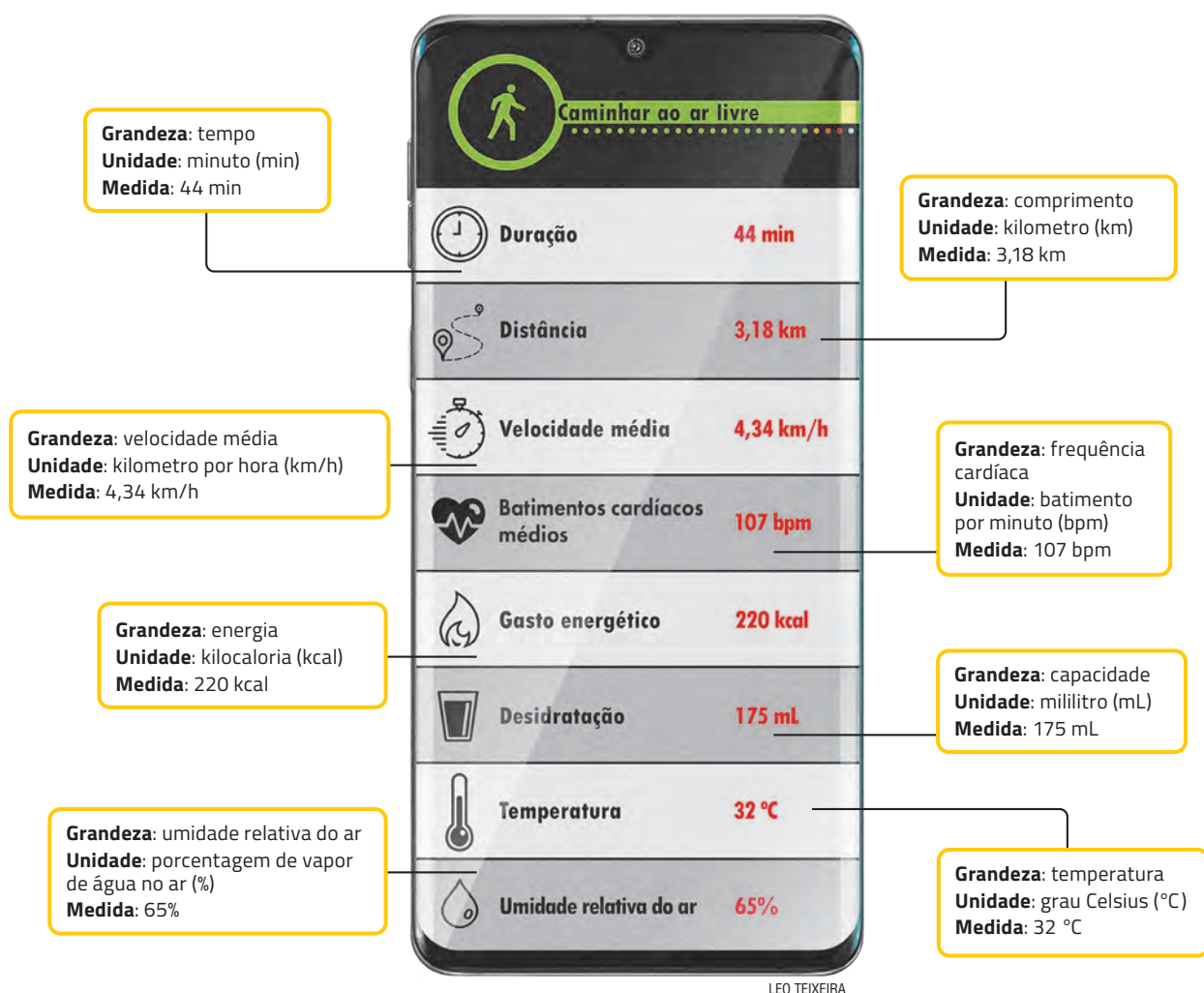
1. Em seu entendimento, qual é a importância das unidades de medida padronizadas?
2. Explique o motivo que levou à redefinição do quilograma no SI.
3. Cite alguns exemplos de outras grandezas e as unidades de medida correspondentes. Se necessário, realize uma pesquisa.

Grandezas

Na abertura desta Unidade, lemos informações relacionadas ao Sistema Internacional de Unidades (SI) e a alteração da definição da **unidade de medida** quilograma (kg), relacionada à **grandeza** massa. No dia a dia e em seus estudos, você provavelmente já trabalhou com diversas grandezas e unidades de medida. Agora, vamos retomar e aprofundar esse estudo.

Considere a situação a seguir.

Treinos de caminhada ou corrida, com orientações de um profissional capacitado, são considerados boas opções de atividade física. Alguns aplicativos para *smartphone* podem ser usados para acompanhar treinos como esses. Observe o exemplo a seguir.



LEO TEIXEIRA

PARA AMPLIAR

Acesse esta cartilha sobre o novo Sistema Internacional de Unidades e obtenha mais informações sobre grandezas e unidades de medida.

- SOCIEDADE BRASILEIRA DE METROLOGIA; SOCIEDADE BRASILEIRA DE FÍSICA. **O novo Sistema Internacional de Unidades (SI)**. Rio de Janeiro: SBM, 2019. Disponível em: http://metrologia.org.br/wpsite/wp-content/uploads/2019/07/Cartilha_O_novo_SI_29.06.2029.pdf. Acesso em: 27 jun. 2024.

Utilizado na maioria dos países, o SI busca padronizar as medições e facilitar as relações entre o comércio local e o internacional. Observe.

Grandezas e unidades de base do SI

Grandeza	Unidade (símbolo)
Comprimento	metro (m)
Massa	kilograma (kg)
Tempo	segundo (s)
Corrente elétrica	ampere (A)
Temperatura termodinâmica	kelvin (K)
Quantidade de matéria	mol (mol)
Intensidade luminosa	candela (cd)

Fonte dos dados: INSTITUTO NACIONAL DE METROLOGIA, QUALIDADE E TECNOLOGIA; INSTITUTO PORTUGUÊS DA QUALIDADE. **Sistema Internacional de Unidades (SI).** Tradução: Grupo de Trabalho luso-brasileiro do Inmetro e IPQ. Brasília, DF: Inmetro; Caparica: IPQ, 2021. p. 6. Tradução luso-brasileira da 9ª edição. Disponível em: https://www.gov.br/compras/pt-br/aceso-a-informacao/noticias/si-versao_final.pdf. Acesso em: 27 jun. 2024.

Além das unidades estabelecidas para as grandezas de base do SI, consideramos seus múltiplos e submúltiplos. Em relação à unidade de comprimento metro, por exemplo, temos:

kilometro (km)	hectometro (hm)	decametro (dam)	metro (m)	decimetro (dm)	centimetro (cm)	milimetro (mm)
1 km = 1 000 m	1 hm = 100 m	1 dam = 10 m	1 m	1 dm = 0,1 m	1 cm = 0,01 m	1 mm = 0,001 m

Observe como podemos converter 12 m para:

- kilometro: $12 \text{ m} = 12 \cdot \underbrace{1 \text{ m}}_{0,001 \text{ km}} = 12 \cdot 0,001 \text{ km} = 0,012 \text{ km};$
- decametro: $12 \text{ m} = 12 \cdot \underbrace{1 \text{ m}}_{0,1 \text{ dam}} = 12 \cdot 0,1 \text{ dam} = 1,2 \text{ dam};$
- centimetro: $12 \text{ m} = 12 \cdot \underbrace{1 \text{ m}}_{100 \text{ cm}} = 12 \cdot 100 \text{ cm} = 1 200 \text{ cm};$
- milimetro: $12 \text{ m} = 12 \cdot \underbrace{1 \text{ m}}_{1000 \text{ mm}} = 12 \cdot 1 000 \text{ mm} = 12 000 \text{ mm}.$

No SI, existem também as **grandezas derivadas**, cujas unidades de medida correspondem a produtos ou razões de unidades de base.

Exemplos de grandezas e unidades derivadas do SI

Grandeza	Unidade (símbolo)
Área	metro quadrado (m ²)
Volume	metro cúbico (m ³)
Velocidade	metro por segundo (m/s)
Aceleração	metro por segundo ao quadrado (m/s ²)
Densidade	kilograma por metro cúbico (kg/m ³)

Fonte dos dados: INSTITUTO NACIONAL DE METROLOGIA, QUALIDADE E TECNOLOGIA; INSTITUTO PORTUGUÊS DA QUALIDADE. **Sistema Internacional de Unidades (SI).** Tradução: Grupo de Trabalho luso-brasileiro do Inmetro e IPQ. Brasília, DF: Inmetro; Caparica: IPQ, 2021. p. 14-15. Tradução luso-brasileira da 9ª edição. Disponível em: https://www.gov.br/compras/pt-br/aceso-a-informacao/noticias/si-versao_final.pdf. Acesso em: 27 jun. 2024.

PARA PENSAR

Pense em uma situação do dia a dia em que seja necessário realizar conversão de unidades entre os múltiplos e submúltiplos do metro e explique a um colega. *A resposta depende do tema escolhido pelo estudante.*

ATIVIDADES RESOLVIDAS

R1. A densidade d de um corpo é a razão entre sua massa m e seu volume v . Por exemplo, a prata tem densidade de $10,5 \text{ g/cm}^3$, ou seja, cada 1 cm^3 de prata tem $10,5 \text{ g}$. Observe os objetos representados a seguir e algumas de suas medidas. (As imagens apresentadas estão fora de proporção.)



► Vaso de vidro.
Massa: 1560 g .
Volume: 600 cm^3 .



► Objeto decorativo em alumínio.
Massa: 405 g .
Densidade do alumínio: $2,7 \text{ g/cm}^3$.



► Banco de ferro.
Volume: 1140 cm^3 .
Densidade do ferro: $7,9 \text{ g/cm}^3$.

Com base nessas informações, determine:

- a) a densidade do vidro, em grama por centímetro cúbico;
- b) o volume do objeto decorativo em alumínio, em centímetro cúbico;
- c) a massa do banco de ferro, em grama.

Resolução

Para resolver esses itens, podemos utilizar a expressão $d = \frac{m}{v}$, sendo d a densidade, m a massa e v o volume.

a) $d = \frac{1560}{600} = 2,6$; ou seja, $2,6 \text{ g/cm}^3$.

b) $2,7 = \frac{405}{v} \Rightarrow v = \frac{405}{2,7} = 150$; ou seja, 150 cm^3 .

c) $7,9 = \frac{m}{1140} \Rightarrow m = 7,9 \cdot 1140 = 9006$; ou seja, 9006 g .

R2. (Enem/MEC) Numa atividade de treinamento realizada no Exército de um determinado país, três equipes – Alpha, Beta e Gama – foram designadas a percorrer diferentes caminhos, todos com os mesmos pontos de partida e de chegada.

- A equipe Alpha realizou seu percurso em 90 minutos com uma velocidade média de $6,0 \text{ km/h}$.
- A equipe Beta também percorreu sua trajetória em 90 minutos, mas sua velocidade média foi de $5,0 \text{ km/h}$.
- Com uma velocidade média de $6,5 \text{ km/h}$, a equipe Gama concluiu seu caminho em 60 minutos.

Com base nesses dados, foram comparadas as distâncias d_{Beta} , d_{Alpha} e d_{Gama} percorridas pelas três equipes.

A ordem das distâncias percorridas pelas equipes Alpha, Beta e Gama é

a) $d_{\text{Gama}} < d_{\text{Beta}} < d_{\text{Alpha}}$

b) $d_{\text{Alpha}} = d_{\text{Beta}} < d_{\text{Gama}}$

c) $d_{\text{Gama}} < d_{\text{Beta}} = d_{\text{Alpha}}$

d) $d_{\text{Beta}} < d_{\text{Alpha}} < d_{\text{Gama}}$

e) $d_{\text{Gama}} < d_{\text{Alpha}} < d_{\text{Beta}}$

DICA

A velocidade média v é dada pela razão entre a distância d e o tempo t de percurso.

Resolução

Para resolver esta atividade, podemos realizar as seguintes etapas.

1ª COMPREENDER O ENUNCIADO

Considerando v a velocidade média e t o tempo da realização do percurso das equipes, com base no enunciado, temos:

- $v_{Alpha} = 6 \text{ km/h}$ e $t_{Alpha} = 90 \text{ min}$; ▪ $v_{Beta} = 5 \text{ km/h}$ e $t_{Beta} = 90 \text{ min}$; ▪ $v_{Gama} = 6,5 \text{ km/h}$ e $t_{Gama} = 60 \text{ min}$.

Precisamos determinar a ordem das distâncias percorridas pelas equipes.

2ª ELABORAR UM PLANO

Primeiro, é necessário converter o tempo de minuto (min) para hora (h), uma vez que, nessa situação, as velocidades médias estão expressas em quilometro por hora (km/h). Depois, basta substituir os valores de velocidade (indicados no enunciado) e de tempo (convertidos de minuto para hora) na expressão $v = \frac{d}{t}$.

3ª EXECUTAR O PLANO

Como $1 \text{ h} = 60 \text{ min}$, realizamos as conversões:

- $t_{Alpha} = 90 \text{ min} = \frac{90}{60} \text{ h} = 1,5 \text{ h}$; ▪ $t_{Beta} = 90 \text{ min} = \frac{90}{60} \text{ h} = 1,5 \text{ h}$; ▪ $t_{Gama} = 60 \text{ min} = \frac{60}{60} \text{ h} = 1 \text{ h}$.

Assim, substituímos os tempos e as velocidades na expressão indicada anteriormente:

- $v_{Alpha} = \frac{d_{Alpha}}{t_{Alpha}} \Rightarrow 6 = \frac{d_{Alpha}}{1,5} \Rightarrow d_{Alpha} = 9$; ou seja, 9 km;
- $v_{Beta} = \frac{d_{Beta}}{t_{Beta}} \Rightarrow 5 = \frac{d_{Beta}}{1,5} \Rightarrow d_{Beta} = 7,5$; ou seja, 7,5 km;
- $v_{Gama} = \frac{d_{Gama}}{t_{Gama}} \Rightarrow 6,5 = \frac{d_{Gama}}{1} \Rightarrow d_{Gama} = 6,5$; ou seja, 6,5 km.

4ª VERIFICAR OS RESULTADOS

Para verificar o resultado obtido, podemos calcular a velocidade média de cada equipe com base na distância calculada e no tempo indicado no enunciado.

- $v_{Alpha} = \frac{d_{Alpha}}{t_{Alpha}} \Rightarrow v_{Alpha} = \frac{9}{1,5} = 6$; ou seja, 6 km/h;
- $v_{Beta} = \frac{d_{Beta}}{t_{Beta}} \Rightarrow v_{Beta} = \frac{7,5}{1,5} = 5$; ou seja, 5 km/h;
- $v_{Gama} = \frac{d_{Gama}}{t_{Gama}} \Rightarrow v_{Gama} = \frac{6,5}{1} = 6,5$; ou seja, 6,5 km/h.

Como as velocidades médias calculadas correspondem às indicadas no enunciado, podemos concluir que as distâncias obtidas estão corretas.

Portanto, a alternativa **a** é a correta, pois $6,5 < 7,5 < 9$, ou seja, $d_{Gama} < d_{Beta} < d_{Alpha}$.

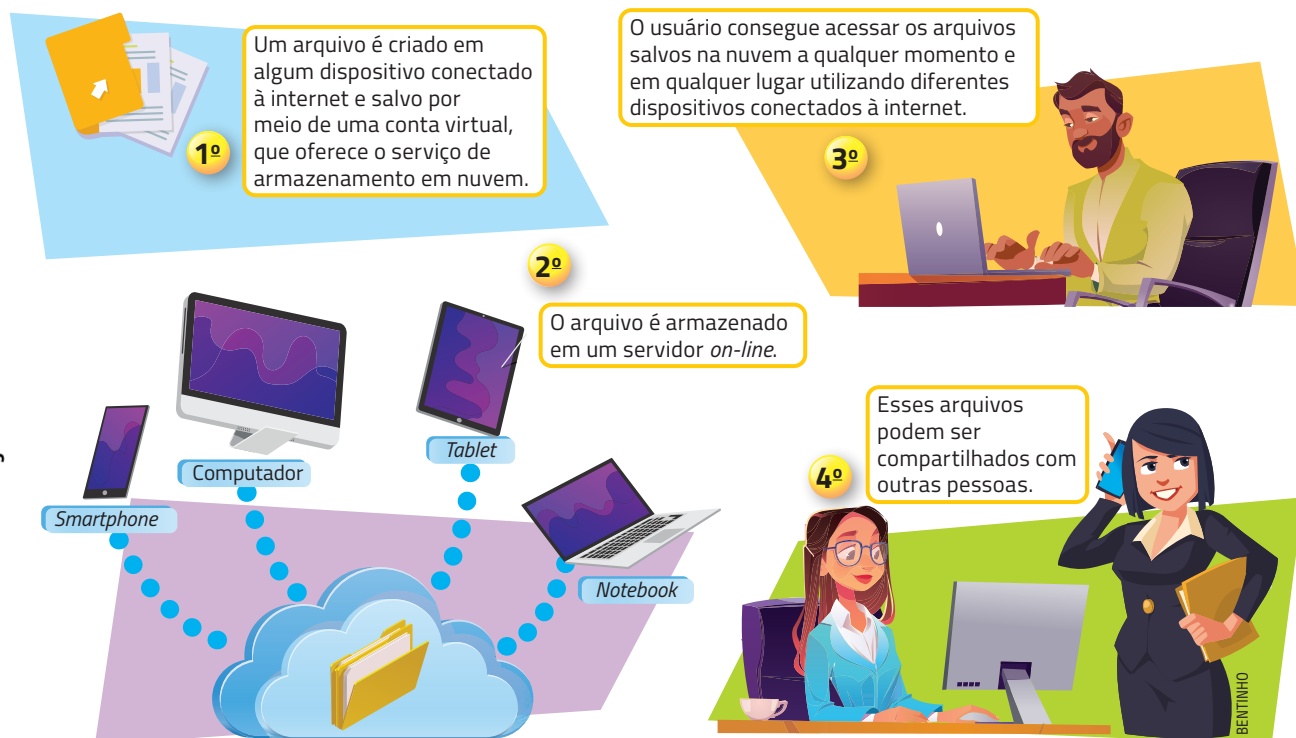
• Outras grandezas

Além das grandezas de base e das grandezas derivadas, adotadas no SI, há diversas outras que são utilizadas em situações de diferentes áreas do conhecimento, como aquelas relacionadas à informática. Estudaremos, a seguir, algumas dessas grandezas.

Armazenamento de dados

Você conhece o sistema de armazenamento de dados em nuvem?

O armazenamento em nuvem permite que dados sejam “guardados” em um servidor *on-line* com grande capacidade de armazenamento. Nesse tipo de sistema, arquivos digitais podem ser salvos, acessados e baixados a distância, em qualquer localidade com acesso a uma rede de internet. Acompanhe.



A capacidade de armazenamento de dados disponibilizada aos usuários de serviços de armazenamento em nuvem costuma ser expressa com a unidade de medida baite (B) ou um de seus múltiplos. Um baite (1 B) corresponde ao espaço ocupado por um caractere e equivale a 8 bites, sendo o bite (b) a menor unidade de informação que pode ser armazenada por um computador.

Observe conversões entre o baite e alguns de seus múltiplos.

Unidade de medida de armazenamento (símbolo)	Conversão
baite (B)	1 B = 8 b
kilobaite (kB)	1 kB = 1024 B
megabaite (MB)	1 MB = 1024 kB
gigabaite (GB)	1 GB = 1024 MB
terabaite (TB)	1 TB = 1024 GB

ATIVIDADES RESOLVIDAS

R3. Em cada item, realize as conversões indicadas.

- a) 10 kB para baite.
- b) 640 MB para gigabaite.
- c) 2 TB para megabaite.

Resolução

$$\text{a) } 10 \text{ kB} = 10 \cdot \underbrace{1 \text{ kB}}_{1024 \text{ B}} = 10 \cdot 1024 \text{ B} = 10\,240 \text{ B}$$

$$\text{b) } 640 \text{ MB} = 640 \cdot \underbrace{1 \text{ MB}}_{\frac{1}{1024} \text{ GB}} = 640 \cdot \frac{1}{1024} \text{ GB} = 0,625 \text{ GB}$$

$$\text{c) } 2 \text{ TB} = 2 \cdot \underbrace{1 \text{ TB}}_{1024 \text{ GB}} = 2 \cdot 1024 \cdot \underbrace{1 \text{ GB}}_{1024 \text{ MB}} = 2 \cdot 1024 \cdot 1024 \text{ MB} = 2\,097\,152 \text{ MB}$$

PARA PENSAR

Indique uma medida qualquer utilizando um dos múltiplos do baite como unidade. Depois, converta essa medida para outras duas unidades de medida de armazenamento. **Resposta pessoal.**

R4. Uma agência de *marketing* digital produz vídeos para postagens em redes sociais. Por segurança, a agência pretende fazer um *backup*, em um *HD* externo, de 44 000 vídeos já produzidos. Cada vídeo desses, em média, tem cerca de 1min30s de duração e 100 MB de tamanho. Considerando as médias de duração e tamanho de cada vídeo produzido, determine quais dos *HDs* externos representados a seguir podem ser utilizados para esse *backup*.



Resolução

Considerando que cada vídeo produzido pela agência tem 100 MB, calculamos quantos megabaites ao todo têm os 44 000 vídeos:

$$44\,000 \cdot 100 = 4\,400\,000, \text{ ou seja, } 4\,400\,000 \text{ MB.}$$

Como a capacidade dos *HDs* externos indicados nas alternativas é dada em gigabaite e terabaite, fazemos a conversão de 4 400 000 MB em gigabaite e terabaite:

$$4\,400\,000 \text{ MB} = 4\,400\,000 \cdot \underbrace{1 \text{ MB}}_{\frac{1}{1024} \text{ GB}} = 4\,400\,000 \cdot \frac{1}{1024} \text{ GB} \approx 4\,297 \text{ GB}$$

$$4\,297 \text{ GB} = 4\,297 \cdot \underbrace{1 \text{ GB}}_{\frac{1}{1024} \text{ TB}} = 4\,297 \cdot \frac{1}{1024} \text{ TB} \approx 4,2 \text{ TB}$$

Comparando os resultados obtidos com as capacidades dos *HDs* externos indicados nas alternativas, temos:

- $250 \text{ GB} < 500 \text{ GB} < 4\,297 \text{ GB}$
- $4 \text{ TB} < 4,2 \text{ TB} < 8 \text{ TB} < 16 \text{ TB}$

Portanto, os únicos *HDs* externos capazes de armazenar todos os 44 000 vídeos produzidos pela agência são aqueles indicados nas alternativas **b** e **e**.

PARA PENSAR

Todos os dados apresentados no enunciado da atividade foram utilizados na resolução? Comente. **Não. Por exemplo, o tempo médio de duração dos vídeos não foi utilizado na resolução.**

Taxa de transferência de dados

Quando baixamos (*download*) ou enviamos (*upload*) um arquivo eletronicamente, podemos indicar a quantidade de dados que é transferida em um intervalo de tempo pela chamada **taxa de transferência**.

Uma taxa de transferência de dados de 32 Mbps (lê-se: trinta e dois megabites por segundo) indica que a cada segundo, em média, são transferidos 32 megabites (Mb) de dados. Por exemplo, considerando essa taxa de transferência, podemos estimar quanto tempo seria necessário para transferir um arquivo de 20 MB realizando as etapas a seguir.

1ª) Converter o tamanho do arquivo de megabites para megabites.

Como 1 B equivale a 8 b, temos que 1 MB equivale a 8 Mb. Assim:

$$20 \text{ MB} = 20 \cdot \frac{1 \text{ MB}}{8 \text{ Mb}} = 20 \cdot 8 \text{ Mb} = 160 \text{ Mb}$$

2ª) Determinar o tempo para a transferência do arquivo.

Organizando as informações, obtemos:

Tamanho do arquivo (Mb)	Tempo (s)
32	1
160	x

Como as grandezas tamanho do arquivo e tempo são diretamente proporcionais, temos:

$$\frac{32}{160} = \frac{1}{x} \Rightarrow 32x = 160 \Rightarrow x = \frac{160}{32} = 5$$

Portanto, com uma taxa de transferência de 32 Mbps, seriam necessários 5 s para transferir um arquivo de 20 MB.

Atividades

Não escreva no livro.

1. Em cada item, identifique a qual grandeza as medidas indicadas correspondem: comprimento, massa ou tempo. Depois, copie a igualdade e substitua /// por um número que a torne verdadeira.

a) 8,5 t = /// kg
massa; 8 500

d) /// dm = 7 mm
comprimento; 0,07

b) /// m = 90 km
comprimento; 90 000

e) /// kg = 1 650 g
massa; 1,65

c) 10 800 s = /// h
tempo; 3

f) 4,2 min = /// s
tempo; 252

2. Converta:

a) 4 TB para gigabaite. 4 096 GB

b) 512 B para kilobaite. 0,5 kB

c) 3 072 kB para megabaite. 3 MB

d) 0,5 GB para kilobaite. 524 288 kB

3. Jean utiliza uma conta virtual para armazenar na nuvem os arquivos de fotografia do seu *smartphone*. Ele já utilizou 1 460 MB da capacidade total disponível dessa conta, que é de 2 GB.

Sabendo que cada arquivo de fotografia obtida por Jean tem cerca de 4 MB, quantas fotografias ele ainda pode armazenar nessa conta? 147 arquivos de fotografia

4. Estudamos que a densidade de um material é expressa pela razão entre sua massa e seu volume. Com base nessa ideia, determine os valores correspondentes às letras em destaque a seguir. A: 2,4 g/cm³; B: aproximadamente 0,35 cm³; C: 42 g

Objeto	Massa (g)	Volume (cm ³)	Densidade (g/cm ³)
Caneca de porcelana	384 g	160 cm ³	A
Moeda de aço inoxidável	2,8 g	B	7,9 g/cm ³
Parafuso de latão	C	5 cm ³	8,4 g/cm ³




5. a) comprimento: diâmetro e distância média do Sol; tempo: período orbital e período de rotação; temperatura: temperatura de superfície

5. Observe as informações sobre o planeta Marte e resolva as questões.

Dados marcianos


Diâmetro: 6 792 km
Distância média do Sol: 227,9 milhões de km
Período orbital: 687 dias terrestres
Período de rotação: 24,62 horas
Temperatura de superfície: -125°C a 25°C
Número de satélites: 2

Comparação de tamanho




ILUSTRAÇÕES: BENTINHO

► Representação da Terra
(imagens sem escala; cores-fantasia).



► Representação de Marte.

Fonte dos dados: RIDPATH, Ian. **Astronomia**. Tradução: Maria Luiza X. de A. Borges. 4. ed. Rio de Janeiro: Zahar, 2014. (Guia Ilustrado Zahar, p. 103).

- a) As medidas indicadas correspondem a quais grandezas?
- b) Expresse a medida do diâmetro de Marte em:
- hectometro; **67 920 hm** ▪ metro. **67 920 000 m**
 - centimetro; **679 200 000 cm**
- c) Qual é a amplitude térmica da superfície de Marte? **150°C**
- d) Determine o período de rotação de Marte em hora, minuto e segundo. **24h37min12s**
-  e) Com dois colegas, façam o que se pede nos itens a seguir, recorrendo, quando necessário, a sites e livros que abordem assuntos de Física e de Astronomia.
- Pesquisa e elaboração dos estudantes.*
- Escolham um dos planetas do Sistema Solar e pesquisem suas principais medidas, conforme o quadro apresentado no início da atividade. Em seguida, elaborem um cartaz com as informações encontradas. Ao final, exponham aos colegas da turma os cartazes elaborados.
 - Investiguem como são determinadas atualmente as medidas: diâmetro de um planeta e distância média do Sol. Por fim, redijam um pequeno texto sistematizando as informações pesquisadas.


6. b) grandeza: velocidade; unidade de medida: quilometro por hora (km/h)

6. Leia o trecho de um artigo publicado em um site de divulgação científica e responda às questões.

[...] a grande dificuldade de aceitar os movimentos da Terra deve-se ao fato de que não sentimos isso acontecer de uma maneira direta. A velocidade de rotação da Terra é de aproximadamente 1 675 km/h e a de translação, 109 mil km/h – extremamente altas, considerando que, em nosso cotidiano, nos deslocamos a velocidades na ordem de 100 km/h. Porém, é difícil sentir essa velocidade vertiginosa porque também estamos nos movendo junto com o planeta.

Uma imagem para ajudar a compreender: quando estamos dentro de um automóvel percorrendo uma estrada reta com velocidade constante, não percebemos que estamos em movimento se olharmos apenas para dentro do carro. Se olharmos para a estrada, o que vemos são os objetos se deslocando para trás. Parece estranho, mas, do nosso ponto de vista, estamos parados. O resto do mundo é que se move. Esse é o conceito de relatividade do movimento, percebido pelo físico e astrônomo italiano Galileu Galilei no começo do século 17.

OLIVEIRA, Adilson de. **O Sol vai parar**. Rio de Janeiro: Ciência Hoje, c2024. Disponível em: <https://cienciahoje.org.br/coluna/o-sol-vai-parar/>. Acesso em: 26 jun. 2024.

- a) De que movimentos da Terra esse trecho trata? **rotação e translação**
- b) Quais grandezas e unidades de medida são citadas nesse trecho?
-  c) Com base em seu conhecimento sobre os movimentos da Terra e nas informações desse trecho, estime a medida do comprimento da linha do equador. Depois, explique a um colega como você resolveu essa questão.
7. Um objeto sólido com 180 g de massa e 100 cm^3 de volume encontra-se no fundo de um recipiente com 500 cm^3 de um líquido **A** de densidade igual a $0,9\text{ g/cm}^3$. Ao adicionar 500 cm^3 de um líquido **B** nesse recipiente, é formada uma mistura homogênea e o objeto passa a flutuar na mistura. Qual deve ser a densidade mínima do líquido **B**? **$2,7\text{ g/cm}^3$**

DICA

A densidade dessa mistura pode ser determinada por uma média ponderada, considerando a proporção da mistura e a densidade de cada líquido.

6. c) Resposta esperada: Como o movimento de rotação da Terra tem duração aproximada de 24 h, podemos multiplicar esse valor pela medida da velocidade de rotação da Terra, que é de aproximadamente 1 675 km/h, para estimar a medida do comprimento da linha do equador em 40 200 km ($1\,675 \cdot 24 = 40\,200$).

8. a) de 0,00001 mm ou 10^{-5} mm até 0,0003 mm ou $3 \cdot 10^{-4}$ mm

8. c) de 0,0000001 m (10^{-7} m) até 0,0000045 m ($4,5 \cdot 10^{-6}$ m)

8. Leia o trecho de um artigo publicado em um *site* de divulgação científica e responda às questões.

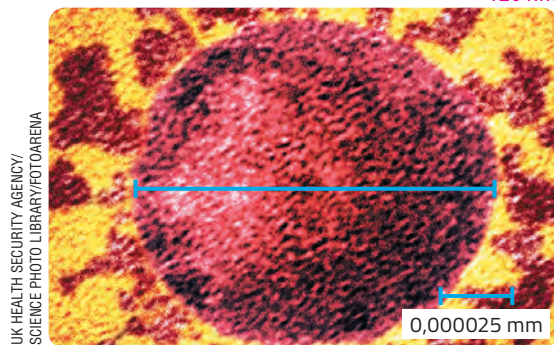
Algumas propriedades distinguem os vírus de outros microrganismos. A primeira está relacionada ao seu tamanho, o qual pode variar de 10 a 300 nm. Dessa forma, são considerados os menores microrganismos existentes, podendo ser visualizados apenas através da microscopia eletrônica. Para fins de comparação, lembremos que as bactérias e as hemácias possuem, em média, 10 a 15 vezes o tamanho dos vírus, o que possibilita a identificação destes por meio da microscopia óptica.

STEPHENS, Paulo Roberto Soares *et al.* Virologia. In: MOLINARO, Etelcia Moraes; CAPUTO, Luzia Fátima Gonçalves; AMENDOEIRA, Maria Regina Reis (org.). **Conceitos e métodos para formação de profissionais em laboratórios de saúde**. Rio de Janeiro: Escola Politécnica de Saúde Joaquim Venâncio: Instituto Oswaldo Cruz, 2009. v. 4, p. 126. Disponível em: www.epsjv.fiocruz.br/sites/default/files/cap2.pdf. Acesso em: 27 jun. 2024.

a) Em uma régua escolar comum, a distância entre duas marcações consecutivas indica a medida de 1 mm, que corresponde a 10^6 nanômetros (nm). Determine, em milímetro, as dimensões mínima e máxima do tamanho de um vírus.

b) A imagem a seguir é uma ampliação do vírus SARS-CoV-2, que causa a covid-19. Meça o diâmetro desse vírus, indicado na imagem, e expresse, em nanometro, a medida obtida.

120 nm



UK HEALTH SECURITY AGENCY/
SCIENCE PHOTO LIBRARY/FOTOFRENA

► Imagem de microscopia eletrônica do vírus SARS-CoV-2, aumento aproximado de 72 000 vezes quando impressa a 10 cm; colorida artificialmente.

c) Em média, qual é o intervalo de tamanho de uma bactéria? Expresse as medidas em metro.

9. Qual é o tempo estimado para realizar o *download* de um vídeo de 275 MB, com uma taxa de transferência média de 50 Mbps? 44 s

10. Elis organizou alguns arquivos em uma pasta armazenada em seu computador para fazer um *backup*, isto é, para fazer uma cópia de segurança desses arquivos em outro dispositivo. Observe informações sobre esses arquivos.

Tipos de arquivo	Espaço ocupado
Imagem	9 GB
Áudio	800 MB
Documento	210 MB
Vídeo	12 GB

Elis vai utilizar apenas uma das opções de dispositivos indicados nas alternativas a seguir para fazer o *backup* desses arquivos. Quais opções ela poderá escolher?

Ela poderá escolher os dispositivos das alternativas b, c ou d.

- a) 1 *pen drive* de 16 GB.
- b) 1 *HD* externo de 1 TB.
- c) 5 *DVDs* de 4,7 GB cada.
- d) 1 cartão de memória de 32 GB.
- e) 10 *CDs* de 700 MB cada.

11. Um problema comum após usar um *smartphone* por algum tempo é a falta de espaço de armazenamento. Em duplas, resolvam as questões a seguir.



- a) Pesquisem informações sobre o que é possível fazer para otimizar o espaço disponível de armazenamento nesses dispositivos.
- b) Com os dados da pesquisa, elaborem uma questão envolvendo as medidas de capacidade de armazenamento de dados. Em seguida, troquem os enunciados e resolvam um problema elaborado por outro grupo. Juntos, verifiquem se as respostas estão corretas.

Pesquisa dos estudantes.

12. Observe algumas informações sobre o *download* de um programa de antivírus.

Downloads			
Nome do arquivo	Progresso	Taxa de transferência	Tempo estimado
Antivírus #	0%	24 Mbps	49 s

ARTUR FUJITA

- a) Quantos megabites tem o arquivo desse *download*? E quantos megabaites?
- b) Se o *download* desse arquivo fosse realizado com uma taxa de transferência de 40 Mbps, qual seria o tempo estimado indicado?

13. a) • Resposta esperada: O desenvolvimento de tecnologias e recursos voltados à preservação do meio ambiente.
 • Respostas esperadas: Permite que arquivos digitais sejam armazenados em servidores especializados e possam ser acessados a qualquer momento. Possibilita reduzir a geração de resíduos eletrônicos, diminuir as emissões de CO₂ e poupar o uso de papel para impressão de documentos.

- 13.** A preocupação com a sustentabilidade tem se tornado um assunto global e cada vez mais urgente. Em meio a esse cenário, a indústria da tecnologia desenvolve inúmeras pesquisas e recursos voltados para a preservação ambiental.

Entre esses recursos, o armazenamento de dados em nuvem vem desempenhando um importante papel na redução do impacto ambiental. Alguns dos benefícios sustentáveis do armazenamento em nuvem são as reduções:

- de resíduos eletrônicos, pois as empresas diminuem a necessidade de atualizações de equipamentos eletrônicos e, consequentemente, o descarte dos equipamentos obsoletos;
- na emissão de CO₂, uma vez que, com menos servidores locais, a empresa reduz o consumo de energia elétrica e, consequentemente, a emissão de carbono associada à geração dessa energia;
- da utilização de papel, já que, com a virtualização dos documentos, é dispensável ou pouco recomendado o uso de papel para a impressão desses documentos.

a) Com base nas informações apresentadas no enunciado, responda aos itens a seguir.

- O enunciado ressalta de maneira positiva que tipo de iniciativa?
- O que a tecnologia do armazenamento em nuvem permite? E quais são seus benefícios?

b) Considere um sistema que disponibilize um espaço de 10 GB de armazenamento de dados em nuvem e que uma página de documento contendo texto e imagens tenha aproximadamente 80 kB. Quantas páginas de papel não precisarão ser impressas, caso seja utilizado todo o espaço de armazenamento desse sistema? **131 072 páginas de papel**

c) Utilizando um sistema de armazenamento em nuvem, o funcionário de uma empresa realizou o *backup* de 15 GB de arquivos criados em certo dia, o que demorou cerca de 4 minutos para a realização do *upload*. De quantos megabites por segundo foi a taxa de transferência de dados, em média, na realização desse *backup*? **512 Mbps**

- d)** Com um colega, pesquisem mais informações sobre o armazenamento em nuvem, como: as vantagens e desvantagens relatadas por usuários, alguns exemplos de plataformas que utilizam esse sistema e a influência no modo como pessoas e empresas salvam, acessam e compartilham informações. Depois, discutam os impactos sociais, econômicos e ambientais relacionados à utilização dessa tecnologia e elaborem um texto com base na pesquisa e na discussão realizadas.

Pesquisa dos estudantes.

NO MUNDO

DO TRABALHO Empregos verdes

Atualmente, há diversas iniciativas no mundo do trabalho que visam à sustentabilidade, como é o caso dos chamados "empregos verdes", que consistem em atividades profissionais que se preocupam com a proteção dos ecossistemas e da biodiversidade, utilizando estratégias e tecnologias com alto grau de eficiência para reduzir o consumo de energia, materiais e água, além de buscar a descarbonização da economia e a redução de todas as formas de poluição e produção de resíduos.

Os empregos verdes abrangem diferentes áreas e profissões, como o técnico instalador de painéis fotovoltaicos para a geração de energia limpa e renovável; o coletor de materiais recicláveis; o agricultor que usa a água com racionalidade e prioriza insumos orgânicos; o engenheiro ambiental que trabalha na proteção e na conservação do meio ambiente etc.

Acesse este *site* para assistir a um vídeo com mais informações sobre os empregos verdes.

- LEGNAIOLI, Stella. **Empregos verdes:** evitando o colapso com justiça ambiental. [São Paulo]: eCycle, c2010-2023. Disponível em: <https://www.ecycle.com.br/empregos-verdes/>. Acesso em: 27 jun. 2024.

Relações entre grandezas

Em muitas situações do cotidiano, temos duas ou mais grandezas que se relacionam de determinada maneira. Acompanhe, a seguir, alguns exemplos dessas situações.

DANIEL CYMBALISTA/
PULSAR IMAGENS



Exemplo 1:

Considerando a alta demanda de consumo de plástico no mundo e que, potencialmente, é necessário produzir uma grande quantidade de produtos que utilizam esse material, temos no processo de reciclagem uma alternativa para diminuir a quantidade de insumos utilizados na produção de novos materiais e produtos plásticos. A água, por exemplo, é um dos insumos que pode ter o consumo reduzido. Estima-se que a cada 1 t de plástico reciclado sejam economizados 450 L de água, que seriam utilizados no processo de produção convencional dessa mesma quantidade de plástico.

Fonte dos dados: ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DA INDÚSTRIA DO PLÁSTICO. Perfil 2018. São Paulo: Abiplast, [2021]. Localizável em: p. 28 do pdf. Disponível em: https://www.abiplast.org.br/wp-content/uploads/2019/10/perfil2018-web_VC.pdf. Acesso em: 27 jun. 2024.

Com base nas informações apresentadas, podemos relacionar as grandezas massa de plástico reciclado e o volume de água economizada.

Massa de plástico reciclado (t)	Volume de água economizada (L)
1	450
2	900
3	1 350
4	1 800
5	2 250

Note que, para cada quantidade de massa de plástico reciclado, está associada uma única quantidade de volume de água economizada. Nesse caso, podemos dizer que há uma relação entre a massa de plástico reciclado e o volume correspondente de água economizada.

Indicando por x a massa de plástico reciclado e por y o volume de água economizada correspondente, podemos escrever:

$$y = 450x$$

Volume de água economizada (L) em função da massa de plástico reciclado (t) ————— Volume de água economizada por tonelada de plástico reciclado (L/t) ————— Massa de plástico reciclado (t)

Nesse caso, o volume y de água economizada varia de acordo com a massa de plástico reciclado. Assim, dizemos que y é a **variável dependente** e x é a **variável independente** da expressão $y = 450x$.

Com a expressão $y = 450x$, podemos calcular, por exemplo, quantos litros de água são economizados com a reciclagem de 8 t de plástico.

$$y = 450 \cdot 8 = 3600$$

Logo, são economizados 3 600 L de água com a reciclagem de 8 t de plástico.

Também podemos calcular, por exemplo, quantas toneladas de plástico reciclado correspondem a uma economia de 6 750 L de água no processo de produção.

$$\begin{aligned} 6750 &= 450x \\ \frac{6750}{450} &= \frac{450x}{450} \\ 15 &= x \end{aligned}$$

Assim, ao reciclar 15 t de plástico, serão economizados 6 750 L de água na cadeia produtiva do plástico.

Exemplo 2:

Existem aplicativos de *smartphone* que permitem ao usuário comprar produtos em lojas e recebê-los em casa, mediante o pagamento de uma taxa de entrega. Em certo aplicativo, o cálculo da taxa de entrega considera um valor inicial fixo de R\$ 5,50 mais R\$ 0,25 a cada quilômetro percorrido entre a loja e o local da entrega. Essa relação entre a taxa de entrega e a distância percorrida pode ser representada pela expressão a seguir.



$$t = 5,50 + 0,25d$$

Taxa de entrega (R\$) em função da distância percorrida (km) — t — Valor inicial fixo (R\$) — 5,50 — Distância percorrida (km) — d — Valor adicional pago por quilômetro percorrido (R\$/km) — 0,25

Nessa situação, a taxa de entrega t é a variável dependente, e a distância percorrida d , a variável independente.

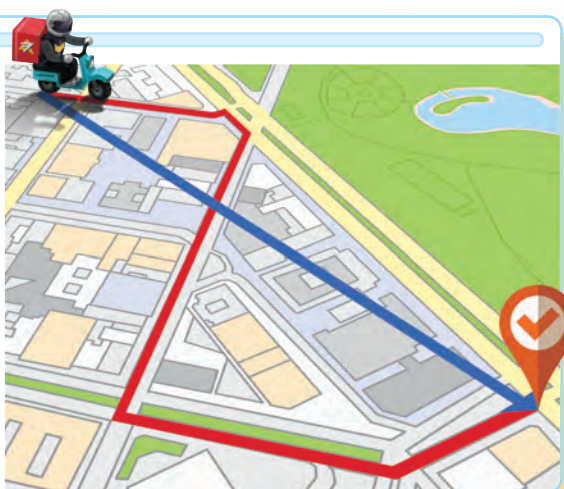
PARA PENSAR

Com base na expressão obtida para essa relação, determine:

- o valor da taxa de entrega de uma compra cuja distância percorrida é de 6 km; R\$ 7,00
- a maior distância percorrida possível para que o valor da taxa de entrega seja de até R\$ 12,00. 26 km

DICA

É importante destacar que a “distância percorrida” é uma grandeza escalar, ou seja, pode ser expressa pela medida do trajeto realizado. Já o “deslocamento” é uma grandeza vetorial, ou seja, corresponde à medida, em linha reta, entre a posição inicial e a posição final do trajeto. Em relação à situação apresentada, na figura está indicado, em vermelho, um exemplo de trajeto realizado em uma entrega, correspondente à distância percorrida (em km). E, em azul, está indicado o vetor correspondente ao deslocamento realizado.

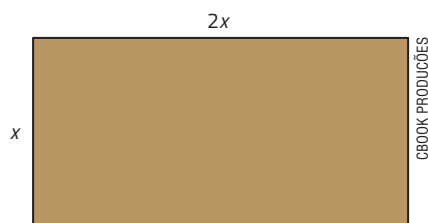


LEO TEIXEIRA

ALEXANDER DOBRIKOV/
SHUTTERSTOCK.COM

Exemplo 3:

Uma escola vai contratar o serviço de uma empresa de jardinagem para plantar grama em uma região a ser delimitada no pátio. Essa região deve ter formato de um retângulo cuja medida do comprimento seja o dobro da medida da largura, como mostrado na figura, em que x é a medida da largura, em metro.



O melhor preço que o colégio conseguiu foi o de uma empresa de jardinagem que orçou em R\$ 3,90 o plantio de cada metro quadrado de grama. Com base nessas informações, podemos relacionar o valor total v do serviço e a área $2x^2$ da região retangular por meio da expressão a seguir.

$$\text{Valor total do serviço de plantio (R\$) em função da área da região retangular (m}^2\text{)} \quad v = 3,90 \cdot 2x^2 \Rightarrow v = 7,80x^2$$

Valor do serviço de plantio por metro quadrado de grama (R\$/m²)

Área da região retangular (m²)

Nessa expressão, o valor total v do serviço de plantio é a variável dependente, e a medida x da largura da região retangular é a variável independente.

PARA PENSAR

Com base no exemplo 3, determine o valor total do serviço de plantio para diferentes medidas de largura da região retangular e registre em um quadro. **Resposta pessoal.**

ATIVIDADES

Não escreva no livro.

14. Resolva o item a seguir com base nas informações apresentadas no exemplo 1.
 - a) Em 2021, no Brasil, foi reciclado cerca de 1 milhão de toneladas de plástico. Com isso, quantos litros de água foram economizados nessa cadeia produtiva? **450 000 000 L**
15. Com base no exemplo 2, determine o valor da taxa de entrega para as seguintes distâncias percorridas: 3,8 km, 5 km, 6,5 km, 10 km e 12 km. Depois, registre os valores em um quadro.
Resposta nas Orientações para o professor.
16. Com base nas informações apresentadas no exemplo 3, resolva as questões a seguir.
 - a) Qual será o valor do serviço de jardinagem para o plantio de grama caso a largura da região retangular seja de 12 m? **R\$ 1.123,20**
 - b) Sabendo que o valor total do serviço foi de R\$ 1.755,00, determine as medidas da região retangular em que foi plantada grama.
15 m e 30 m
17. Considere um quadrado cuja medida do lado, em centímetro, é indicada por x .
 - a) Escreva uma expressão que relacione:
 - $p = 4x$ a) o perímetro p desse quadrado e a medida x ;
 - $a = x^2$ b) a área a desse quadrado e a medida x .
 - b) Com base nas expressões que você escreveu, calcule o perímetro e a área de um quadrado de lado $x = 5$. **perímetro: 20 cm; área: 25 cm²**
 - c) Determine o valor de x para que o quadrado tenha:
 - 56 cm de perímetro; **$x = 14$**
 - 144 cm² de área. **$x = 12$**
18. Em certo restaurante *self-service*, é cobrado R\$ 63,00 por kilograma de comida servida pelo cliente. Escreva uma expressão que relacione a massa m de comida, em grama, e a quantia p paga por uma refeição nesse restaurante, em reais. **$p = 0,063m$**

19. a) Sim. Algumas respostas possíveis: $c = \frac{120t}{100}$; $c = \frac{12t}{10}$; $c = \frac{6t}{5}$.

19. c) 6 h no máximo

19. O consumo de energia elétrica de um equipamento pode ser calculado por meio de uma expressão que relaciona o consumo à potência do equipamento. Observe o exemplo.

- Ferro de passar roupa de 1200 W de potência.



CARLOS FRANCO ARDILA/SHUTTERSTOCK.COM

Potência do ferro de passar roupa (kW)

$$c = \frac{1200}{1000} \cdot t$$

Tempo de uso (h)

Consumo de energia elétrica de um ferro de passar roupa (kWh) em função do tempo de uso (h)

DICA

A potência do ferro de passar roupa em watt (W) foi dividida por 1 000 para obter a potência em kilowatt (kW) e, consequentemente, o consumo de energia elétrica em kilowatt-hora (kWh).

- a) A expressão que representa o consumo de energia elétrica pode ser simplificada e expressa de outras maneiras? Registre alguma delas.
- b) Determine o consumo de energia elétrica de um ferro de passar roupa desse modelo, considerando que tenha sido utilizado por 8 h em um mês. **9,6 kWh**
- c) Por quantas horas um ferro de passar roupa desse modelo pode ser usado para que sejam consumidos, no máximo, 7,2 kWh?
- d) Agora, escolha um dos equipamentos indicados a seguir e escreva uma expressão que relacione o consumo c de energia elétrica (kWh) e o tempo t de uso do equipamento (h). Depois, estabeleça o tempo de uso mensal desse equipamento em uma residência e calcule o consumo de energia elétrica correspondente.

19. d) televisor: $c = \frac{90t}{1000}$; computador: $c = \frac{300t}{1000}$; aspirador de pó: $c = \frac{600t}{1000}$;

condicionador de ar: $c = \frac{1400t}{1000}$; micro-ondas: $c = \frac{2000t}{1000}$. Resposta pessoal.

Equipamento	Potência (W)
Televisor	90
Computador	300
Aspirador de pó	600
Condicionador de ar	1 400
Micro-ondas	2 000

- Verifique a potência de alguns equipamentos elétricos de sua residência e determine, para cada um deles, o consumo de energia elétrica em função do tempo. **Resposta pessoal.**

PARA AMPLIAR

Acesse este [site](https://www.enel.com.br/pt-saopaulo/simulador-tarifa-branca.html) para realizar uma simulação de tarifa de acordo com o consumo mensal de energia elétrica de alguns aparelhos. O consumo mensal será calculado ao indicar a potência dos aparelhos utilizados e o horário e a duração de uso.

- ENTIDADE NACIONAL DE ELETRICIDADE.

Simulador de tarifas. [S. /]: Enel, [2024].

Disponível em: <https://www.enel.com.br/pt-saopaulo/simulador-tarifa-branca.html>.

Acesso em: 24 jun. 2024.

20. (Enem/MEC) Os diretores de uma escola precisam construir um laboratório para uso dos alunos. Há duas possibilidades:

- (i) um laboratório do tipo **A**, com capacidade para 100 usuários, a um custo de 180 mil reais e gastos de 60 mil reais por ano para manutenção;
- (ii) um laboratório do tipo **B**, com capacidade para 80 usuários, a um custo de 120 mil reais e gastos com manutenção de 16 mil reais por ano.

Considera-se que, em qualquer caso, o laboratório implantado será utilizado na totalidade de sua capacidade. A economia da escola, na utilização de um laboratório tipo **B**, em vez de um laboratório tipo **A**, num período de 4 anos, por usuário, será de: **alternativa b**

- a) 1,31 mil reais. d) 2,36 mil reais.
b) 1,90 mil reais. e) 2,95 mil reais.
c) 2,30 mil reais.

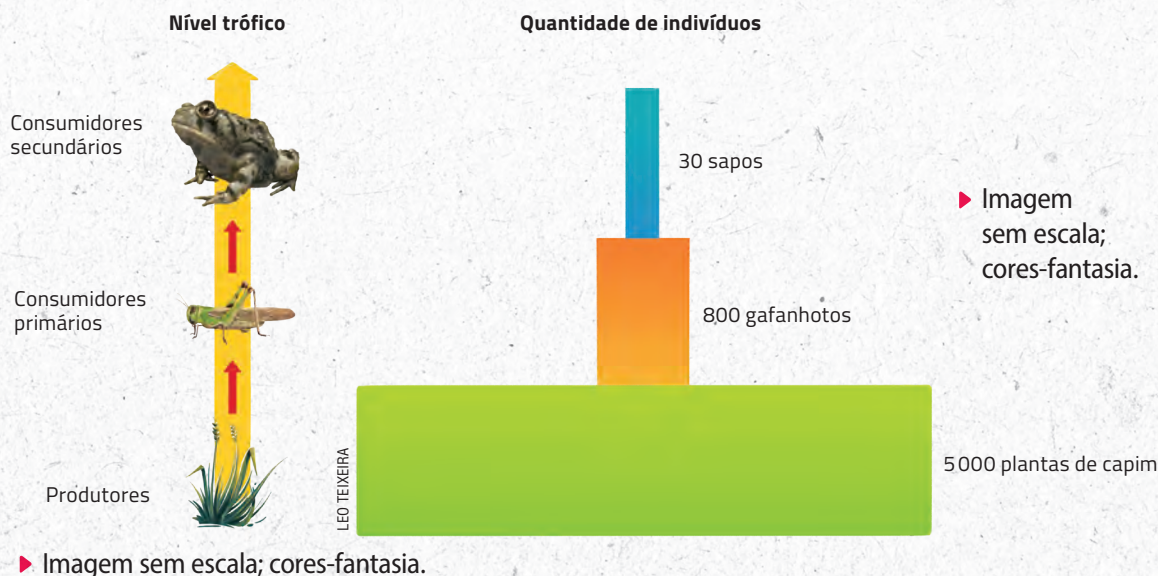
21. Com base na atividade 20, escreva para cada tipo de laboratório (**A** e **B**) uma expressão que relacione o custo total c da utilização do laboratório por usuário, em reais, e o período t de uso desse laboratório, em ano. Para isso, considere o uso da capacidade máxima do laboratório.

tipo **A**: $c = 1800 + 600t$; tipo **B**: $c = 1500 + 200t$

- 22.** As espécies que habitam um ecossistema costumam ser agrupadas em níveis tróficos, de acordo com sua principal fonte de nutrição e energia. A relação alimentar entre os indivíduos de cada nível desses pode ser representada por uma pirâmide ecológica, um esquema composto por figuras de retângulos ou de blocos de mesma altura correspondentes a cada nível trófico. Assim, a figura da base representa os produtores, seguidos, nessa ordem, pelos consumidores primários, consumidores secundários e assim por diante.

Fonte dos dados: REECE, Jane B. *et al.* **Biologia de Campbell**. 10. ed. Porto Alegre: Artmed, 2015. p. 1232-1241.

Um dos principais tipos de pirâmides ecológicas é a pirâmide de números, em que é indicada a quantidade de indivíduos em cada nível trófico. Considere, por exemplo, a pirâmide de números representada a seguir, obtida a partir da amostragem de indivíduos de determinado ecossistema.



Podemos observar que, no ecossistema representado, são necessárias 5 000 plantas de capim para alimentar 800 gafanhotos e, por sua vez, são necessários 800 gafanhotos para alimentar 30 sapos. Considerando essas informações, resolva os itens a seguir.

- a)** Em relação a esse ecossistema, escreva uma expressão que relacione a quantidade de:

- sapos e gafanhotos; $s = \frac{3}{80} g$, em que s e g são as quantidades de sapos e de gafanhotos, respectivamente.
- gafanhotos e plantas de capim.

$g = \frac{4}{25} c$, em que g e c são as quantidades de gafanhotos e de plantas de capim, respectivamente.

- b)** Nesse ecossistema, quantos sapos podem ser alimentados com 560 gafanhotos? **21 sapos**
- c)** Determine, nesse ecossistema, quantas plantas de capim seriam necessárias para alimentar 1 000 gafanhotos. **6 250 plantas de capim**



- d)** Diversas ações do ser humano impactam o meio ambiente e podem causar desequilíbrio da cadeia alimentar em alguns ecossistemas. Por exemplo: a caça ilegal, a realização de queimadas, o desmatamento de vegetação nativa etc. Em grupo, pesquisem e coletem dados sobre algum desses problemas e sobre alguma iniciativa existente que vise minimizar o impacto de ações humanas em um ecossistema específico. Depois, analisem as informações obtidas e elaborem uma proposta de intervenção ou conscientização para atenuar ou diminuir consideravelmente o problema pesquisado por vocês. Por fim, compartilhem com os colegas os resultados da pesquisa e a proposta elaborada, dando exemplos e justificando os argumentos apresentados. **Pesquisa e elaboração dos estudantes.**

- 23.** (Enem/MEC) O preço médio cobrado por um pintor para executar um serviço consiste em uma taxa fixa de R\$ 25,00 mais uma quantia proporcional à área pintada. O quadro apresenta os valores cobrados por ele em trabalhos recentes.

Área pintada (m ²)	Total a pagar (R\$)
5	35,00
10	45,00
20	65,00
40	105,00
80	185,00

Qual o preço cobrado para realizar um serviço de pintura de uma área de 150 m²? **alternativa b**

- a) R\$ 300,00
b) R\$ 325,00
c) R\$ 400,00
d) R\$ 1.050,00
e) R\$ 3.750,00
- 24.** Em relação à atividade **23**, escreva uma expressão que relacione o valor v cobrado pelo pintor, em reais, de acordo com a área a pintada, em metro quadrado. **$v = 2a + 25$**
- 25.** Sandra e Tiago vão utilizar um aplicativo de hospedagem para locar um apartamento durante uma viagem. Pelo apartamento escolhido, eles vão pagar R\$ 150,00 por dia mais R\$ 110,00 de taxas cobradas pelo aplicativo.
- a) Que quantia será paga pela locação do apartamento se eles ficarem hospedados por 7 dias? **R\$ 1.160,00**
- b) Escreva uma expressão que relacione o valor V pago pela locação desse apartamento, em reais, e a quantidade de diárias d .
 $V = 150d + 110$
- c) Nessas mesmas condições, outro casal locou esse apartamento e pagou R\$ 860,00 pela hospedagem. Por quantos dias esse casal locou o apartamento? **5 dias**
- 26.** Benício trabalha como técnico em uma companhia de abastecimento de água. Ao identificar um vazamento constante em certa tubulação,

ele colocou por algum tempo um recipiente medidor com capacidade de 5 L para coletar a água que gotejava e realizou anotações em diferentes momentos. Observe as anotações feitas por Benício e resolva as questões.

Tempo de gotejamento (min)	Quantidade de água no recipiente (mL)
5	90
12	216
20	360
28	504
35	630
45	810

- a) Quantos mililitros de água havia no recipiente após 12 min de gotejamento? **216 mL**
- b) Escreva uma expressão que relacione a quantidade q de água no recipiente (mL) e o tempo t de gotejamento (min). **$q = 18t$**
- c) Calcule o valor de q para $t = 60$. O que esse cálculo indica?
- d) Após quantas horas foi feito o reparo na tubulação, sabendo que havia nesse momento 4 320 mL de água no recipiente medidor? **4 h**
- 27.** Quando vamos consumir um alimento industrializado, é importante ficarmos atentos às informações nutricionais indicadas nos rótulos das embalagens, como quantidades de proteína, fibra alimentar, sódio, gordura etc.
- Em grupo, pesquisem informações nutricionais de um alimento em rótulos de embalagens e resolvam as seguintes questões.
- Pesquisa e elaboração dos estudantes.**
- a) Escolham um componente indicado nas informações nutricionais e escrevam uma expressão que relacione a quantidade de porções do alimento e a quantidade correspondente do componente nutricional escolhido.
- b) Elaborem uma questão envolvendo a expressão que vocês escreveram. Depois, troquem o enunciado com outro grupo e resolvam a questão que vocês receberam. Ao final, confirmem juntos as resoluções.

26. c) $q = 1\,080$. Indica que após 60 min de gotejamento havia 1 080 mL de água no recipiente.

Conceito de função

Analisamos alguns exemplos de relações entre duas ou mais grandezas em que uma grandeza varia de acordo com a variação de outra. Quando essa variação atende a determinados requisitos, é chamada de **função**. Todos os exemplos apresentados no tópico **Relações entre grandezas** são funções. Agora, ampliaremos e formalizaremos esse conceito, utilizando a associação entre elementos de dois conjuntos.

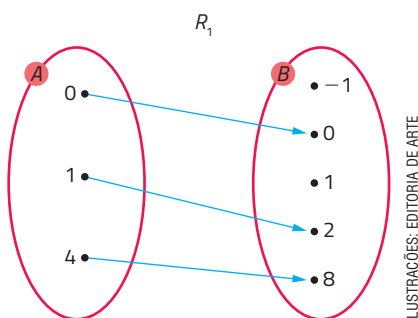
Dados dois conjuntos não vazios A e B , denominamos **função de A em B** a relação que associa cada elemento $x \in A$ a um único elemento $y \in B$. Podemos indicar uma função de A em B da maneira a seguir.

$$f: A \rightarrow B \text{ ou } A \xrightarrow{f} B \quad (\text{Lê-se: função } f \text{ de } A \text{ em } B.)$$

Em uma função, dizemos que y é a **variável dependente** e x é a **variável independente** da função.

Considere, por exemplo, os conjuntos $A = \{0, 1, 4\}$ e $B = \{-1, 0, 1, 2, 8\}$ e as relações (R_1 , R_2 e R_3) de A em B .

- R_1 : dados $x \in A$ e $y \in B$, temos $y = 2x$.

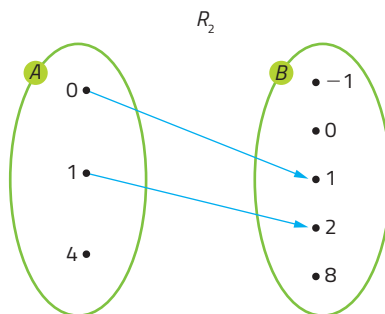


ILUSTRAÇÕES: EDITORIA DE ARTE

DICA	
Associando os elementos de A em B , por meio de R_1 , temos:	
x	$y = 2x$
0	$y = 2 \cdot 0 = 0$
1	$y = 2 \cdot 1 = 2$
4	$y = 2 \cdot 4 = 8$

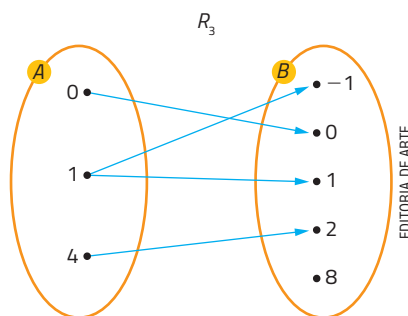
O esquema que representa os conjuntos A e B , os seus elementos e as setas indicando a relação R_1 é chamado de **diagrama de flechas**. Note que cada elemento de A tem apenas um correspondente em B . Nesse caso, dizemos que R_1 é uma função de A em B , expressa por $y = 2x$.

- R_2 : dados $x \in A$ e $y \in B$, temos $y = x + 1$.



Note que o elemento 4, em A , não está associado a qualquer elemento de B . Nesse caso, dizemos que R_2 não é uma função de A em B .

- R_3 : dados $x \in A$ e $y \in B$, temos $y^2 = x$.



Note que o elemento 1, em A , está associado a dois elementos de B : -1 e 1 . Nesse caso, dizemos que R_3 não é uma função de A em B .

PARA PENSAR

Que alteração pode ser feita no conjunto A ou no conjunto B para que a relação:

- R_2 seja uma função de A em B ? **Resposta esperada:** Excluir o elemento 4 do conjunto A ou incluir o elemento 5 no conjunto B .
- R_3 seja uma função de A em B ?

Resposta esperada: Excluir o elemento -1 ou o elemento 1 do conjunto B ou excluir o elemento 1 do conjunto A .

Uma vez definida uma função f de A em B , denominamos de:

- **domínio da função**, indicado por $D(f)$, o conjunto A ;
- **contradomínio da função**, indicado por $CD(f)$, o conjunto B ;
- **imagem de x** , indicada por $f(x)$, o elemento $y \in B$ associado a $x \in A$ pela função f ;
- **conjunto imagem da função**, indicado por $Im(f)$, o conjunto formado por todas as imagens dos elementos de A . Matematicamente, podemos escrever:

$$Im(f) = \{y \in B \mid y = f(x), \text{ para todo } x \in A\};$$

- **lei de formação** a expressão que estabelece a correspondência entre os valores de $x \in A$ e $y \in B$.

Observações:

- O conjunto imagem é um subconjunto do contradomínio da função.
- Nem toda função tem uma lei de formação que pode ser indicada por uma expressão matemática. Por exemplo, a função que relaciona o número da matrícula a cada estudante de uma turma da escola.

MATEMÁTICA NA HISTÓRIA

Diversos matemáticos, no decorrer da história, contribuíram para o desenvolvimento do estudo das funções. Um deles foi o matemático e físico suíço Leonhard Paul Euler (1707-1783) que, entre outras contribuições, propôs uma notação própria para funções, em que a variável dependente y é substituída por $f(x)$ na lei de formação.

Em relação à função cuja lei de formação é dada por $y = 2x$, temos:

$$f(x) = 2x$$

Lê-se: f de x é igual a $2x$.

Fonte dos dados: EVES, Howard. **Introdução à história da matemática**. Tradução: Hygino Hugueros Domingues. 4. ed. Campinas: Editora da Unicamp, 2007. p. 519.

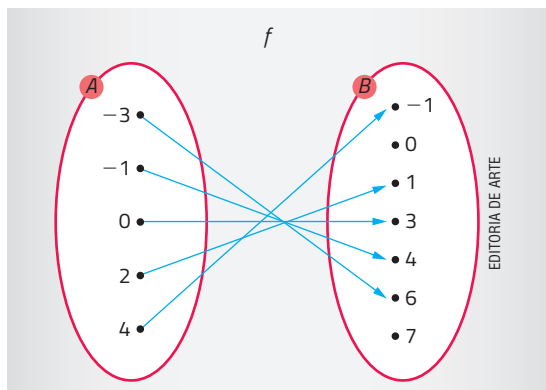
► HANDMANN, Jakob Emanuel. **Retrato de Leonhard Euler**. 1753. Pastel sobre papel, 57 cm \times 44 cm. Museu de Arte da Basileia, Suíça. Euler foi um dos matemáticos mais produtivos de sua época. No decorrer de seus estudos, publicou, entre livros e artigos, mais de 530 trabalhos.



PICTORIAL PRESS LTD/ALAMY/FOTORENA

ATIVIDADES RESOLVIDAS

- R5.** Considerando os conjuntos $A = \{-3, -1, 0, 2, 4\}$ e $B = \{-1, 0, 1, 3, 4, 6, 7\}$ e a função $f: A \rightarrow B$, representada pelo diagrama, resolva os itens.



- Determine o domínio e o contradomínio da função f .
- Qual é a imagem de -3 ? E a imagem de 4 ?
- Qual é o conjunto imagem de f ?

PARA PENSAR Respostas possíveis: $y = 3 - x$; $f(x) = 3 - x$. Resposta pessoal.

Escreva uma possível lei de formação para a função f . Com suas palavras, explique a um colega como você obteve essa lei de formação.

Resolução

- $D(f) = A = \{-3, -1, 0, 2, 4\}$ e $CD(f) = B = \{-1, 0, 1, 3, 4, 6, 7\}$.
- A imagem de -3 é 6 , ou seja, $f(-3) = 6$. A imagem de 4 é -1 , ou seja, $f(4) = -1$.
- $Im(f) = \{-1, 1, 3, 4, 6\}$.

- R6.** Considere a função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida pela lei de formação $f(x) = x^2$.

- Qual é a imagem de -7 ?
- Determine os valores de $x \in \mathbb{R}$ cuja imagem seja igual a 4 .
- Qual é o conjunto imagem de f ?

Resolução

- $f(-7) = (-7)^2 = 49$

Portanto, a imagem de -7 é 49 .

- $f(x) = 4 \Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow \begin{cases} x = \sqrt{4} = 2 \\ \text{ou} \\ x = -\sqrt{4} = -2 \end{cases}$

Portanto, nessa função, 2 e -2 têm imagem igual a 4 .

- A função f associa cada número real x a um número real y que é o quadrado de x . Uma vez que o quadrado de todo número real é maior ou igual a zero e, também, que todo número real maior ou igual a zero pode ser expresso por um número real ao quadrado, por exemplo, $x = (\sqrt{x})^2$, para $x \in \mathbb{R}_+$, temos que $Im(f) = \{y \in \mathbb{R} \mid y \geq 0\}$.

Respostas esperadas: Dos números reais não negativos. Esses números formam o conjunto \mathbb{R}_+ .

PARA PENSAR

Podemos calcular a raiz quadrada de quais números reais? Esses números formam qual conjunto numérico? Se necessário, utilize uma calculadora científica.

R7. Certo restaurante cobra pelas refeições de acordo com a massa de alimento servida no prato, conforme apresentado no cartaz.

- a) Escreva a lei de formação de uma função que represente o preço p cobrado nesse restaurante, em reais, por uma refeição com m quilograma.
- b) Quanto esse restaurante cobrará por uma refeição com meio quilograma?

Resolução

- a) Como no restaurante há duas maneiras de cobrar pelas refeições (até 600 g e mais de 600 g), escrevemos duas sentenças na lei de formação da função:

$$p(m) = \begin{cases} 42,50m, & \text{se } 0 < m \leq 0,600 \\ 25,50, & \text{se } m > 0,600 \end{cases}$$

- b) $p(0,5) = 42,50 \cdot 0,5 = 21,25 \rightarrow \text{R\$ } 21,25$



DICA

Note que, na função p , a sentença da lei de formação que é utilizada para calcular uma imagem depende do valor de x . Assim, a sentença $p(m) = 42,50m$ é utilizada para $0 < m \leq 0,600$, e a sentença $25,50$, para $m > 0,600$. Funções como essa são chamadas de **função definida por mais de uma sentença**.

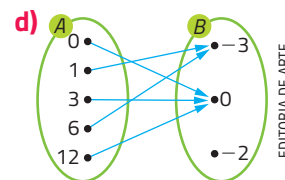
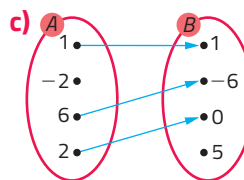
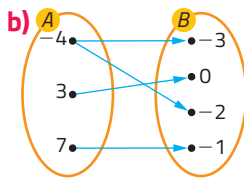
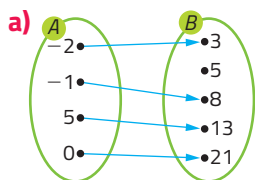


BENTINHO

ATIVIDADES

Não escreva no livro.

- 28.** Quais das relações representadas a seguir correspondem a uma função de A em B ? Justifique sua resposta. Alternativas **a** e **d**. Resposta pessoal.



EDITORIA DE ARTE

- 29.** Utilizando diagrama, represente a função $f: A \rightarrow B$, sendo $A = \{-3, -2, 0, 1\}$ e $B = \{-5, -3, 0, 1, 3, 5\}$, cuja lei de formação é dada por $y = 2x + 1$, com $x \in A$ e $y \in B$. Em seguida, determine $D(f)$, $CD(f)$ e $Im(f)$.

- 30.** Dada a função $g: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ definida por $g(x) = 3x + 5$, calcule:

a) $g(3)$. 14

b) $g(0)$. 5

c) $g(10)$. 35

d) $g(5)$. 20

- Agora, defina uma função indicando o domínio, o contradomínio e a lei de formação. Em seguida, calcule a imagem de alguns valores do domínio dessa função. Respostas pessoais.

- 31.** Considerando os conjuntos $A = \{-15, -8, -2, 0, 4, 5\}$ e $B = \{0, 1, 5, 7, 13, 14, 15, 19, 20\}$, determine quais das expressões a seguir correspondem à lei de formação de uma função de A em B . alternativas **b** e **c**

a) $h(x) = 22 + x$

c) $m(x) = x + 15$

e) $p(x) = -x$

b) $f(x) = 5 - x$

d) $g(x) = -1 - x$

- 32.** Dada a função $A \xrightarrow{f} B$, temos que: Resposta nas Orientações para o professor.

▪ $D(f) = \{-2, 0, 3, 5\}$;

▪ $CD(f) = \{-5, -4, 0, 2, 3, 6, 8\}$;

▪ $Im(f) = \{-4, 3, 6, 8\}$.

De acordo com essas informações, construa um diagrama para representar a função f .

29. Resposta nas Orientações para o professor. $D(f) = \{-3, -2, 0, 1\}$; $CD(f) = \{-5, -3, 0, 1, 3, 5\}$; $Im(f) = \{-5, -3, 1, 3\}$.

33. Leia o texto e, em seguida, faça o que se pede em cada item.

O Imposto de Renda da Pessoa Física (IRPF) é um imposto federal que incide sobre a renda (salários, pensões, aluguéis etc.) de contribuintes que residem no Brasil ou que recebem renda de fontes no Brasil. Parte da arrecadação do IRPF é destinada a investimentos em saúde, educação, segurança, saneamento, programas de transferência de renda, entre outros. O valor do imposto cobrado de cada contribuinte varia de acordo com a renda, conforme segue.

Tabela de incidência mensal do IRPF, em vigor no ano-calendário de 2023*

Base de cálculo (R\$)**	Alíquota (%)***	Parcela a deduzir do IRPF (R\$)****
Até 2.112,00	Isento	0
De 2.112,01 até 2.826,65	7,5	158,40
De 2.826,66 até 3.751,05	15	370,40
De 3.751,06 até 4.664,68	22,5	651,73
Acima de 4.664,68	27,5	884,96

* Tributação a partir de maio de 2023. **Valor da renda mensal do contribuinte. ***Porcentual da renda do contribuinte referente ao valor do IRPF. ****Valor do desconto concedido sobre o valor do IRPF.

Fonte dos dados: BRASIL. Ministério da Fazenda. Receita Federal. **Tributação de 2023**. Brasília, DF: MF; RFB, 9 fev. 2024. Disponível em: <https://www.gov.br/receitafederal/pt-br/assuntos/meu-imposto-de-renda/tabelas/2023>. Acesso em: 27 jun. 2024.

PARA AMPLIAR

Acesse este vídeo para obter mais informações sobre o IRPF.

- HISTÓRIA do Imposto de Renda. [S. l.: s. n.], 2016. 1 vídeo (5 min). Publicado pelo canal Receita Federal. Disponível em: <https://www.youtube.com/watch?v=iT6R1atkifk>. Acesso em: 27 jun. 2024.

Podemos expressar uma função f por mais de uma sentença para relacionar o valor do IRPF (em reais) de acordo com a renda mensal r do contribuinte, ou seja, $f(r)$ designa o valor do imposto a ser pago. Por exemplo:

- o contribuinte que recebe até R\$ 2.112,00 é isento, então: $f(r) = 0$, se $r \leq 2.112,00$;
- o contribuinte que recebe de R\$ 2.112,01 até R\$ 2.826,65 tem alíquota de 7,5% e R\$ 158,40 de dedução, então:
 $f(r) = 0,075r - 158,40$, se $2.112,01 \leq r \leq 2.826,65$.

$$33. c) \begin{cases} 0, & \text{se } r \leq 2.112,00 \\ 0,075r - 158,40, & \text{se } 2.112,01 \leq r \leq 2.826,65 \\ 0,15r - 370,40, & \text{se } 2.826,66 \leq r \leq 3.751,05 \\ 0,225r - 651,73, & \text{se } 3.751,06 \leq r \leq 4.664,68 \\ 0,275r - 884,96, & \text{se } r > 4.664,68 \end{cases}$$

a) Calcule o valor do IRPF para um contribuinte que tem renda mensal de:

- R\$ 2.000,00. **isento**
- R\$ 2.500,00. **R\$ 29,10**
- R\$ 3.200,00. **R\$ 109,60**

b) Determine as sentenças que expressem a função f para:

- $2.826,66 \leq r \leq 3.751,05$. **$f(r) = 0,15r - 370,40$**
- $3.751,06 \leq r \leq 4.664,68$. **$f(r) = 0,225r - 651,73$**
- $r > 4.664,68$. **$f(r) = 0,275r - 884,96$**

c) Com base no enunciado e nas respostas ao item **b**, escreva a lei de formação da função f .

d) Calcule $f(5000)$ e interprete o resultado obtido.

- 👤 **e)** Você e um colega devem escolher uma profissão e investigar o piso salarial correspondente dessa categoria profissional. Depois, calculem o IRPF a ser pago pela categoria profissional escolhida, considerando o piso salarial. **Resposta pessoal.**

33. d) $f(5000) = 490,04$. Esse cálculo indica que um contribuinte, cuja renda mensal é R\$ 5.000,00, paga R\$ 490,04 de IRPF.

INTEGRANDO COM...

CIÊNCIAS DA NATUREZA E SUAS TECNOLOGIAS

Velocidade de conexão

No Brasil, a internet residencial começou a ser comercializada em meados de 1995. O acesso era por meio da “internet discada”, que ocupava a linha telefônica durante seu uso e, se comparada com a conexão disponível atualmente, pode ser considerada lenta e limitada.

Com o passar do tempo, o desenvolvimento de novas tecnologias tornou possível navegar na internet usando a conexão de banda larga fixa, o que possibilita maior velocidade e melhor qualidade, exigências dos usuários contemporâneos. Atualmente, há diversas operadoras de internet que oferecem os mais variados planos de conexão e serviços de banda larga fixa para atender ao perfil do usuário.

Ao escolher um desses planos, é importante ficar atento a alguns requisitos, como as velocidades de *download* e *upload* contratadas. A Agência Nacional de Telecomunicações (Anatel) é o órgão responsável pelas regulamentações e fiscalizações dos serviços prestados pelas operadoras de telefonia e internet no país. Dessa maneira, os consumidores que se sentirem prejudicados pela operadora contratada e que não tiveram a situação resolvida por ela, podem registrar uma reclamação na Anatel.

PARA AMPLIAR

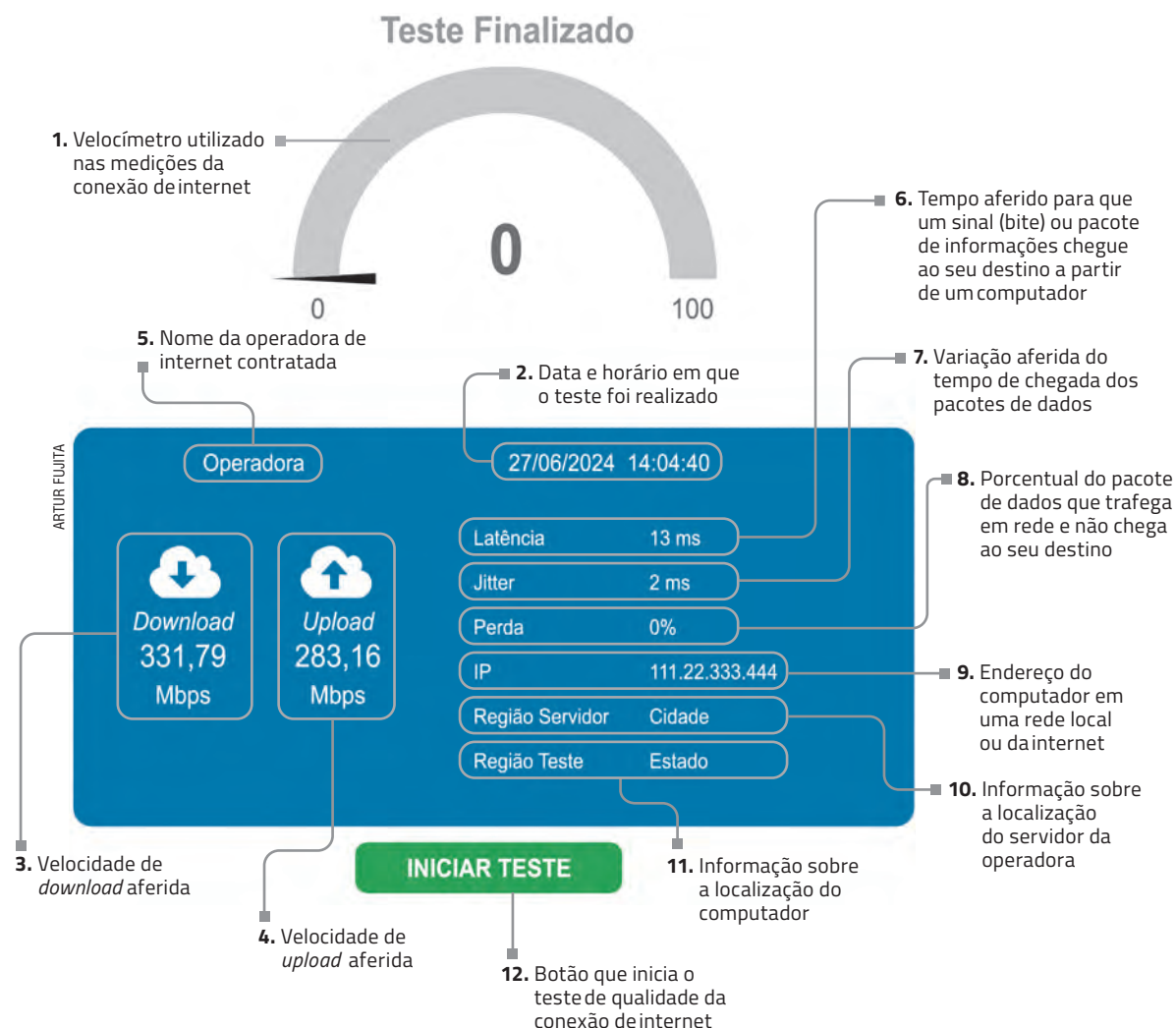
Acesse este *site* para obter informações sobre como realizar uma reclamação acerca dos serviços prestados por operadoras de telefonia e internet.

- BRASIL. Ministério das Comunicações. Agência Nacional de Telecomunicações. **Registrar reclamação**. Brasília, DF: Mcom: Anatel, 28 dez. 2022. Disponível em: <https://www.gov.br/anatel/pt-br/consumidor/quer-reclamar/reclamacao>. Acesso em: 28 mar. 2024.

São vários os tipos de serviço de internet disponibilizados hoje em dia, cada um deles com funcionalidade e eficiência específicas. Independentemente do tipo de conexão de internet, se discada, via rádio, banda larga, fibra óptica ou móvel (4G ou 5G), é importante escolher um plano que atenda às necessidades específicas do usuário e verificar a velocidade de *download* e *upload* da conexão fornecida pelo plano de internet contratado.

Teste de qualidade de conexão

Para atender às regulamentações da Anatel, foi criada a Entidade de Suporte à Aferição da Qualidade (Esaq), que permite ao usuário medir a qualidade da conexão de internet. Essa medição pode ser feita no *site* www.brasilbandalarga.com.br (acesso em: 27 jun. 2024) ou no aplicativo Esaq, disponível nas lojas de aplicativos. Acompanhe, a seguir, as informações obtidas em um teste realizado com essa ferramenta.



Fonte dos dados: ENTIDADE DE SUPORTE À AFERIÇÃO DA QUALIDADE. **Meça a qualidade da sua conexão.** [S. l.]: Esaq, c2024. Disponível em: <https://www.brasilbandalarga.com.br/>. Acesso em: 19 ago. 2024.

DICA

Para aferir a velocidade de conexão de internet das operadoras de banda larga fixa, a Anatel distribuiu, a voluntários que se inscreveram no *site* da Esaq, aparelhos que são conectados ao roteador e que transmitem informações sobre a conexão.

Para aferir a velocidade de conexão de internet das operadoras de banda larga móvel, a Anatel busca as informações no aplicativo Esaq instalado por usuários de dispositivos móveis.

Os dados coletados pela Anatel são divulgados mensalmente no *site* da Esaq (disponível em: <https://www.gov.br/anatel/pt-br/dados/qualidade/qualidade-dos-servicos>; acesso em: 8 out. 2024).

1. a) *Upload* ("subir", em tradução simples) é a ação de transferir dados de um terminal local para um sistema remoto; *download* ("baixar" em tradução simples) corresponde ao ato de transferir dados de um sistema remoto para um terminal local.

PENSANDO NO ASSUNTO

Não escreva no livro.

- Upload* e *download* são termos em inglês amplamente utilizados no contexto de tecnologia da informação e comunicação.
 - Qual é o significado de cada um desses termos? Se necessário, realize uma pesquisa.
 - Redija um pequeno texto, empregando os termos *upload* e *download*, que descreva uma situação cotidiana. *Resposta pessoal.*
- Quantos segundos seriam necessários para realizar, em certo computador, o *download* de um arquivo de 4 MB, considerando o acesso de:
 - internet discada com velocidade de *download* de 56 kbps? *aproximadamente 585 s*
 - banda larga com velocidade de *download* de 10 Mbps? *3,2 s*
- Bia contratou um plano de internet com velocidade de 500 Mbps para *download* e 35 Mbps para *upload*. Observe o histórico de medições da conexão de internet realizadas por ela.

3. Resposta esperada: A medição 1 está de acordo com o parâmetro estabelecido. A medição 2 não está de acordo com o parâmetro estabelecido. A medição 3 está de acordo com o parâmetro estabelecido.

Medição	1	2	3
Velocidade			
<i>Download</i> (Mbps)	509,48	185	410
<i>Upload</i> (Mbps)	35,23	12,95	28,7

Faça uma análise comparando essas medições com o plano contratado por Bia. Para isso, considere como parâmetro de uma prestação de serviço adequada aquela em que a velocidade de conexão de internet medida corresponda a, no mínimo, 80% da velocidade contratada.

- Elabore uma situação-problema envolvendo o tema velocidade de conexão e o conceito de função estudado nesta Unidade. Em seguida, troque-a com um colega para que ele a resolva, enquanto você resolve aquela que ele elaborou. No final, confirmem juntos as resoluções. *Elaboração do estudante.*
- Reúnam-se em grupos de três integrantes e investiguem um plano de internet de banda larga fixa disponível na região em que moram. O plano pode ser da residência de algum integrante do grupo, de uma pessoa fora do âmbito e do contexto escolares ou até mesmo da própria escola. Nessa investigação, explorem a questão a seguir. *A atividade pode ser ampliada para que os estudantes também possam verificar, de maneira aproximada, a velocidade média mensal de um plano de internet.*

As velocidades de *download* e de *upload* do plano contratado com a operadora estão sendo atendidas?

De acordo com o plano de internet escolhido, resolvam os itens propostos. *Respostas pessoais.*

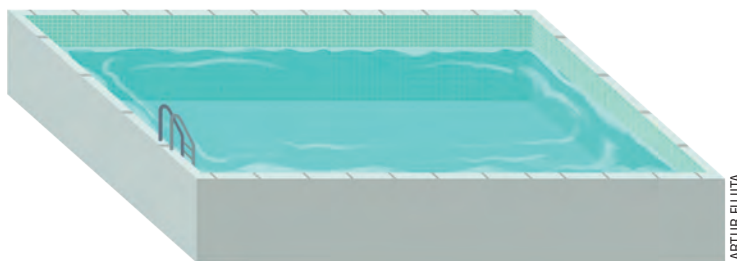
- Identifiquem e registrem as velocidades de *download* e de *upload* do plano contratado.
- Estabeleçam um parâmetro para que seja considerada adequada a prestação de serviço da operadora. Por exemplo, que seja atendida a velocidade de conexão de internet de, no mínimo, 80% da velocidade contratada.
- Em um computador, naveguem na internet e façam *download* e *upload*. Registrem o que vocês puderam perceber em relação à velocidade dessa internet.
- Acessem o *site* da Esaq e testem a qualidade da conexão de internet em alguns momentos de um mesmo dia. Registrem o horário de cada medição e as velocidades de *download* e *upload* aferidas. Por fim, escolham algum recurso para representar esses dados, como: tabela, esquema, gráfico, planilha eletrônica etc.
- Com base nos itens resolvidos, elaborem um texto relacionando a questão proposta inicialmente na investigação com os dados obtidos sobre o plano de internet escolhido.

• Estudo do domínio de uma função real

Com base no conceito de função apresentado anteriormente, para definir formalmente uma função f de A em B , é necessário que sejam dados o domínio $D(f) = A$, o contradomínio $CD(f) = B$ e a lei de formação de f , isto é, os conjuntos A e B e a relação de correspondência entre eles.

Agora, vamos analisar a situação a seguir.

Em certo clube, há uma piscina com formato de bloco retangular cuja profundidade máxima é 160 cm. Para determinar a quantidade q de água nessa piscina, em metro cúbico, pode ser utilizada uma função dada pela lei de formação $q(p) = 0,5p$, em que p indica a altura do nível de água, em centímetro. Observe, a seguir, alguns valores de $q(p)$ para determinados valores de p .



p	$q(p)$
1	$q(1) = 0,5 \cdot 1 = 0,5$
2	$q(2) = 0,5 \cdot 2 = 1$
3	$q(3) = 0,5 \cdot 3 = 1,5$
10	$q(10) = 0,5 \cdot 10 = 5$
100	$q(100) = 0,5 \cdot 100 = 50$

Esta linha indica que, quando o nível da água atinge 100 cm de altura, há 50 m³ de água na piscina.

Note que a piscina pode estar vazia, o que indica zero centímetro no nível de água. O maior nível de água possível é 160 cm, que corresponde à profundidade máxima da piscina. Com isso, podemos definir o domínio da função q como $D(q) = \{p \in \mathbb{R} \mid 0 \leq p \leq 160\}$ e o contradomínio de q como $CD(q) = \mathbb{R}$.

DICA

O domínio da função q também pode ser expresso pelo intervalo real $D(q) = [0, 160]$.

Assim como na situação apresentada anteriormente, em alguns casos é possível indicar uma função de maneira direta apenas por sua lei de formação, não explicitando seu domínio e seu contradomínio. Quando isso acontece, consideramos o domínio da função como o maior subconjunto de \mathbb{R} possível, restrito de acordo com o contexto em estudo ou pela lei de formação, e o contradomínio como o próprio \mathbb{R} .

Quando uma função tem, como domínio e contradomínio, subconjuntos de \mathbb{R} , dizemos que ela é uma **função real de variável real**.

34. • Resposta pessoal. Nos itens **a**, **c**, **e** e **f**, para determinar o domínio da função é necessário assegurar que o denominador seja diferente de zero. Nos itens **b**, **d**, **e** e **g**, para determinar o domínio da função é preciso garantir que o radicando seja maior que zero.

ATIVIDADES RESOLVIDAS

R8. Determine o domínio da função definida por

$$f(x) = \frac{6}{2x + 10}.$$

Resolução

Para determinar o domínio da função, é preciso considerar o maior subconjunto possível de \mathbb{R} . Para isso, vamos analisar as restrições para os valores de x de acordo com a lei de formação. Como não há divisão por zero definida em \mathbb{R} , temos que:

$$2x + 10 \neq 0 \Rightarrow x \neq -5$$

Portanto, $D(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq -5\}$.

R9. Obtenha o domínio da função definida por $g(u) = \sqrt{4u - 7}$.

Resolução

Como não está definida em \mathbb{R} a raiz quadrada de números negativos, temos que:

$$4u - 7 \geq 0 \Rightarrow u \geq \frac{7}{4}$$

Portanto, $D(g) = \left\{u \in \mathbb{R} \mid u \geq \frac{7}{4}\right\}$.

R10. Explícite o domínio da função definida por $f(x) = \frac{\sqrt{2x+5}}{x-2}$.

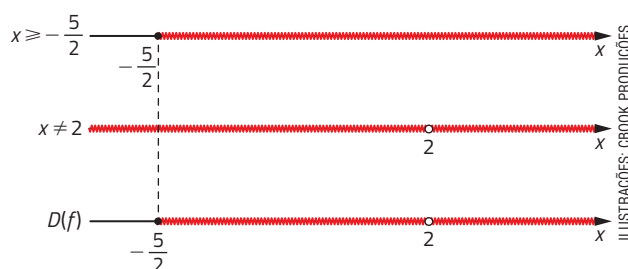
Resposta esperada: Porque não está definida em \mathbb{R} a raiz quadrada de números negativos e não há divisão por zero definida em \mathbb{R} .

Resolução

Temos duas condições a ser consideradas: $2x + 5 \geq 0$ e $x - 2 \neq 0$. Segue que:

- $2x + 5 \geq 0 \Rightarrow x \geq -\frac{5}{2}$;
- $x - 2 \neq 0 \Rightarrow x \neq 2$.

Como ambas as condições precisam ser satisfeitas simultaneamente, o domínio da função será a interseção dos intervalos obtidos. Representando na reta real, temos:



Portanto, $D(f) = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \geq -\frac{5}{2} \text{ e } x \neq 2\right\}$.

PARA PENSAR

Explique, com suas palavras, por que foram consideradas as condições $2x + 5 \geq 0$ e $x - 2 \neq 0$.

ATIVIDADES

Não escreva no livro.

34. Obtenha o domínio da função definida em cada item.

a) $f(x) = \frac{9 - 2x}{2x - 6}$

d) $f(x) = \frac{\sqrt{7x+5}}{\sqrt{6x+1}}$

g) $f(x) = \sqrt{\frac{x-3}{x+4}}$

$D(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid x < -4 \text{ ou } x \geq 3\}$

b) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{9x+3}}$

e) $f(x) = \frac{3}{2x^2 - 800} + \sqrt{3x - 5}$

34. e) $D(f) = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \geq \frac{5}{3} \text{ e } x \neq 20\right\}$

c) $f(x) = \frac{4}{x^2 - 81}$

f) $f(x) = \frac{11}{\sqrt[3]{x}}$ $D(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 0\}$

- Produza um texto explicando o procedimento geral utilizado para definir o domínio da função em cada item.

35. Qual destas funções tem como domínio o intervalo real representado a seguir? Justifique. Alternativa d. Resposta pessoal.



a) $f(x) = \frac{\sqrt{9-x}}{\sqrt{7x-4}}$

d) $f(x) = \frac{\sqrt{7x-4}}{\sqrt{9-x}}$

b) $f(x) = 4\sqrt{9-x}$

e) $f(x) = \frac{7x-4}{8-x}$

c) $f(x) = \frac{9-x}{7x-4}$

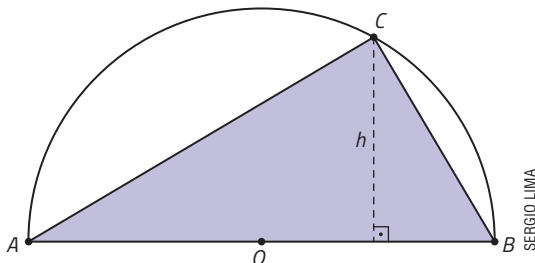
DICA

Lembre-se de que o quociente da divisão entre dois números é positivo se ambos os números são positivos ou se ambos são negativos.

36. b) $A(h) = \frac{20 \cdot h}{2}$ ou $A(h) = 10h$

39. c) 133 quadrados vermelhos e 399 verdes.

36. Para uma atividade da aula de Matemática, Larissa construiu, no **GeoGebra**, um triângulo ABC inscrito em uma semicircunferência de raio 10 cm, como mostra a imagem a seguir.



Na construção, é possível movimentar o ponto C sobre a semicircunferência, variando a medida da altura h .

- Qual é a área do triângulo quando ajustamos o ponto C de maneira que $h = 4$ cm?
40 cm²
- Escreva uma função A que expresse a área do triângulo ABC em função do valor de h .
- Obtenha o domínio da função A , descrita no item b. $D(A) = \{h \in \mathbb{R} \mid 0 < h \leq 10\}$

37. Um grupo de amigos foi jogar vôlei de praia. Eles tinham rede, bola, trena e fita para fazer marcações. Quanto à quadra de jogo, eles sabiam apenas que tinha formato retangular com 48 m de perímetro.

DICA

Para resolver o item a, pense em como expressar a medida do outro par de lados da figura retangular a partir da medida x .

Com base nessas informações, resolva os itens a seguir.

- Represente a quadra de jogo, considerando que o perímetro é 48 m e que um dos pares de lados mede x . **Resposta nas Orientações para o professor.**
- Escreva a lei de formação de uma função f que relacione a área da quadra de jogo com a medida x . **$f(x) = 24x - x^2$**
- Qual é o domínio da função f cuja lei de formação você escreveu no item b? Justifique sua resposta.
- Sabendo que a quadra de jogo de vôlei de praia tem medidas oficiais quando $x = 8$, determine as medidas de suas dimensões e de sua área. **dimensões: 8 m e 16 m; área: 128 m²**

37. c) $D(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x < 24\}$. O domínio corresponderá a todos os valores de $x > 0$ para os quais $f(x) > 0$, pois, de acordo com o contexto, x e $f(x)$ só podem assumir valores positivos.

39. d) Figura 300. Essa figura é formada por 300 quadrados vermelhos.

38. Marcos faz anúncios dos produtos de sua loja *on-line* em uma rede social. Ele percebeu que, quanto mais anúncios são realizados nessa rede social, maior é a quantidade de vendas na loja. Para expressar essa relação, ele escreveu a função definida por $V(x) = \frac{3}{5}x + 90$, em que V corresponde à quantidade de vendas semanais na loja e x , à quantidade de anúncios realizados em uma semana.

De acordo com o limite de anúncios permitido por essa rede social, Marcos utilizou a função que escreveu e verificou que, semanalmente, a loja pode atingir no máximo 150 vendas. Qual é o domínio da função V escrita por Marcos?

$$D(V) = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x \leq 100\}$$

39. Em trios, observem a sequência de figuras formadas por quadrados vermelhos e verdes. Depois, resolvam as questões.



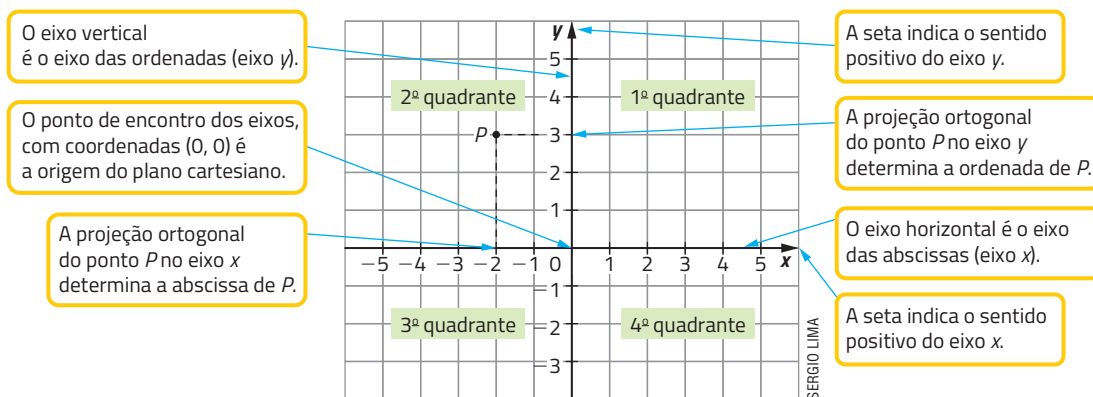
- Quantos quadrados vermelhos e verdes formam a próxima figura dessa sequência?
4 quadrados vermelhos e 12 verdes
- Expliquem como as figuras dessa sequência podem ser obtidas.
- Quantos quadrados vermelhos e verdes formam a figura **133**?
- Que figura dessa sequência é formada por 900 quadrados verdes? Essa figura é formada por quantos quadrados vermelhos?
- É possível que uma figura dessa sequência seja formada por exatamente 31 quadrados verdes? Expliquem. **Não, pois 31 não é múltiplo positivo de 3.**
- Escrevam a lei de formação da função f que descreve a quantidade de quadrados verdes a partir do número n da figura da sequência. Qual é o domínio dessa função?
 $f(n) = 3n$. $D(f) = \{n \in \mathbb{N} \mid n > 0\}$.
- Escrevam a lei de formação da função g que descreve o número da figura a partir da quantidade x de quadrados verdes. Qual é o domínio dessa função?

39. b) Resposta esperada: As figuras dessa sequência são formadas por quadrados vermelhos (fileira horizontal superior) e verdes (fileira horizontal inferior) cujas quantidades correspondem, respectivamente, à sequência dos números naturais positivos e à sequência dos múltiplos positivos de 3.

39. g) $g(x) = \frac{x}{3}$. $D(g) = \{x \in \mathbb{N} \mid x \text{ é múltiplo positivo de 3 e } x > 0\}$.

Gráfico de uma função

Um dos modos de representar uma função é por meio do seu gráfico. Geralmente, o gráfico de uma função é construído em um plano cartesiano. Vamos retomar alguns elementos do plano cartesiano, assunto que provavelmente você já estudou no Ensino Fundamental. Observe o plano cartesiano a seguir e um ponto P representado nele.



A localização de cada ponto do plano cartesiano é indicada por coordenadas cartesianas, que são representadas por um **par ordenado** na forma (x, y) , em que x é a abscissa e y é a ordenada do ponto. No plano cartesiano apresentado, o ponto P tem coordenadas $(-2, 3)$ e pode ser indicado por $P(-2, 3)$.

Para representar o gráfico de uma função em um plano cartesiano, indicamos a variável dependente no eixo das ordenadas e a variável independente no eixo das abscissas.

De modo geral, podemos dizer que:

O gráfico de uma função f é o conjunto dos pontos $(x, f(x))$ do plano cartesiano em que $x \in D(f)$.

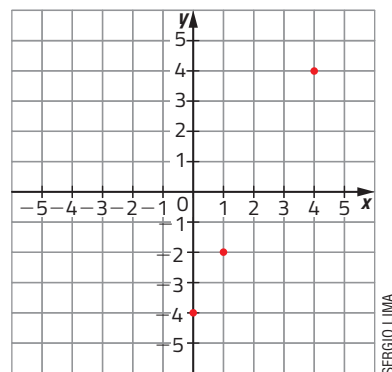
Agora, acompanhe nos exemplos a seguir a construção do gráfico de algumas funções definidas pela mesma lei de formação, mas com domínios diferentes.

Exemplo 1:

Seja uma função $g: A \rightarrow \mathbb{R}$, com $A = \{0, 1, 4\}$, cuja lei de formação é dada por $g(x) = 2x - 4$.

Como o conjunto A é finito, o gráfico de g será composto dos pontos $(x, g(x))$ em que $x \in D(g)$. Assim, para construir o gráfico de g , calculamos a imagem $y = g(x)$ para cada elemento $x \in D(g)$, determinando os pares ordenados $(x, g(x))$. Por fim, representamos no plano cartesiano os pontos correspondentes a esses pares ordenados.

x	$g(x) = 2x - 4$	(x, y)
0	$g(0) = 2 \cdot 0 - 4 = -4$	$(0, -4)$
1	$g(1) = 2 \cdot 1 - 4 = -2$	$(1, -2)$
4	$g(4) = 2 \cdot 4 - 4 = 4$	$(4, 4)$

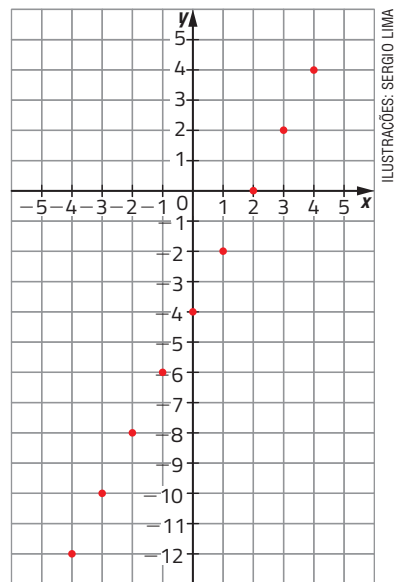


Exemplo 2:

Agora, considere a função $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ cuja lei de formação é dada por $h(x) = 2x - 4$.

Note que a lei de formação de h é a mesma da função g , apresentada no exemplo 1, mas os domínios delas são diferentes: $D(g) = A = \{0, 1, 4\}$ e $D(h) = \mathbb{R}$, ou seja, $D(g) \subset D(h)$. Assim, temos que cada ponto do gráfico de g também é ponto do gráfico de h . Para esboçar o gráfico de h , podemos obter outros pares ordenados (x, y) para valores arbitrários de $x \in \mathbb{R}$.

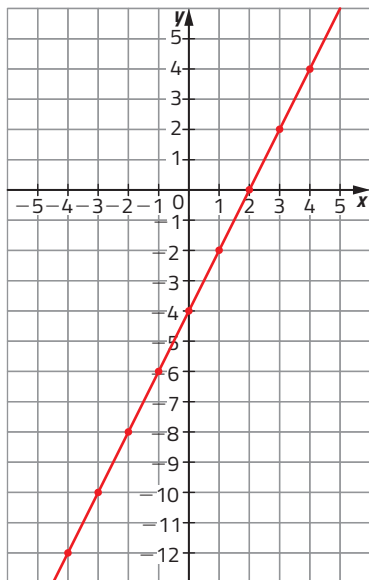
x	$h(x) = 2x - 4$	(x, y)
-4	$h(-4) = 2 \cdot (-4) - 4 = -12$	$(-4, -12)$
-3	$h(-3) = 2 \cdot (-3) - 4 = -10$	$(-3, -10)$
-2	$h(-2) = 2 \cdot (-2) - 4 = -8$	$(-2, -8)$
-1	$h(-1) = 2 \cdot (-1) - 4 = -6$	$(-1, -6)$
0	$h(0) = 2 \cdot 0 - 4 = -4$	$(0, -4)$
1	$h(1) = 2 \cdot 1 - 4 = -2$	$(1, -2)$
2	$h(2) = 2 \cdot 2 - 4 = 0$	$(2, 0)$
3	$h(3) = 2 \cdot 3 - 4 = 2$	$(3, 2)$
4	$h(4) = 2 \cdot 4 - 4 = 4$	$(4, 4)$



DICA

Note que os pontos de coordenadas $(0, -4)$, $(1, -2)$ e $(4, 4)$ também são pontos do gráfico da função g do exemplo 1.

Como $D(h) = \mathbb{R}$, existem infinitos pares ordenados (x, y) que são pontos do gráfico de h . Nesse caso, é possível verificar que o gráfico de h corresponde a uma reta.



DICA

A função h é um exemplo de função afim cujo gráfico é uma reta. Esse tipo de função é apresentado com mais detalhes na Unidade 3 deste Volume.

Atividade Resolvida

R11. Esboce o gráfico da função indicada em cada item.

a) $g: [-3, 2] \rightarrow \mathbb{R}$, em que $g(x) = -x + 2$

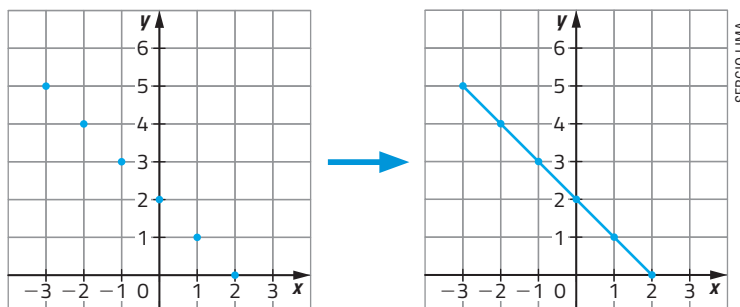
b) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, em que $f(x) = \begin{cases} -2x - 2, & \text{se } x < 0 \\ x + 1, & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$

Resolução

a) Note que $D(g)$ é o intervalo real $[-3, 2]$. Assim, atribuímos valores arbitrários para $x \in [-3, 2]$ e determinamos os pares ordenados (x, y) correspondentes.

x	$g(x) = -x + 2$	(x, y)
-3	$g(-3) = -(-3) + 2 = 5$	$(-3, 5)$
-2	$g(-2) = -(-2) + 2 = 4$	$(-2, 4)$
-1	$g(-1) = -(-1) + 2 = 3$	$(-1, 3)$
0	$g(0) = -0 + 2 = 2$	$(0, 2)$
1	$g(1) = -1 + 2 = 1$	$(1, 1)$
2	$g(2) = -2 + 2 = 0$	$(2, 0)$

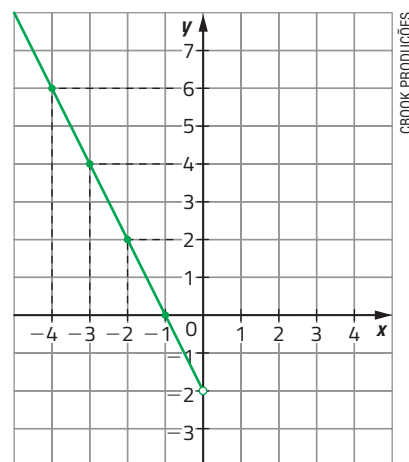
Como existem infinitos valores de $x \in [-3, 2]$, é possível obter infinitos pares ordenados (x, y) por meio da lei de formação de g . Ao representar esses pares ordenados no plano cartesiano, obtemos um segmento de reta, que corresponde ao gráfico de g .



b) Note que a função f é definida por duas sentenças: uma para $x < 0$ e outra para $x \geq 0$.

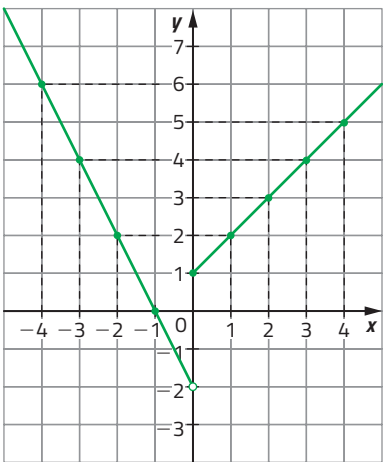
Assim, inicialmente, atribuímos valores arbitrários para $x < 0$, determinamos os pares ordenados (x, y) correspondentes e, de acordo com os pares ordenados obtidos, esboçamos o gráfico de f para $x < 0$.

x	$f(x) = -2x - 2$	(x, y)
-4	$f(-4) = -2 \cdot (-4) - 2 = 6$	$(-4, 6)$
-3	$f(-3) = -2 \cdot (-3) - 2 = 4$	$(-3, 4)$
-2	$f(-2) = -2 \cdot (-2) - 2 = 2$	$(-2, 2)$
-1	$f(-1) = -2 \cdot (-1) - 2 = 0$	$(-1, 0)$



Depois, de maneira análoga à primeira parte, atribuímos valores quaisquer para $x \geq 0$, determinamos os pares ordenados (x, y) correspondentes e esboçamos o gráfico de f para $x \geq 0$.

x	$f(x) = x + 1$	(x, y)
0	$f(0) = 0 + 1 = 1$	$(0, 1)$
1	$f(1) = 1 + 1 = 2$	$(1, 2)$
2	$f(2) = 2 + 1 = 3$	$(2, 3)$
3	$f(3) = 3 + 1 = 4$	$(3, 4)$
4	$f(4) = 4 + 1 = 5$	$(4, 5)$



ILUSTRAÇÕES: CBOOK PRODUÇÕES

● Análise do gráfico de uma função

Em alguns casos, podemos verificar se um gráfico corresponde a uma função, mesmo que sua lei de formação, seu domínio e seu contradomínio não sejam explícitos. Considere, por exemplo, os gráficos a seguir.

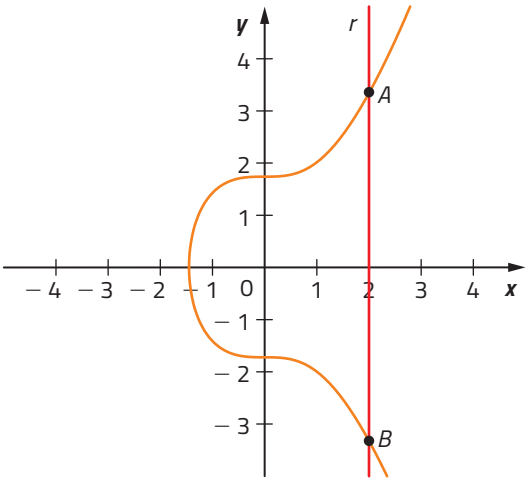
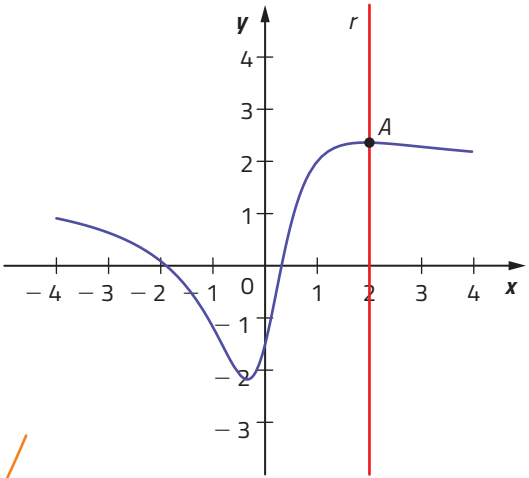
Note que, para verificar intuitivamente a correspondência entre cada elemento de um intervalo real e um único ponto de um gráfico, podemos construir uma reta r (paralela ao eixo y) e deslocá-la horizontalmente para a direita e para a esquerda, observando se, em qualquer posição, ela sempre cruzará o gráfico em um único ponto.

Resposta esperada: Não, pois, nesse caso, é possível afirmar que duas abscissas distintas estão associadas a uma mesma ordenada, o que pode ocorrer em uma função.

PARA PENSAR

Se uma reta paralela ao eixo x cruza certo gráfico em dois pontos distintos, podemos afirmar que esse gráfico não corresponde a uma função? Explique.

Dizemos que este gráfico representa uma função no intervalo $[-4, 4]$, pois cada abscissa $x \in [-4, 4]$ está associada a uma única ordenada $y \in \mathbb{R}$.



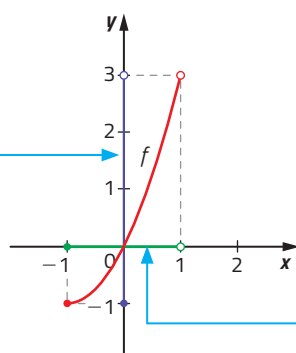
Neste caso, é possível deslocar a reta r (paralela ao eixo y) de maneira que cruze o gráfico em mais de um ponto, por exemplo, nos pontos A e B . Assim, dizemos que este gráfico não representa uma função, pois existe pelo menos uma abscissa x associada a mais de uma ordenada y .

Domínio e imagem no gráfico de uma função

Podemos, em alguns casos, determinar o domínio e o conjunto imagem de uma função f analisando o gráfico de f . Por exemplo, para determinar graficamente o domínio de uma função, dado por um intervalo real, é necessário identificar as coordenadas no eixo das abscissas correspondentes ao ponto mais à direita do gráfico e ao ponto mais à esquerda do gráfico; para determinar graficamente o conjunto imagem de uma função, é necessário identificar as coordenadas no eixo das ordenadas correspondentes ao ponto mais “alto” do gráfico e ao ponto mais “baixo” do gráfico.

Observe o exemplo a seguir.

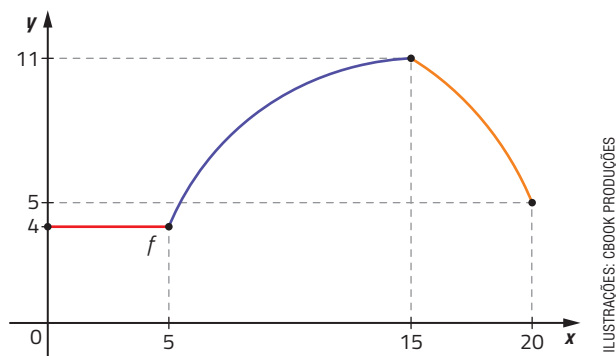
O intervalo sobre o eixo y , definido pelos pontos mais “baixo” e mais “alto” do gráfico, representa o conjunto imagem da função f . Nesse caso, $\text{Im}(f) = [-1, 3]$.



O intervalo sobre o eixo x , definido pelos pontos mais à esquerda e mais à direita do gráfico, representa o domínio da função f . Nesse caso, $D(f) = [-1, 1]$.

● Crescimento e decrescimento de uma função

Em determinado dia, Vanessa decidiu realizar um treino aeróbico de 20 min de corrida. Esse treino consistia em 5 min de caminhada para aquecimento, 10 min de corrida com aumento de velocidade e 5 min de corrida com redução gradual da velocidade até finalizá-lo, ainda em movimento. Pensando em acompanhar seu desempenho, ela utilizou um aplicativo de *smartphone* para gerar o gráfico da velocidade aproximada y (em quilometro por hora) alcançada durante o treinamento em função do tempo aproximado x (em minuto) de duração do treino. Observe, a seguir, o gráfico apresentado por esse aplicativo.



ILUSTRAÇÕES: CBOOK PRODUÇÕES

Analisando o gráfico, podemos identificar que $D(f) = [0, 20]$.

PARA PENSAR

Qual é a velocidade de Vanessa quando ela inicia e termina o registro do treino no aplicativo? Justifique.

Resposta esperada: Vanessa inicia o treino a 4 km/h, correspondente ao ponto de coordenadas $(0, 4)$ do gráfico, e termina o treino a 5 km/h, correspondente ao ponto de coordenadas $(20, 5)$.

PARA PENSAR

O que podemos afirmar ao comparar:

- $f(16)$ e $f(19)$?
- $f(3)$ e $f(4)$?
- $f(10)$ e $f(12)$?

- $f(16) > f(19)$, pois f é decrescente em $[15, 20]$.
- $f(3) = f(4)$, pois f é constante em $[0, 5]$.
- $f(10) < f(12)$, pois f é crescente em $[5, 15]$.

Agora, vamos observar o comportamento de f em intervalos reais que representam subconjuntos do $D(f)$.

- Para quaisquer $x \in [0, 5]$, o valor de y correspondente é sempre o mesmo.
- Para quaisquer $x \in [5, 15]$, conforme os valores de x aumentam, os valores correspondentes de y também aumentam.
- Para quaisquer $x \in [15, 20]$, conforme os valores de x aumentam, os valores correspondentes de y diminuem.

Nesse caso, dizemos que f é **constante** em $[0, 5]$, **crescente** em $[5, 15]$ e **decrescente** em $[15, 20]$.

Sejam f uma função e S um intervalo real contido no domínio de f . Para quaisquer dois valores a e b pertencentes a S , com $a < b$, se:

- $f(a) < f(b)$, dizemos que f é uma **função crescente** nesse intervalo;
- $f(a) > f(b)$, dizemos que f é uma **função decrescente** nesse intervalo;
- $f(a) = f(b)$, dizemos que f é uma **função constante** nesse intervalo.

Atividade resolvida

R12. Mostre que a função definida por $f(x) = \frac{x}{2} + 4$ é crescente em todo $D(f) = \mathbb{R}$.

Resolução

Sejam a e b dois números reais quaisquer, tal que $a < b$. Assim, segue que:

$$a < b$$

$$\frac{1}{2}a < \frac{1}{2}b \quad \leftarrow \text{Multiplicamos por } \frac{1}{2} \text{ cada membro.}$$

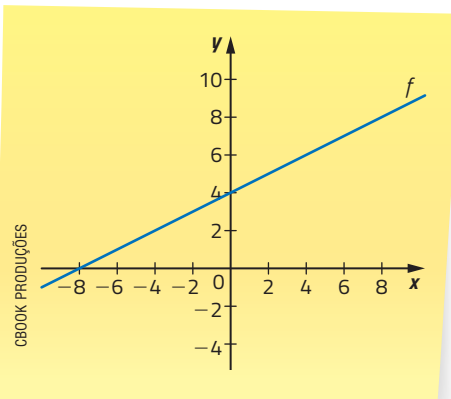
$$\frac{a}{2} + 4 < \frac{b}{2} + 4 \quad \leftarrow \text{Adicionamos 4 a cada membro.}$$

Como $f(a) = \frac{a}{2} + 4$ e $f(b) = \frac{b}{2} + 4$, temos que $f(a) < f(b)$.

Assim, mostramos que f é crescente em todo $D(f) = \mathbb{R}$. Observe o gráfico de f .

Quando uma função é:

- crescente em todo o seu domínio, dizemos que essa é uma **função crescente**;
- decrescente em todo o seu domínio, dizemos que essa é uma **função decrescente**;
- constante em todo o seu domínio, dizemos que essa é uma **função constante**.



40. Respostas nas **Orientações para o professor.****ATIVIDADES**

Não escreva no livro.

40. Em uma malha quadriculada, esboce o gráfico das funções indicadas a seguir.

a) $f: A \rightarrow \mathbb{R}$, com $A = \{-2, 0, 1, 3\}$ e $f(x) = 3x - 1$.

b) $g: B \rightarrow \mathbb{R}$, com $B = \{-1, 1, 2, 3\}$ e $g(x) = x^2 - 4$.

c) $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, em que $h(x) = 6 - 2x$.

d) $m: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, em que $m(x) = \begin{cases} 2 - x, & \text{se } x < 2 \\ x - 2, & \text{se } x \geq 2 \end{cases}$.

41. Esboce um gráfico para representar uma função que se enquadre em cada descrição a seguir.

a) Função f , em que $D(f) =]-2, 4[$ e $\text{Im}(f) = [0, 4[$.

Respostas nas **Orientações para o professor.**

b) Função crescente g .

c) Função decrescente h .

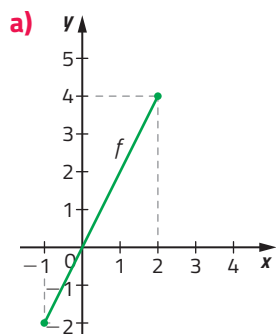
d) Função j decrescente para $x < 3$ e crescente para $x > 3$.

e) Função m crescente para $x < 0$ e constante para $x > 0$.

Alternativas a e c.

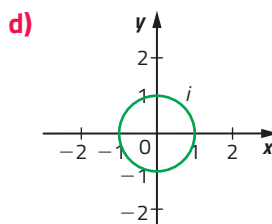
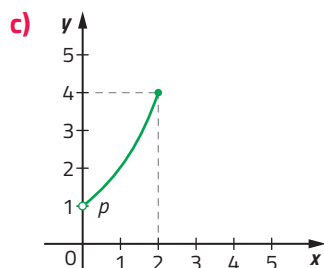
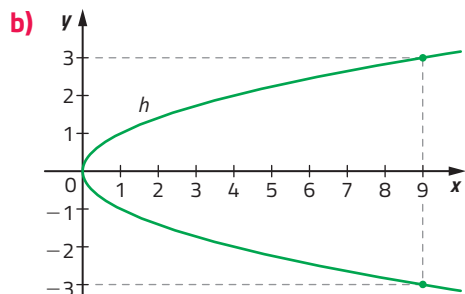
Resposta pessoal.

42. Quais dos gráficos a seguir representam uma função? Justifique sua resposta.

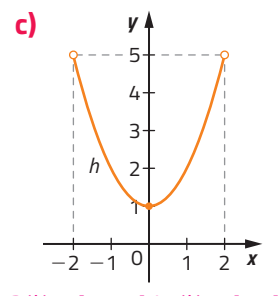
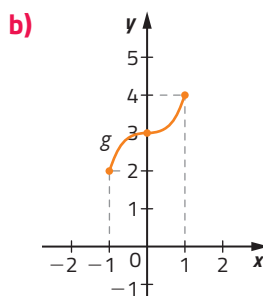
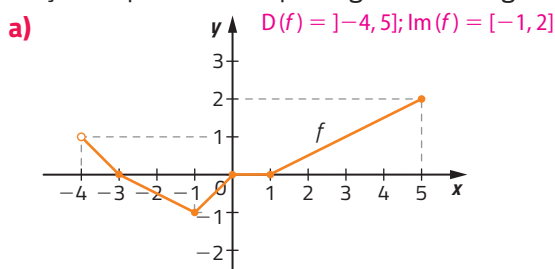


DICA

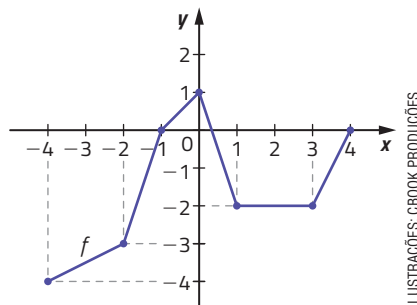
Você pode utilizar uma régua para simular uma reta paralela ao eixo y que possa ser deslocada horizontalmente.



43. Determine o domínio e o conjunto imagem das funções representadas pelos gráficos a seguir.



44. Observe o gráfico que representa a função f .



Determine:

a) o domínio de f ; $D(f) = [-4, 4]$

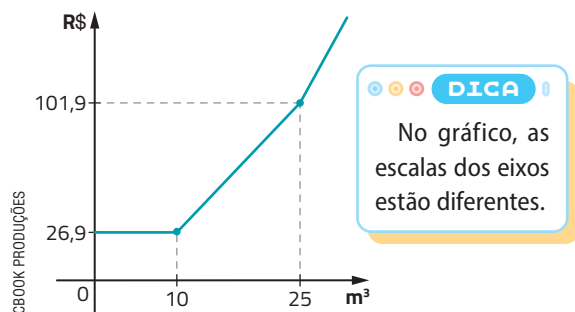
b) o conjunto imagem de f ; $\text{Im}(f) = [-4, 1]$

c) os intervalos do domínio em que f é crescente; $[-4, 0]$ e $[3, 4]$

d) os intervalos do domínio em que f é decrescente; $[0, 1]$

e) os intervalos do domínio em que f é constante. $[1, 3]$

- 45.** O gráfico a seguir representa a função f que expressa o valor a pagar na fatura de água de cada residência de certo município, em reais, de acordo com a quantidade x de metros cúbicos de água consumida.



- a)** Observando esse gráfico, o que podemos afirmar sobre o consumo de água de uma residência cujo valor da fatura em certo mês foi de R\$ 50,00? Justifique.
- b)** Um dos itens a seguir apresenta a lei de formação da função f . Qual é esse item? **III**

$$\text{I) } f(x) = \begin{cases} 36,9, & \text{se } 0 \leq x \leq 10 \\ 5x - 23,1, & \text{se } 10 < x \leq 25 \\ 8,7x - 115,6, & \text{se } x > 25 \end{cases}$$

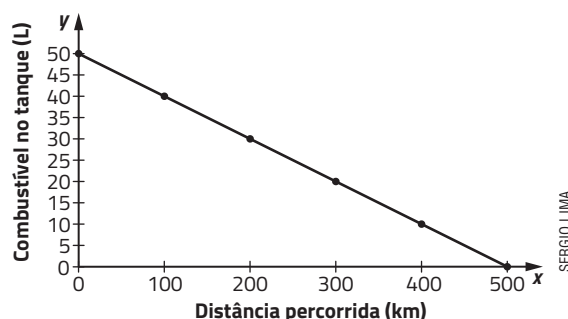
$$\text{II) } f(x) = \begin{cases} 26,9, & \text{se } 0 \leq x \leq 10 \\ 5x - 23,1, & \text{se } 10 < x \leq 20 \\ 8,7x - 115,6, & \text{se } x > 20 \end{cases}$$

$$\text{III) } f(x) = \begin{cases} 26,9, & \text{se } 0 \leq x \leq 10 \\ 5x - 23,1, & \text{se } 10 < x \leq 25 \\ 8,7x - 115,6, & \text{se } x > 25 \end{cases}$$

- c)** Qual será o valor da fatura de uma residência desse município, em que o consumo de água foi de:
- 9 m³? **R\$ 26,90** ▪ 30 m³? **R\$ 145,40** ▪ 25 m³? **R\$ 101,90**
- d)** Agora, retome o item **a** desta atividade e determine o consumo, em metro cúbico, de água na residência desse município, em que o valor da fatura foi de R\$ 50,00. **14,62 m³**

- 46.** (Enem/MEC) Uma indústria automobilística está testando um novo modelo de carro. Cinquenta litros de combustível são colocados no tanque desse carro, que é dirigido em uma pista de testes até que todo o combustível tenha sido consumido. O segmento de reta no gráfico mostra o resultado desse teste, no qual a quantidade de combustível no tanque é indicada no eixo y

(vertical), e a distância percorrida pelo automóvel é indicada no eixo x (horizontal).



A expressão algébrica que relaciona a quantidade de combustível no tanque e a distância percorrida pelo automóvel é: **alternativa b**

- a)** $y = -10x + 500$ **d)** $y = \frac{x}{10} + 50$
b) $y = \frac{-x}{10} + 50$ **e)** $y = \frac{x}{10} + 500$
c) $y = \frac{-x}{10} + 500$

- 47.** Em relação à atividade **46**, resolva os itens a seguir.

- a)** Qual é a **autonomia** desse automóvel obtida nesse teste? **500 km**
- b)** Sendo $y = c(d)$ a lei de formação de uma função que expressa a quantidade c de combustível no tanque (em litro) em função da distância d percorrida (em quilometro), determine o domínio e a imagem dessa função.

$$D(c) = [0, 500]; \text{Im}(c) = [0, 50]$$

Autonomia: distância máxima percorrida pelo automóvel, com determinado combustível, sem reabastecimento.

- 48.** No caderno, esboce um gráfico que represente uma função e um que não represente uma função. Depois, troque os gráficos elaborados com os de um colega e identifique qual dos gráficos recebidos representa uma função e qual não representa. Ao final, discutam e confirmem juntos as respostas. **Elaboração dos estudantes.**

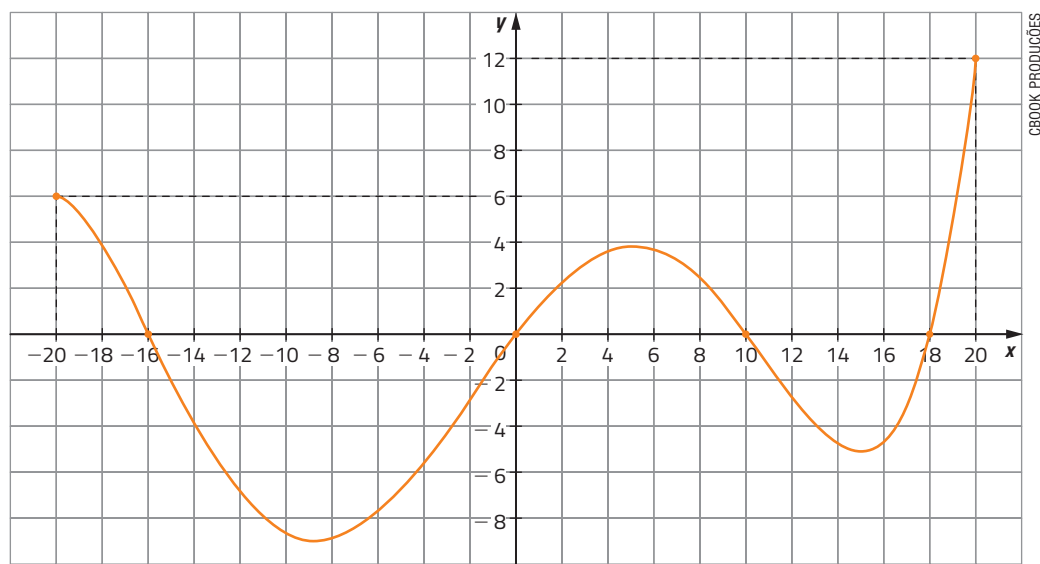
- 49.** Pense em uma situação envolvendo uma função crescente, decrescente ou constante e elabore uma questão. Depois, troque essa questão com um colega para que um resolva a do outro. Ao final, em uma roda de conversa com toda a turma, discutam o que observaram em relação às questões propostas. **Elaboração do estudante.**

45. a) Resposta esperada: O consumo foi entre 10 m³ e 25 m³ de água, pois, para consumo inferior a 10 m³, o valor da fatura é de R\$ 26,90, enquanto para o consumo superior a 25 m³, o valor da fatura é maior que R\$ 101,90.

Estudo do sinal de uma função

Uma das maneiras por meio das quais podemos fazer um estudo do sinal de uma função é analisando o seu gráfico. Para isso, devemos determinar para quais valores do domínio a imagem é positiva, negativa ou nula. Vamos ver como isso funciona na prática?

Considere a função $f: [-20, 20] \rightarrow \mathbb{R}$ cujo gráfico está representado a seguir.



Analisando o gráfico, percebemos que, por exemplo, para valores de x no intervalo $[-20, -16[$, o gráfico da função f está todo acima do eixo das abscissas, em que os valores de $f(x)$ são positivos. Assim, dizemos que a função f é positiva nesse intervalo.

Utilizando o mesmo raciocínio para os demais intervalos da função, podemos concluir que f é:

- **negativa** para $-16 < x < 0$ ou $10 < x < 18$;
- **positiva** para $-20 \leq x < -16$ ou $0 < x < 10$ ou $18 < x \leq 20$;
- **nula** para $x = -16$ ou $x = 0$ ou $x = 10$ ou $x = 18$.

Podemos generalizar essas observações para o estudo do sinal de qualquer função real.

PARA PENSAR

Sem realizar cálculos, classifique o resultado de cada item a seguir em positivo, negativo ou zero.

- $f(-13)$ **negativo**
- $f(5)$ **positivo**
- $f(18)$ **zero**

Seja f uma função e $x \in D(f)$, dizemos que:

- f é **positiva** para x , se, e somente se, $f(x) > 0$;
- f é **negativa** para x , se, e somente se, $f(x) < 0$;
- f é **nula** para x , se, e somente se, $f(x) = 0$. Nesse caso, x é denominado **zero da função** f .

PARA PENSAR

Quais são os zeros da função $f: [-20, 20] \rightarrow \mathbb{R}$, cujo gráfico foi representado anteriormente?

-16, 0, 10 e 18

53. b) função f positiva para $-4 < x < 4$, negativa para $x < -4$ ou $x > 4$ e nula para $x = -4$ ou $x = 4$; função g positiva para $x < 10$, negativa para $x > 10$ e nula para $x = 10$

ATIVIDADES

Não escreva no livro.

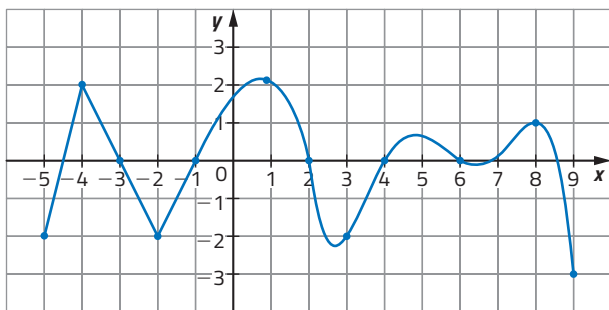
50. Em uma malha quadriculada, esboce o gráfico de uma função $f: [-15, 10] \rightarrow \mathbb{R}$ que intersecte o eixo x em três pontos distintos cujas abscissas devem ser indicadas. Em seguida, troque esse gráfico com o de um colega e determine para quais valores do domínio essa função é positiva, negativa ou nula. Ao final, confirmem juntos as resoluções. *Elaboração dos estudantes.*

51. Considere as seguintes informações sobre a função $f: [-5, 9] \rightarrow \mathbb{R}$. **alternativa c**

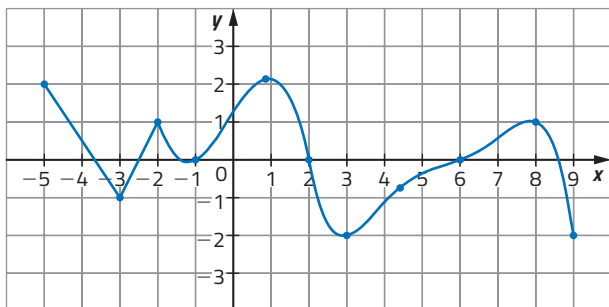
- f é positiva para $-1 < x < 2$.
- 6 é zero da função f .
- f é negativa para $2 < x < 6$.
- f é nula para $x = -3$.

Qual alternativa a seguir apresenta o gráfico da função f ?

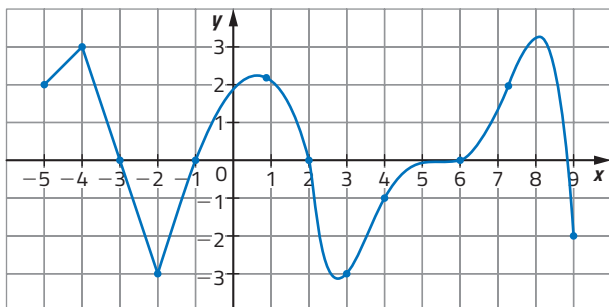
a)



b)



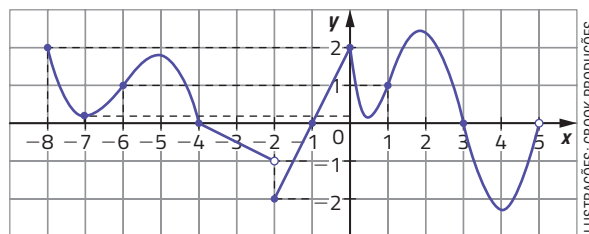
c)



52. a) $f(-6) = 1$; $f(1) = 1$; $f(-2) = -2$

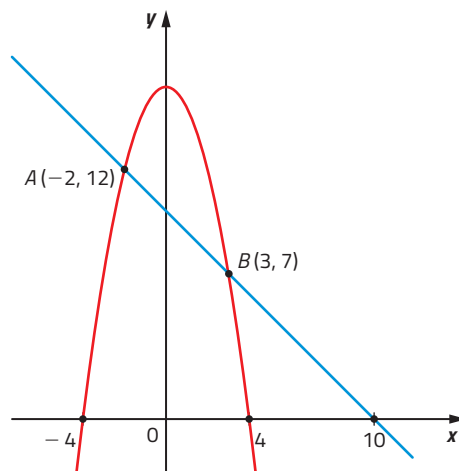
52. c) Respostas nas **Orientações para o professor.**

52. Observe o gráfico da função $f: [-8, 5] \rightarrow \mathbb{R}$.



- a) Determine $f(-6)$, $f(1)$ e $f(-2)$.
- b) Quais são os zeros dessa função? -4 , -1 e 3
- c) Para quais valores de $x \in D(f)$ a função f é:
 - positiva? ▪ negativa? ▪ nula?

53. Com um colega, observem os gráficos das funções $f(x) = -x^2 + 16$ e $g(x) = 10 - x$ representados em um mesmo plano cartesiano.



- a) De qual cor foi representado o gráfico da função f ? E o da função g ? **vermelha; azul**
- b) Descrevam para quais intervalos reais cada uma dessas funções é positiva, negativa ou nula.
- c) Leiam a definição a seguir.

Dadas duas funções f e g , e um mesmo intervalo real $]a, b[$ contido no domínio dessas funções, dizemos que $f > g$ em $]a, b[$ se, e somente se, para todo $x \in]a, b[$, temos $f(x) > g(x)$.

Agora, determinem os intervalos reais em que:


- $x \in]-\infty, -2[$ ou $x \in]3, +\infty[$
- $f < g$; ▪ $g < f$; $x \in]-2, 3[$

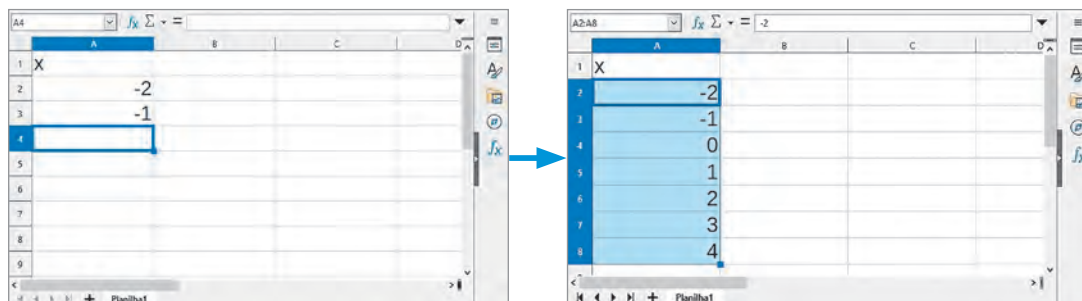
VOCÊ CONECTADO


Representando pontos do gráfico de funções

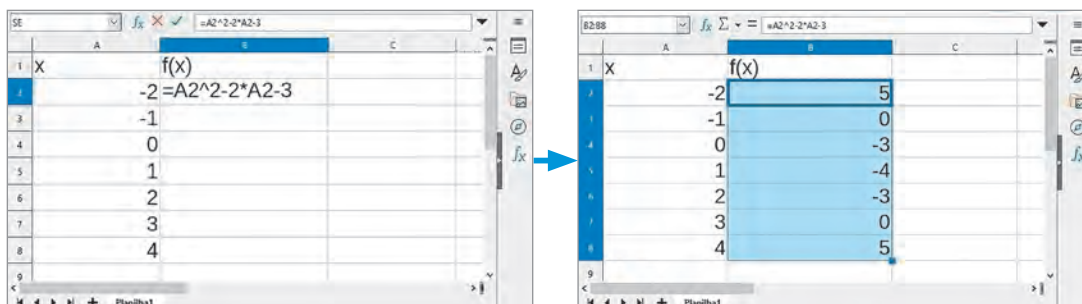
Podemos utilizar a planilha eletrônica **LibreOffice Calc** para tabular dados e plotar gráficos de funções. Esse e os demais programas de escritório da **LibreOffice** estão disponíveis para *download* em <https://pt-br.libreoffice.org/baixe-ja/libreoffice-novo/> (acesso em: 27 jun. 2024).

Observe a seguir, por exemplo, como podemos representar graficamente alguns pontos da função $f: [-2, 4] \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x^2 - 2x - 3$, ao adotarmos valores arbitrários de $x \in D(f)$.

- A** Na célula **A1**, escrevemos x , para indicar a coluna dos valores arbitrários de x . Em seguida, registramos -2 na célula **A2** e -1 na célula **A3**. Para obter outros valores de x , selecionamos as células **A2** e **A3**, clicamos na opção  e, com o botão do *mouse* pressionado, arrastamos até a célula **A8**.



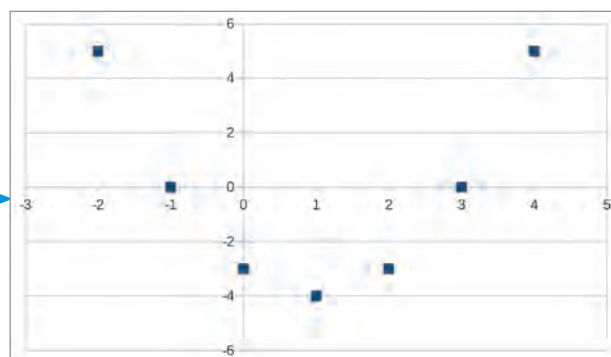
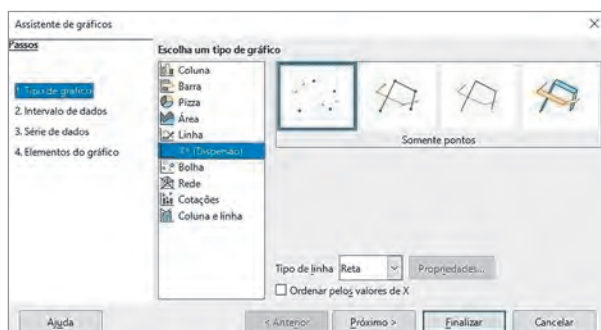
- B** Na célula **B1**, escrevemos $f(x)$, para indicar a coluna dos valores correspondentes a $y = f(x)$. Na célula **B2**, escrevemos $=A2^2 - 2*A2 - 3$, correspondente à lei de formação da função, e pressionamos a tecla **Enter** para calcular $f(-2)$, ou seja, a imagem de -2 . Em seguida, para obter a imagem dos demais valores atribuídos a x , selecionamos a célula **B2**, depois clicamos na opção  e, com o botão do *mouse* pressionado, arrastamos até a célula **B8**.



DICA

Observe que, no programa **LibreOffice Calc**, utilizamos o símbolo $*$ (asterisco) para representar uma multiplicação e utilizamos o símbolo $^$ (acento circunflexo) para representar uma potenciação.

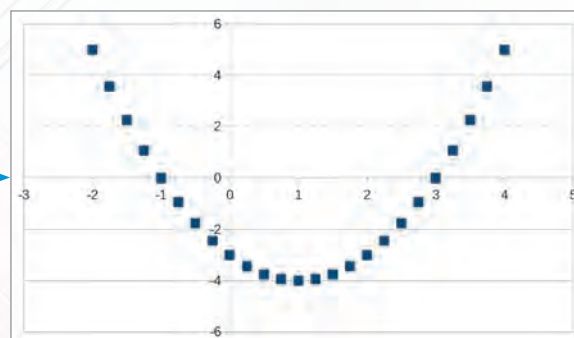
- C** Para realizar a representação gráfica, selecionamos as células **A2:B8** (selecionar as 14 células desse intervalo, iniciando em **A2** e terminando em **B8**) e clicamos na opção **Inserir gráfico** do *menu*. Em seguida, ao abrir a caixa de diálogo **Assistente de gráficos**, na opção **1. Tipo de gráfico**, selecionamos as opções **XY (Dispersão)** e **Somente pontos**. Por fim, clicamos em **Finalizar** e obtemos a representação gráfica.



IMAGENS: REPRODUÇÃO/LIBREOFFICE

- D** Ao aumentar a quantidade de pontos indicados, podemos melhorar a visualização do formato da curva da representação gráfica dessa função. Observe.

	A	B
1	X	f(x)
2	-2	5
3	-1,75	3,5625
4	-1,5	2,25
5	-1,25	1,0625
6	-1	0
7	-0,75	-0,9375
8	-0,5	-1,75
9	-0,25	-2,4375
10	0	-3
11	0,25	-3,4375
12	0,5	-3,75
13	0,75	-3,9375
14	1	-4
15	1,25	-3,9375
16	1,5	-3,75
17	1,75	-3,4375
18	2	-3
19	2,25	-2,4375
20	2,5	-1,75
21	2,75	-0,9375
22	3	0
23	3,25	1,0625
24	3,5	2,25
25	3,75	3,5625
26	4	5

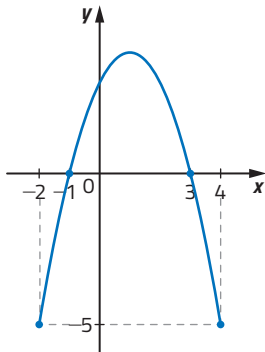


MÃOS À OBRA

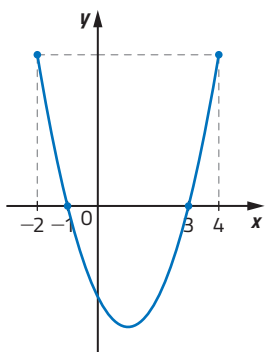
Não escreva no livro.

1. Observando os pontos representados na planilha eletrônica, qual dos gráficos a seguir corresponde à função f do exemplo em todo o seu domínio? **alternativa b**

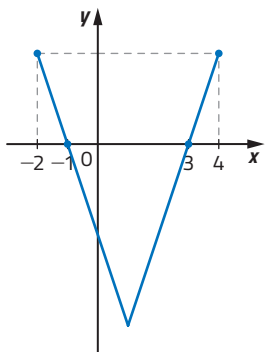
a)



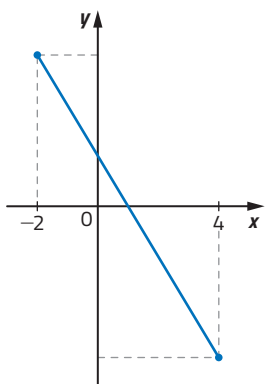
b)



c)

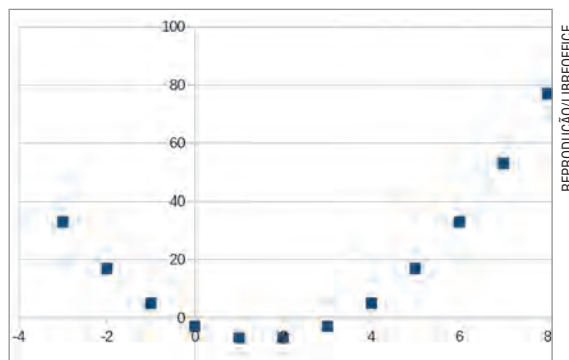


d)



ILUSTRAÇÕES: CBOOK PRODUÇÕES

2. O gráfico a seguir corresponde à representação da função $g: [-3, 8] \rightarrow \mathbb{R}$ em alguns pontos do seu domínio.





- a) Qual das fichas a seguir apresenta a lei de formação da função g ? Justifique sua resposta. $g(x) = 2x^2 - 6x - 3$. **Resposta pessoal.**

$$g(x) = x^2 - 10x + 3$$

$$g(x) = 2x^2 - 6x - 3$$

$$g(x) = 3x^2 + x + 12$$

- b) Utilizando a planilha eletrônica **Calc**, verifique se sua resposta ao item **a** está correta. Para isso, represente graficamente alguns pontos das funções indicadas nas fichas. **Resposta pessoal.**
3. De maneira análoga ao exemplo apresentado no início desta seção, represente graficamente a função $f(x) = x^2 - 2x - 3$ para outros valores arbitrários de x . Para definir esses valores, registre na célula **A2** o número -2 e, em **A3**, o número $-1,5$. Depois, selecione as células **A2** e **A3**, clique na opção  e, com o botão do *mouse* pressionado, arraste até a célula **A14**. Depois, determine os valores correspondentes $f(x)$ na coluna **B**. **Construção do estudante.**
4. Com base no que você estudou, utilize o  **LibreOffice Calc** e represente graficamente a função $f: [-5, 5] \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = -\frac{1}{2}x + 3$ para alguns valores arbitrários de $x \in D(f)$. Depois, compare a representação que você obteve com aquelas obtidas pelos colegas. **Construção do estudante.**

O QUE ESTUDEI

Não escreva no livro.

1. Leia com atenção cada frase a seguir e faça uma reflexão sobre seu comportamento durante o estudo desta Unidade. Depois, responda se você **concorda**, **concorda parcialmente** ou **não concorda** com cada uma das afirmações. *Respostas pessoais.*

- | | | |
|--|---|--|
| a) Ouvi com atenção as explicações do professor. | d) Participei das discussões propostas à turma. | g) Respeitei os colegas nas atividades em grupo. |
| b) Quando precisei, pedi ajuda ao professor. | e) Fiz as atividades propostas na sala de aula. | h) Auxiliei os colegas quando eles tiveram dúvidas. |
| c) Auxiliei o professor quando ele me pediu. | f) Fiz as atividades escolares propostas para casa. | i) Levei para a sala de aula os materiais necessários. |

2. Nas fichas a seguir, estão indicados os principais conteúdos que estudamos nesta Unidade. Reflita sobre cada um deles e verifique se você precisa retomar algum para melhor compreendê-lo. *Resposta pessoal.*

Gráfico de uma função

Estudo do sinal de uma função

Função

Unidades de medida

Grandezas

Zero da função

Sistema Internacional de Unidades (SI)

Variável dependente e variável independente

Domínio, contradomínio e conjunto imagem de uma função

Função constante, função crescente e função decrescente

3. Agora, para retomar de maneira colaborativa o estudo de um conteúdo desta Unidade, junte-se a dois colegas, e sigam as etapas. *Respostas pessoais.*

1 SELECIONAR

Consultem os conteúdos indicados na atividade anterior e escolham um deles. Deem preferência a um conteúdo em que foi constatada necessidade de retomada de estudo.

2 REVISAR

Juntos, façam uma revisão do estudo desse conteúdo. É importante a participação de todos os integrantes nessa revisão.

4 APRESENTAR

Na apresentação, é importante usar uma linguagem adequada, simples e objetiva. É necessário oportunizar um momento para que cada integrante do grupo possa contribuir com as explicações. Ao final, vocês podem disponibilizar os materiais produzidos aos demais colegas da turma.

3 PREPARAR

Elaborem uma apresentação sobre esse conteúdo, o que pode ser realizado por meio de *slides*, cartazes, vídeo, entre outros recursos. Na apresentação, podem ser incluídos exemplos e atividades resolvidas. Também podem ser propostas atividades para que os demais colegas da turma resolvam.

4. Na abertura desta Unidade, foram apresentadas algumas informações sobre o Sistema Internacional de Unidades (SI), criado para padronizar as principais unidades de medidas utilizadas no mundo. No Brasil, o Instituto de Pesos e Medidas (Ipem) é um órgão delegado do Inmetro responsável por proteger o brasileiro nas relações de consumo, executando atividades de metrologia e fiscalizando, por exemplo, se os comércios estão de acordo com as normas estabelecidas pelo Inmetro.



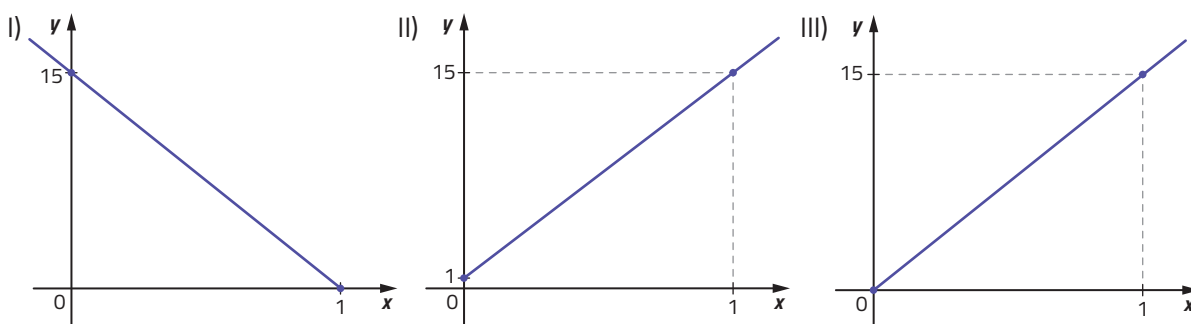
LUCAS LAOAZ RUIZ/FOTORENA

Em outubro de 2006, o Inmetro determinou que a venda de pão francês (ou pão de sal) fosse feita apenas por sua massa, e não mais por unidade, como era comercializado em alguns estabelecimentos.

Fonte dos dados: BRASIL. Ministério do Desenvolvimento, Indústria e Comércio Exterior. Instituto Nacional de Metrologia, Qualidade e Tecnologia. **Portaria nº 146, de 20 de junho de 2006**. Brasília, DF: Serviço Público Federal, 2006. Disponível em: <http://www.inmetro.gov.br/rtac/pdf/RTAC001032.pdf>. Acesso em: 11 set. 2024.

► Pães sendo pesados em uma padaria de São José dos Campos (SP). O pão francês recebe nomes diferentes em distintas partes do país, como “pão d’água”, “média”, “cacetinho” e “filão”.

- a) Você concorda com a determinação do Inmetro em relação à venda do pão francês pela massa? Justifique. **Resposta pessoal.**
- b) Supondo que, antes da determinação do Inmetro, cada pão francês era vendido por R\$ 0,35 em certa padaria, escreva uma função que relacione o preço a pagar c , em reais, e a quantidade de pão p . **$c(p) = 0,35p$**
- c) Se um consumidor pagar R\$ 10,80 por uma quantidade de pães em certa padaria, cujo quilograma é vendido a R\$ 15,00, quantos gramas de pão esse consumidor comprou? **720 g**
- d) Considerando que o quilograma do pão francês custe R\$ 15,00, identifique qual dos gráficos representados a seguir corresponde a uma função f que relaciona o preço a pagar, em reais, por x quilograma de pão francês. **gráfico III**



ILUSTRAÇÕES: CBOOK PRODUÇÕES



DICA

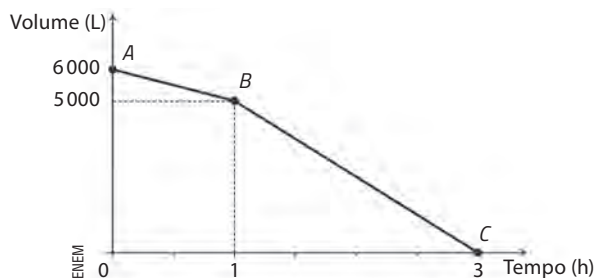
Nos gráficos, as escalas dos eixos estão diferentes.

- e) Considerando a função f cujo gráfico você identificou no item d, determine:
- a lei de formação da função; **$f(x) = 15x$**
 - o domínio, o contradomínio e o conjunto imagem da função; **$D(f) = \mathbb{R}_+$; $CD(f) = \mathbb{R}$; $Im(f) = \mathbb{R}_+$**
 - se a função é crescente, decrescente ou constante; **crescente**
 - o zero da função; **$x = 0$**
 - para quais valores de $x \in D(f)$ a função é negativa; **para nenhum valor do domínio da função**
 - para quais valores de $x \in D(f)$ a função é positiva. **para todo $x > 0$**
- f) Com três colegas, pesquisem, em estabelecimentos da região onde moram, alguns alimentos tradicionais que são vendidos por massa e comparem os preços desses produtos. Se possível, registrem também se há algum produto alimentício típico da região que seja vendido por unidade. **Pesquisa dos estudantes.**

PRATICANDO: ENEM E VESTIBULARES

Não escreva no livro.

1. (Enem/MEC) Uma cisterna de 6000 L foi esvaziada em um período de 3 h. Na primeira hora foi utilizada apenas uma bomba, mas nas duas horas seguintes, a fim de reduzir o tempo de esvaziamento, outra bomba foi ligada junto com a primeira. O gráfico, formado por dois segmentos de reta, mostra o volume de água presente na cisterna, em função do tempo.



Qual é a vazão, em litro por hora, da bomba que foi ligada no início da segunda hora? **alternativa c**

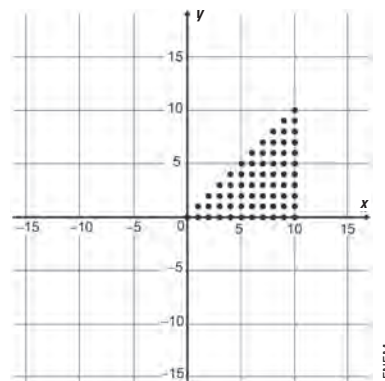
- a) 1000 c) 1500 e) 2500
b) 1250 d) 2000
2. (Enem/MEC) Os países anglófonos, como a Inglaterra, o Canadá, a Austrália e outros, são países que utilizam dois sistemas de unidades para a identificação de distâncias: o Sistema Internacional, com o quilometro (km), e o CGS, com a milha (mi). Nas rodovias canadenses, por exemplo, as placas de sinalização de distâncias apresentam dois valores, um em km e outro em mi, com esta última equivalente a aproximadamente 1610 metros.

Um turista brasileiro, habituado ao Sistema Internacional, em viagem por uma dessas rodovias, verifica em dado momento uma placa indicando a distância até a cidade a que ele se destina, onde está escrito 50 mi e XX km, com o valor da distância em quilometro ilegível.

Qual o valor, desprezando as casas decimais, que deveria estar escrito na placa, para identificar a distância XX, em quilometro, até a cidade destino? **alternativa c**

- a) 8 c) 80 e) 805
b) 31 d) 310

3. (Enem/MEC) Para criar um logotipo, um profissional da área de *design* gráfico deseja construí-lo utilizando o conjunto de pontos do plano na forma de um triângulo, exatamente como mostra a imagem.



Para construir tal imagem utilizando uma ferramenta gráfica, será necessário escrever algebricamente o conjunto que representa os pontos desse gráfico.

Esse conjunto é dado pelos pares ordenados $(x; y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, tais que **alternativa b**

- a) $0 \leq x \leq y \leq 10$ d) $0 \leq x + y \leq 10$
b) $0 \leq y \leq x \leq 10$ e) $0 \leq x + y \leq 20$
c) $0 \leq x \leq 10, 0 \leq y \leq 10$
4. (Unitins-TO) No estudo de funções, quando o domínio e o contradomínio não são fornecidos, convencionou-se que o contradomínio seja o conjunto dos números reais e o domínio seja o conjunto de todos os valores de x para os quais $f(x)$ é real. Nesse sentido, tem-se que:

- I) $f(x) = \frac{n(x)}{d(x)}$, com $d(x) \neq 0$
II) $f(x) = \frac{\text{par}}{\sqrt{r(x)}}$, com $r(x) \geq 0$
III) $f(x) = \frac{n(x)}{\frac{\text{par}}{\sqrt{r(x)}}}$, com $r(x) > 0$
IV) $f(x) = \frac{n(x)}{\frac{\text{par}}{\sqrt{r(x)}}}$, com $r(x) \neq 0$

Está correto o que se afirma em: **alternativa d**

- a) II e III apenas. d) I, II e III apenas.
b) II, III e IV apenas. e) I, II e IV apenas.
c) I e IV apenas.

5. (Enem/MEC) Admita que um grupo musical deseja produzir seu próprio CD. Para tanto, adquire um pequeno equipamento para gravar CDs ao valor de R\$ 252,00, e vários CDs novos, sendo esses os únicos gastos realizados na produção dos CDs. Sabe-se que o custo total na compra do equipamento e dos CDs totalizou o valor de R\$ 1.008,00, e que o custo unitário de cada CD novo, em real, varia de acordo com o número n de CDs adquiridos, segundo o quadro.

Número n de CDs adquiridos	Custo unitário de cada CD novo (em real)
$n < 1000$	0,45
$1000 \leq n < 2500$	0,40
$2500 \leq n$	0,35

Nessas condições, o número de CDs adquiridos pelo grupo musical é igual a: **alternativa b**

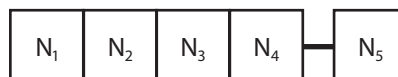
- a) 1 680. c) 2 160. e) 2 880.
b) 1 890. d) 2 520.
6. (Enem/MEC) Um borrifador de atuação automática libera, a cada acionamento, uma mesma quantidade de inseticida. O recipiente desse produto, quando cheio, contém 360 mL de inseticida, que duram 60 dias se o borrifador permanecer ligado ininterruptamente e for acionado a cada 48 minutos.
- A quantidade de inseticida que é liberada a cada acionamento do borrifador, em mililitro, é: **alternativa b**
- a) 0,125. c) 4,800. e) 12,000.
b) 0,200. d) 6,000.
7. (Unitins-TO) Uma empresa de transporte cobra em cada corrida o valor fixo de R\$ 220,00 mais R\$ 2,90 por quilometro rodado. A quantidade máxima de quilômetros rodados para que em uma corrida o valor total a ser pago não ultrapasse R\$ 2.300,00 será: **alternativa b**
- a) 793 km d) 1 179 km
b) 717 km e) 2 980 km
c) 638 km
8. (UFAM) O consumo de água nas residências de um condomínio localizado na cidade de Manaus é cobrado da seguinte forma:
- I) Para um consumo mensal de até 10 metros cúbicos, o preço é fixo e igual a R\$ 32,74.
II) Para um consumo superior a 10 metros cúbicos, o preço é de R\$ 32,74, acrescidos de

R\$ 3,00 por metro cúbico consumido acima dos 10 metros cúbicos.

Considerando que, além do consumo, também é cobrada uma taxa de serviço de esgoto no valor de R\$ 32,74, a conta de água de um condômino que teve um consumo de 15 metros cúbicos será de: **alternativa c**

- a) R\$ 47,74 d) R\$ 104,58
b) R\$ 77,74 e) R\$ 110,48
c) R\$ 80,48

9. (UEMG) Um professor solicitou que seus alunos encontrassem o domínio da função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \sqrt{\frac{x}{x-1} - \frac{2x}{x+1}}$. O aluno A resolveu a questão, mas cometeu um erro e respondeu que o domínio dessa função é $S1 = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x \leq 3\}$. O aluno B resolveu a questão corretamente e respondeu que o domínio dessa função é $S2$. Sendo A o conjunto dos números inteiros pertencentes a $S1$ e B o conjunto dos números inteiros pertencentes a $S2$, é correto afirmar que $A \cap B$ é igual a: **alternativa b**
- a) $\{0, 1, 2, 3\}$. c) $\{2, 3\}$.
b) $\{0, 2, 3\}$. d) \emptyset
10. (Enem/MEC) Cada número que identifica uma agência bancária tem quatro dígitos: N_1, N_2, N_3, N_4 mais um dígito verificador N_5 .



Todos esses dígitos são números naturais pertencentes ao conjunto $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$. Para a determinação de N_5 , primeiramente multiplica-se ordenadamente os quatro primeiros dígitos do número da agência por 5, 4, 3 e 2, respectivamente, somam-se os resultados e obtém-se $S = 5N_1 + 4N_2 + 3N_3 + 2N_4$.

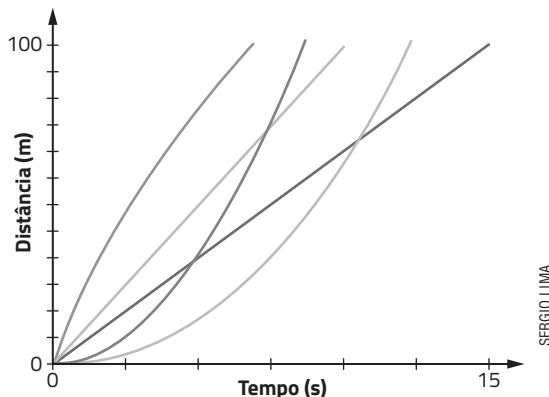
Posteriormente, encontra-se o resto da divisão de S por 11, denotando por R esse resto. Dessa forma, N_5 é a diferença $11 - R$.

Considere o número de uma agência bancária cujos quatro primeiros dígitos são 0100.

Qual é o dígito verificador N_5 dessa agência bancária? **alternativa c**

- a) 0 c) 7 e) 9
b) 6 d) 8

- 11.** (Enem/MEC) Em uma competição de velocidade, diz-se que há uma ultrapassagem quando um veículo que está atrás de outro passa à sua frente, com ambos se deslocando no mesmo sentido. Considere uma competição automobilística entre cinco carros em uma pista com 100 m de comprimento, onde todos largam no mesmo instante e da mesma linha. O gráfico mostra a variação da distância percorrida por cada veículo, em função do tempo, durante toda a competição.



Qual o número de ultrapassagens, após o início da competição, efetuadas pelo veículo que chegou em último lugar? **alternativa a**

- a)** 0 **c)** 2 **e)** 4
b) 1 **d)** 3
- 12.** (Enem/MEC) Uma pessoa precisa contratar um operário para fazer um serviço em sua casa. Para isso, ela postou um anúncio em uma rede social.

Cinco pessoas responderam informando preços por hora trabalhada, gasto diário com transporte e tempo necessário para conclusão do serviço, conforme valores apresentados no quadro.

Operário	Preço por hora (real)	Preço do transporte (real)	Tempo até conclusão (hora)
I	120	0,00	8
II	180	0,00	6
III	170	20,00	6
IV	110	10,00	9
V	110	0,00	10

Se a pessoa pretende gastar o mínimo possível com essa contratação, irá contratar o operário:

- a)** I. **c)** III. **e)** V. **alternativa a**
b) II. **d)** IV.

- 13.** (UECE) Uma caixa-d'água, cuja capacidade é 5 000 litros, tem uma torneira no fundo que, quando aberta, escoar água a uma vazão constante. Se a caixa está cheia e a torneira é aberta, depois de t horas o volume de água na caixa é dado por $V(t) = 5000 - kt$, k constante. Certo dia, estando a caixa cheia, a torneira foi aberta às 10 horas. Às 18 horas do mesmo dia, observou-se que a caixa continha 2 000 litros de água. Assim, pode-se afirmar corretamente que o volume de água na caixa era 2 750 litros, exatamente, às: **alternativa c**

- a)** 15h. **c)** 16h.
b) 15h40. **d)** 16h40.

- 14.** (Enem/MEC) Uma operadora de telefonia oferece cinco planos de serviços. Em cada plano, para cada mês, o cliente paga um valor V que lhe dá direito a telefonar por M minutos para clientes da mesma operadora. Quando a duração total das chamadas para clientes da mesma operadora excede M minutos, é cobrada uma tarifa T_1 por cada minuto excedente nesse tipo de chamada. Além disso, é cobrado um valor T_2 , por minuto, nas chamadas para clientes de outras operadoras, independentemente do fato de os M minutos terem ou não sido usados. A tabela apresenta o valor de V , M , T_1 e T_2 para cada um dos cinco planos.

	V	M	T_1	T_2
Plano A	R\$ 25,00	20 min	R\$ 1,50/min	R\$ 2,00/min
Plano B	R\$ 60,00	65 min	R\$ 1,00/min	R\$ 1,20/min
Plano C	R\$ 60,00	75 min	R\$ 1,00/min	R\$ 1,50/min
Plano D	R\$ 120,00	160 min	R\$ 0,80/min	R\$ 0,90/min
Plano E	R\$ 120,00	180 min	R\$ 0,80/min	R\$ 1,20/min

Se um cliente dessa operadora planeja telefonar durante 75 minutos para amigos da mesma operadora e 50 minutos para amigos de outras operadoras, o plano que ele deverá escolher, a fim de pagar menos, é o: **alternativa b**

- a)** Plano A. **c)** Plano C. **e)** Plano E.
b) Plano B. **d)** Plano D.

FUNÇÃO AFIM E FUNÇÃO MODULAR

Mobilidade urbana sustentável

Nos centros urbanos, o número cada vez maior de veículos motorizados e o uso excessivo de transportes individuais intensificam alguns problemas relacionados à mobilidade, como maior tempo de deslocamento e aumento no número de acidentes.

Nesse cenário, o aluguel de bicicletas e patinetes elétricos como meio de transporte individual alternativo vem ganhando destaque. Esses veículos são menos poluentes do que um com motor a combustão, ocupam menos espaço e, em algumas situações, podem representar uma opção mais ágil e econômica.

De maneira geral, para utilizar um equipamento desse tipo, é necessário baixar o aplicativo da empresa de locação e fazer um cadastro. O valor cobrado costuma considerar uma taxa fixa e um valor variável, que depende do tempo de uso do equipamento.

► Museu de Ciências Naturais Carlos Ritter, em Pelotas (RS), com bicicletas de aluguel para uso compartilhado à frente. Fotografia de 2020.



Não escreva no livro.

Após ler as informações, converse com os colegas e o professor sobre os itens a seguir. **Respostas nas Orientações para o professor.**

1. Que tipos de transporte você costuma utilizar para se locomover no município onde mora?
2. Você já utilizou ou utiliza transporte público? Você considera esse tipo de transporte eficiente? Justifique.
3. No texto, é descrita uma maneira de se cobrar a locação de bicicleta e patinete elétrico. Nessa maneira, que parte do valor é variável, ou seja, pode mudar de uma locação para outra?

GERSON GERLOFF/PULSAR IMAGENS

Função afim: ideias iniciais e definição

Na abertura desta Unidade, foram apresentadas algumas informações sobre mobilidade urbana e meios de transporte alternativos, como o aluguel de bicicletas e de patinetes elétricos para pequenos deslocamentos. Nesse contexto, considere a seguinte situação.

Certa empresa oferece locação de patinetes elétricos para transporte em uma região delimitada de um município. Para utilizar esse serviço, o cliente deve pagar um valor composto de uma taxa fixa de R\$ 3,00 mais R\$ 0,80 para cada minuto de uso do patinete. Acompanhe, a seguir, a relação entre o tempo de uso do patinete, em minuto, e o valor a ser pago pela locação, em reais.



► Mulher andando de patinete elétrico.

Tempo (min)	Valor total (R\$)
1	$0,80 \cdot 1 + 3 = 3,80$
2	$0,80 \cdot 2 + 3 = 4,60$
3	$0,80 \cdot 3 + 3 = 5,40$
4	$0,80 \cdot 4 + 3 = 6,20$
5	$0,80 \cdot 5 + 3 = 7,00$

Essa relação também pode ser expressa pela função f cuja lei de formação pode ser escrita como:

$$f(x) = 0,80x + 3$$

Diagrama de anotações para a equação $f(x) = 0,80x + 3$:

- Valor a pagar por minuto de uso (R\$/min) aponta para $0,80$
- Taxa fixa (R\$) aponta para 3
- Valor total a pagar (R\$) em função do tempo de uso (min) aponta para $f(x)$
- Tempo de uso (min) aponta para x

Podemos, por exemplo, determinar o valor, em reais, a ser pago pelo uso de 10 min desse patinete calculando $f(10)$:

$$f(10) = 0,80 \cdot 10 + 3 = 8 + 3 = 11, \text{ ou seja, R\$ 11,00.}$$

A função definida pela lei de formação $f(x) = 0,80x + 3$, que representa essa situação, é um exemplo de **função afim**.

Denominamos **função afim** toda função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, definida pela lei de formação $f(x) = ax + b$, em que a e b são números reais.

Dizemos que a é o **coeficiente** de x e b é o **termo independente** da função.

A variável independente é x , que representa o tempo de uso do patinete, em minuto. A variável dependente é $y = f(x)$, que corresponde ao valor total a pagar, em reais.

PARA PENSAR

Na função apresentada:

- qual é a variável independente? E a variável dependente?
- qual é o valor de $f(15)$ e o que esse resultado indica?

Temos que $f(15) = 15$. Indica que, ao usar o patinete por 15 min, deve-se pagar o valor de R\$ 15,00.

Observe alguns exemplos de função afim.

$$f(x) = -2x + 5$$

Nesse caso, $a = -2$ e $b = 5$.

$$f(x) = -12x$$

Nesse caso, $a = -12$ e $b = 0$.

$$f(x) = -x - \sqrt{3}$$

Nesse caso, $a = -1$ e $b = -\sqrt{3}$.

$$f(x) = 7x - 4,6$$

Nesse caso, $a = 7$ e $b = -4,6$.

$$f(x) = \frac{6}{15}x + 3$$

Nesse caso, $a = \frac{6}{15}$ e $b = 3$.

$$f(x) = 8,4$$

Nesse caso, $a = 0$ e $b = 8,4$.

A função afim em que $a = 0$ é denominada **função constante**, e aquela em que $a \neq 0$ é denominada **função polinomial do 1º grau**. Entre os exemplos citados, $f(x) = 8,4$ é uma função constante, e as demais são funções polinomiais do 1º grau.

PARA PENSAR

Outro caso particular de função afim é a denominada **função nula**, em que $a = 0$ e $b = 0$.

- A função nula também é um caso particular de função constante? Justifique.
- Qual é a lei de formação de uma função nula g ? $g(x) = 0$

Sim, pois, como na função nula temos $a = 0$, ela também é uma função constante.

Agora, considere outra situação.

A fibra alimentar está presente nos alimentos de origem vegetal. Ela é a parte do alimento ingerido que não é absorvida pelo nosso organismo e chega quase intacta ao intestino, auxiliando no funcionamento deste. Além disso, pode contribuir para a prevenção de diversas doenças, como colesterol alto, diabetes e infecções. Entre os alimentos ricos em fibra alimentar, estão as leguminosas, como feijão, ervilha e lentilha. Uma porção de 100 g de lentilha, por exemplo, contém cerca de 8 g de fibra alimentar.



IMAGEM/SHUTTERSTOCK.COM

► A lentilha é uma leguminosa rica em fibra alimentar.

Note que, nesse caso, a massa de lentilha e a massa de fibra alimentar são **grandezas diretamente proporcionais**, ou seja, se aumentarmos ou reduzirmos uma delas, a outra também aumentará ou ficará reduzida, respectivamente, na mesma proporção. Observe essa proporcionalidade representada na tabela a seguir.

Proporção de massa de lentilha e massa de fibra alimentar

	Massa de lentilha (em grama)	Massa de fibra alimentar (em grama)	
	25	2	
: 4	50	4	: 2
	100	8	
: 2	200	16	: 2
	300	24	

Fonte dos dados: NÚCLEO DE ESTUDOS E PESQUISAS EM ALIMENTAÇÃO. **Tabela brasileira de composição de alimentos**. 4. ed. rev. ampl. Campinas: Nepa: Unicamp, 2011. p. 62. Disponível em: https://www.nepa.unicamp.br/wp-content/uploads/sites/27/2023/10/taco_4_edicao_ampliada_e_revisada.pdf. Acesso em: 27 jun. 2024.

Analisando a tabela anterior, é possível constatar que a razão entre a massa de fibra alimentar e a massa de lentilha correspondente é um valor constante e positivo.

$$\frac{2}{25} = 0,08$$

$$\frac{4}{50} = 0,08$$

$$\frac{8}{100} = 0,08$$

$$\frac{16}{200} = 0,08$$

$$\frac{24}{300} = 0,08$$

Quando as grandezas envolvidas em determinado problema estão relacionadas de maneira diretamente proporcional, pode-se representar essa relação por meio de uma **função linear**. Assim, a situação envolvendo a quantidade de fibra alimentar em uma porção de lentilha pode ser representada por meio da função linear h .

Massa de fibra alimentar (g) em função da massa de lentilha (g) $h(x) = 0,08x$ Massa de fibra alimentar por grama de lentilha Massa de lentilha (g)

Denominamos **função linear** toda função afim $f(x) = ax + b$, em que $a \neq 0$ e $b = 0$, ou seja, toda função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, definida pela lei de formação $f(x) = ax$, em que a é número real não nulo.

Observe alguns exemplos de função linear.

$$f(x) = -3x$$

Nesse caso, $a = -3$.

$$m(x) = \sqrt{7}x$$

Nesse caso, $a = \sqrt{7}$.

$$g(x) = x$$

Nesse caso, $a = 1$.

$$h(x) = \frac{2}{3}x$$

Nesse caso, $a = \frac{2}{3}$.

A função linear em que $a = 1$ é denominada **função identidade**. Entre os exemplos apresentados, $g(x) = x$ é a função identidade.

Atividade resolvida

R1. Na abertura desta Unidade, estudamos um exemplo de transporte ágil e econômico e que pode contribuir para uma mobilidade urbana sustentável. Nesse contexto, algumas alternativas que vêm crescendo no Brasil são o compartilhamento ou aluguel de veículos e a utilização de carros elétricos, que diminuem tanto a poluição atmosférica como a sonora. De olho nesse nicho, algumas empresas estão disponibilizando veículos elétricos para locação por períodos de apenas alguns minutos até algumas horas, geralmente para deslocamentos curtos em centros urbanos. Observe, a seguir, dois planos de locação de carros elétricos oferecidos por certa locadora.

- Plano **A**: R\$ 10,00 mais R\$ 0,25 por minuto.
- Plano **B**: R\$ 30,00 mais R\$ 0,09 por minuto.

Calcule o tempo t de locação de um carro elétrico dessa locadora de maneira que o valor final seja o mesmo, independentemente do plano escolhido.

PARA AMPLIAR

Acesse este [site](https://bvsms.saude.gov.br/bvs/publicacoes/guia_alimentar_alimentacao_saudavel_1edicao.pdf) para obter mais informações sobre alimentação saudável.

- BRASIL. Ministério da Saúde. **Guia alimentar**: como ter uma alimentação saudável. Brasília, DF: MS, 2013. Disponível em: https://bvsms.saude.gov.br/bvs/publicacoes/guia_alimentar_alimentacao_saudavel_1edicao.pdf. Acesso em: 4 set. 2024.

Resolução

Inicialmente, podemos escrever a lei de formação de uma função afim para cada plano de locação.

Plano A:

Valor cobrado por minuto de locação (R\$/min) Valor fixo (R\$)

$$A(t) = 0,25t + 10$$

Valor total a pagar (R\$) em função do tempo de locação t (min) Tempo de locação (min)

Plano B:

Valor cobrado por minuto de locação (R\$/min) Valor fixo (R\$)

$$B(t) = 0,09t + 30$$

Valor total a pagar (R\$) em função do tempo de locação t (min) Tempo de locação (min)

Consideramos k um número real tal que $A(k) = B(k)$, ou seja, o valor total a ser pago pela locação em ambos os planos é o mesmo para o tempo k , em minuto. Assim, temos:

$$A(k) = B(k) \Rightarrow 0,25k + 10 = 0,09k + 30 \Rightarrow 0,16k = 20 \Rightarrow k = \frac{20}{0,16} \Rightarrow k = 125, \text{ ou seja, } 125 \text{ min.}$$

Portanto, para que o valor pago seja o mesmo, independentemente do plano escolhido, o tempo de locação do carro elétrico deve ser de 125 min.

● Determinação de uma função afim

Leia a situação a seguir.

Paulo trabalha como vendedor em uma loja de vestuário. Sua remuneração mensal, em reais, pode ser expressa por uma função afim f composta de uma parte fixa e outra variável, correspondente à comissão, ou seja, um percentual do valor de suas vendas no mês.

Observe as informações sobre a remuneração de Paulo em dois meses.

Valor mensal das vendas	Remuneração mensal (R\$)
R\$ 30.000,00	R\$ 3.000,00
R\$ 40.000,00	R\$ 3.500,00

Com base nessas informações, temos:

- $f(30\,000) = 3\,000$;
- $f(40\,000) = 3\,500$.

Podemos determinar a lei de formação de f , representada por $f(x) = ax + b$, da maneira a seguir.

Substituindo os valores de x e de $f(x)$ fornecidos na lei de formação de f , temos:

- $f(30\,000) = 3\,000 \Rightarrow 30\,000a + b = 3\,000$;
- $f(40\,000) = 3\,500 \Rightarrow 40\,000a + b = 3\,500$.



FRAU AUS UA/SHUTTERSTOCK.COM

▶ Vendedor de uma loja de roupas e calçados.

DICA

A igualdade $f(30\,000) = 3\,000$ indica que, para $x_1 = 30\,000$, se tem, $f(x_1) = 3\,000$.

Com isso, podemos obter os valores de a e b resolvendo o seguinte sistema de equações.

$$\begin{cases} 30000a + b = 3000 \cdot (-1) \\ 40000a + b = 3500 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -30000a - b = -3000 \\ 40000a + b = 3500 \end{cases} +$$

$$10000a + 0b = 500 \Rightarrow a = \frac{500}{10000} = 0,05$$

Substituindo $a = 0,05$ na primeira equação desse sistema, temos:

$$30000 \cdot 0,05 + b = 3000 \Rightarrow b = 3000 - 1500 = 1500$$

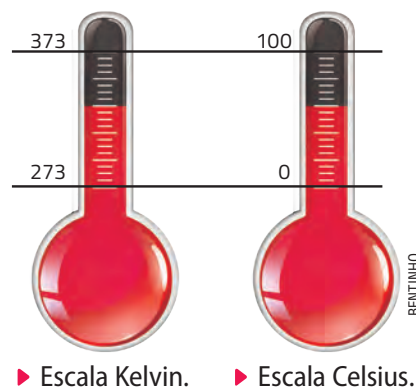
Portanto, $f(x) = 0,05x + 1500$.

Atividade resolvida

R2. A escala de temperatura Kelvin, que é a unidade de medida de temperatura termodinâmica do Sistema Internacional de Medidas (SI), costuma ser utilizada para fins científicos. Observe, na figura, a relação entre as escalas de temperatura Kelvin e Celsius. Sabendo que essa relação pode ser representada por uma função afim, calcule a quantos kelvin corresponde uma temperatura de -54°C .

Resolução

Para resolver esta atividade, podemos fazer a decomposição dela em etapas, o que auxilia na compreensão e na resolução. Nesse caso, as questões podem ser as seguintes.



1ª) A qual temperatura, em grau Celsius, corresponde 273 K? E 373 K?

2ª) Qual é a lei de formação de uma função afim $f(x) = ax + b$ que converte uma temperatura x em grau Celsius para kelvin?

3ª) Qual é o valor de $f(-54)$?

1ª) Observando a figura apresentada, temos:

- 273 K corresponde a 0°C ;
- 373 K corresponde a 100°C .

2ª) Da resposta à questão anterior, segue que:

- $f(0) = 273 \Rightarrow a \cdot 0 + b = 273 \Rightarrow b = 273$
- $f(100) = 373 \Rightarrow a \cdot 100 + b = 373 \Rightarrow 100a + b = 373$

Substituindo $b = 273$ em $100a + b = 373$, temos:

$$100a + 273 = 373 \Rightarrow 100a = 100 \Rightarrow a = 1$$

Portanto, $f(x) = x + 273$.

3ª) Considerando a função obtida na 2ª questão, temos:

$$f(-54) = -54 + 273 = 219$$

Logo, a temperatura -54°C corresponde a 219 K.

1. b) $a = -2; b = -8,4$

1. d) $a = 1; b = 0$; função linear e função identidade

1. e) $a = \frac{3}{5}; b = 0$; função linear

1. f) $a = 0; b = -37$

1. g) $a = \sqrt{3}; b = \frac{2}{3}$

ATIVIDADES

Não escreva no livro.

1. Em relação a cada função afim indicada a seguir, escreva os valores do coeficiente a (de x) e do termo independente b . Depois, identifique as funções lineares e a função identidade.

a) $f(x) = 8x + 10$ $\begin{matrix} a = 8; \\ b = 10 \end{matrix}$

f) $f(x) = -37$

b) $f(x) = -2x - 8,4$

g) $f(x) = \sqrt{3}x + \frac{2}{3}$

c) $f(x) = 4 - 6x$ $\begin{matrix} a = -6; \\ b = 4 \end{matrix}$

h) $f(x) = -x$
 $a = -1; b = 0$; função linear

d) $f(x) = x$

e) $f(x) = \frac{3}{5}x$

2. Dadas as funções afins $f(x) = 6x + 84$ e $g(x) = -4x - 6$, calcule:

a) $f(-7)$ 42

e) $f(2) + g(-10)$ 130

b) $g(5)$ -26

f) $g(4) - f(-3)$ -88

c) $g(0)$ -6

d) $f\left(\frac{5}{3}\right)$ 94

g) $\frac{f(-5)}{g(3)}$ -3

3. Em certo condomínio residencial, o consumo médio de água é de 2000 L por hora. Para abastecer os moradores por determinado período, em casos de falta de fornecimento pela companhia de água, foi construída uma caixa-d'água com capacidade para 100 000 L.

- a) Qual das alternativas a seguir corresponde à lei de formação de uma função v que relaciona o volume $v(t)$ de água nessa caixa, em litro, com o tempo t , em hora, que esse condomínio fica sem fornecimento de água, considerando a caixa-d'água inicialmente cheia? $v(t) = 100\,000 - 2000t$

▪ $v(t) = 2000 - 100\,000t$

▪ $v(t) = 100\,000 - 2000t$

▪ $v(t) = 100\,000 + 2000t$

- b) Qual é o volume de água nessa caixa-d'água após um período de 15 h de suspensão do fornecimento de água? 70 000 L

- c) Durante quantas horas o volume de água dessa caixa-d'água é capaz de abastecer os moradores desse condomínio durante a suspensão de fornecimento de água? 50 h

4. Antes de ser ligado, um forno elétrico registra uma temperatura interna de 25 °C. Após ser ligado, a temperatura interna desse forno

4. a) Resposta nas Orientações para o professor.

aumenta 15 °C por minuto até atingir a temperatura selecionada.

- a) Construa uma tabela para relacionar a temperatura interna desse forno, em grau Celsius, com os tempos de 0, 1, 2, 3, 4 e 5 minutos após o forno ter sido ligado.

- b) Qual dos itens a seguir indica a lei de formação de uma função afim f que determina a temperatura interna do forno, em grau Celsius, de acordo com o tempo x , em minuto, em que o forno permanece ligado? Explique com suas palavras como você chegou à conclusão.

IV. Elaboração do estudante.

I) $f(x) = 25x + 15$

II) $f(x) = -15x + 25$

III) $f(x) = 5x + 3$

IV) $f(x) = 15x + 25$

- c) Leia a informação a seguir e responda às questões.

Ao ligar o forno, a temperatura selecionada foi de 280 °C.

- Qual é a temperatura interna do forno, após permanecer ligado por 10 min? 175 °C
- Quantos minutos foram necessários para o forno atingir a temperatura selecionada? 17 min

5. Para realizar o transporte rodoviário de leite, uma indústria de laticínios utiliza um caminhão-tanque com capacidade para 18 000 L. Esse caminhão é equipado com uma bomba de transferência de leite cuja vazão é de 160 L por minuto.

- a) Escreva a lei de formação de uma função L que relaciona o volume $L(t)$ de leite nesse caminhão, em litro, com o tempo t , em minuto, após a bomba ser acionada para esvaziar o tanque, considerando-o inicialmente cheio. $L(t) = 18\,000 - 160t$

- b) Qual é o tempo necessário para esvaziar completamente o tanque de leite desse caminhão, considerando-o inicialmente cheio? 1h52min30s

6. a) aproximadamente R\$ 341,91; R\$ 1.071,54
6. b) 300 dólares; aproximadamente 273,50 euros

6. c) Sim, pois, se aumentarmos ou reduzirmos uma das grandezas, a outra também aumentará ou ficará reduzida, respectivamente, na mesma proporção.

6. d) $f(x) = 4,8844x$
 $g(p) = 5,3577p$

6. Observe a cotação, em reais, para a compra de um dólar e de um euro ao final do dia 8 de janeiro de 2024.

Cotação de fechamento do dólar e do euro, para compra, 8/1/2024

Moeda	Preço de compra (R\$)
Dólar	4,8844
Euro	5,3577

Fonte dos dados: BRASIL. Banco Central do Brasil. **Cotações e boletins**. Brasília, DF: BCB, 2024. Disponível em: www.bcb.gov.br/acesoinformacao/legado?url=https%3F%2Fwww4.bcb.gov.br%2Fpec%2Ftaxas%2Fport%2Fptaxnpesq.asp. Acesso em: 9 jan. 2024.

CAREL VAN HUYSTEEN/
SHUTTERSTOCK.COM



► Moeda de um real.

ANTON STARIKOV/
SHUTTERSTOCK.COM



► Moeda de um dólar americano.

SPROVIEW INC/
SHUTTERSTOCK.COM



► Moeda de um euro.


Agora, responda.

- a) Quantos reais eram necessários para comprar 70 dólares? E para comprar 200 euros?
b) Com R\$ 1.465,32, era possível comprar quantos dólares? E quantos euros?
c) As grandezas real e dólar e as grandezas real e euro estão relacionadas de maneira diretamente proporcional? Explique.
d) Escreva a lei de formação de uma função:
▪ f que represente a quantia, em reais, necessária para comprar x dólares;
▪ g que represente a quantia, em reais, necessária para comprar p euros.
e) Com base nas funções indicadas no item d, calcule $f(40)$ e $g(100)$. Depois, descreva o que esses resultados indicam.
f) As funções f e g indicadas no item d podem ser classificadas como funções lineares? Justifique.
g) Pesquise a cotação, em reais, para a compra de um dólar e de um euro em uma data recente. Depois, compare as cotações dessas moedas que você obteve com as do final do dia 8 de janeiro de 2024. **Resposta pessoal.**

7. Pense em um contexto que envolva duas variáveis cuja relação entre elas possa ser expressa por uma função afim. Depois, escreva a lei de formação dessa função e identifique as variáveis
6. e) $f(40) = 195,376$. Para comprar 40 dólares, eram necessários aproximadamente R\$ 195,38. $g(100) = 535,77$. Para comprar 100 euros, eram necessários R\$ 535,77.

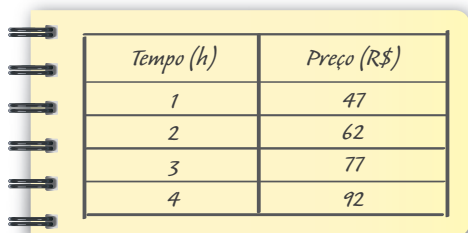
independente e dependente. Por fim, explique a um colega as características dessa função, por exemplo, se as grandezas envolvidas estão relacionadas de maneira proporcional.

Elaboração do estudante.

8. César é vendedor em uma loja de calçados. Seu salário é composto de uma parte fixa, de R\$ 3.500,00, e de uma parte variável, que corresponde a 3% do valor das vendas que ele realizou durante o mês.
a) Qual foi o salário de César no mês em que ele vendeu R\$ 26.840,00 em calçados? **R\$ 4.305,20**
b) Escreva a lei de formação de uma função afim s que relaciona o salário $s(v)$ de César com o valor v das vendas. $s(v) = 0,03v + 3500$
c) No mês cujo salário de César foi de R\$ 4.541,84, qual foi a quantia total das vendas de calçados que ele realizou? **R\$ 34.728,00**
9. Para esvaziar uma piscina, é utilizada uma bomba-d'água com vazão de $8 \text{ m}^3/\text{h}$. Considerando a piscina inicialmente cheia, a variação do volume de água V de acordo com o tempo t decorrido após a bomba ser ligada pode ser expressa pela função $V(t) = 100 - 8t$, com V em metro cúbico e t em hora.

► Área de lazer de um clube, em Londrina (PR). Fotografia de 2024.
9. a) 100 m^3
a) Qual é a capacidade máxima dessa piscina?
b) Qual é o volume de água nessa piscina, 4 horas após a bomba-d'água ser ligada, considerando que inicialmente a piscina está cheia? 68 m^3
c) Qual é o tempo necessário para esvaziar completamente essa piscina? **12,5 h ou 12h30min**
6. f) Sim, pois as funções f e g são funções afins em que o termo independente é igual a zero.

ERNESTO REGHRAN/PULSAR IMAGENS

10. Um encanador cobra dos clientes uma quantia fixa, correspondente à visita, mais um valor variável de acordo com o tempo, em hora, necessário para realizar o serviço. Observe, a seguir, o preço que esse encanador cobrou em alguns atendimentos.



Tempo (h)	Preço (R\$)
1	47
2	62
3	77
4	92

- a) Nessa situação, as grandezas tempo (em hora) e preço (em reais) são diretamente proporcionais? Justifique.
- b) Escreva a lei de formação de uma função p que determina o preço cobrado pelo atendimento desse encanador de acordo com o tempo t necessário para realizar o serviço.
- c) Calcule quantos reais esse encanador cobra por um atendimento no qual foram necessárias:
- 5 horas de serviço; **R\$ 107,00**
 - 10 horas de serviço. **R\$ 182,00**
- d) Em certo atendimento, esse encanador cobrou R\$ 84,50 do cliente. Em quanto tempo esse serviço foi realizado? **3,5 h ou 3h30min**
11. Para um trabalho de Geografia, Rafael imprimiu um mapa da região de Rio Grande (RS), município em que mora. Depois, ele construiu a tabela a seguir com distâncias reais, em linha reta, e medidas no mapa, entre Rio Grande e outros municípios da região.

Distâncias, em linha reta, entre Rio Grande (RS) e alguns municípios

Município	A	B	C
Distância			
Distância real (km)	7,5	20	50
Medida no mapa (cm)	3	8	20

Fonte: Pesquisas de Rafael.

- a) Escreva a lei de formação de uma função que determine a distância real R entre os municípios, em quilometro, de acordo com a distância d medida no mapa, em centimetro. **$R(d) = 2,5d$**
- b) Qual é a distância, em linha reta, em centimetro, indicada no mapa de Rafael, entre dois municípios cuja distância real entre eles é de 45 km? **18 cm**
- c) Qual é a escala do mapa de Rafael? **1 : 250 000**
12. Com base nas informações do cartaz a seguir, elabore um problema envolvendo função afim. Em seguida, troque o problema com um colega para que um resolva o do outro. Ao final, confiram juntos as resoluções. **Elaboração do estudante.**

Coworking

Locação de estação de trabalho

Taxa fixa: R\$ 10,00

mais R\$ 8,00 por hora de uso



ILUSTRAÇÕES: EDITORIA DE ARTE

NO MUNDO

DO TRABALHO

Profissionais autônomos ou *freelancer*

Os profissionais autônomos, também chamados de **freelancer** (termo em inglês), são aqueles trabalhadores que prestam serviços a empresas ou pessoas por um período determinado, sem vínculo empregatício. Alguns exemplos de profissionais autônomos são: encanador, eletricista, auxiliar de limpeza, vendedor ambulante, técnico em manutenção de computadores etc.

Para garantir seus direitos previdenciários, como auxílio-doença e salário-maternidade, é importante que o profissional autônomo seja formalizado de acordo com a legislação trabalhista, por exemplo, cadastrando-se como um microempreendedor individual (MEI).

Em razão das particularidades inerentes ao profissional autônomo, algumas habilidades comportamentais são necessárias para o bom desenvolvimento de sua carreira, como planejamento, organização, comunicação e relacionamento com o cliente.

10. a) Não, pois, analisando cada linha do quadro, é possível constatar que a razão entre o preço e o tempo não corresponde a uma constante.

10. b) $p(t) = 15t + 32$

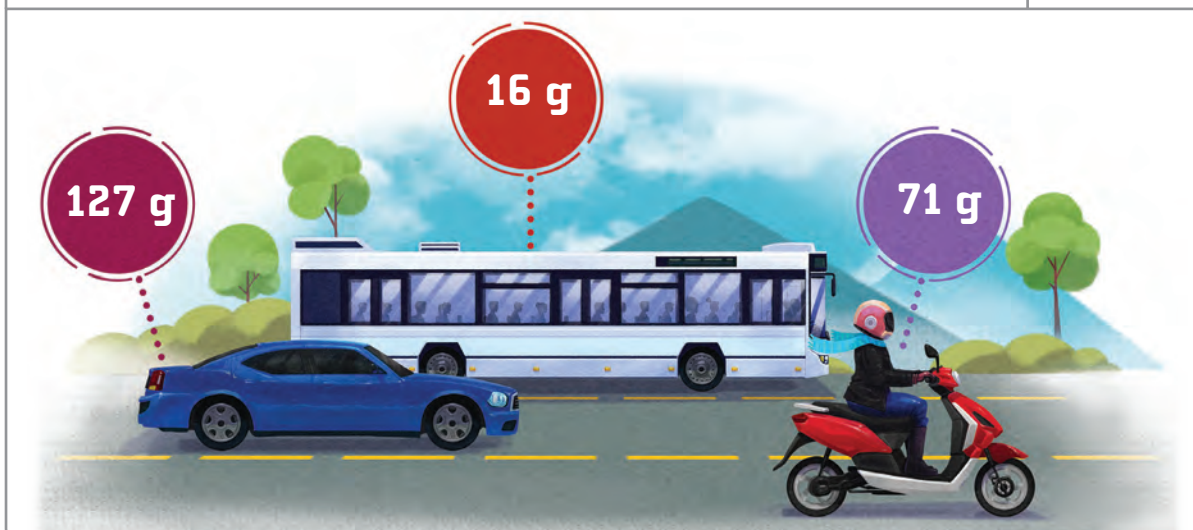
13. Leia o trecho a seguir.

A mobilidade nas cidades brasileiras de médio e grande porte tem se caracterizado pela utilização cada vez mais ineficiente do espaço público em decorrência do aumento do uso do transporte individual motorizado – os automóveis e as motocicletas – e da redução da participação do transporte público coletivo (TPC). Como resultado, ocorrem o aumento do congestionamento do tráfego, da emissão de gases poluentes e do efeito estufa, do número de acidentes de trânsito, dos custos dos transportes e a incapacidade de atender satisfatoriamente as necessidades de locomoção da população.

BRASIL. Banco Nacional de Desenvolvimento Econômico e Social. **Transporte público coletivo (TPC):** os diferentes sistemas e suas características. Brasília, DF: BNDES, 2018. Disponível em: www.bndes.gov.br/wps/portal/site/home/conhecimento/noticias/noticia/guia-tpc. Acesso em: 28 jun. 2024.

Um dos principais efeitos negativos da utilização de transporte individual motorizado é a poluição proveniente da emissão de gases do efeito estufa (GEE), como o CO₂ (dióxido de carbono). Observe, a seguir, dados obtidos em um estudo realizado pelo Instituto de Pesquisa Econômica Aplicada (Ipea) sobre a estimativa da emissão de CO₂ por categoria de veículo.

Emissão de CO₂, por passageiro transportado, no deslocamento de 1 km



Fonte dos dados: CARVALHO, Carlos Henrique Ribeiro de. Emissões relativas de poluentes do transporte urbano. **Boletim Regional, Urbano e Ambiental**, Brasília, DF, n. 5, p. 123-139, jun. 2011. p. 127. Disponível em: https://repositorio.ipea.gov.br/bitstream/11058/4682/1/BRU_n05.pdf. Acesso em: 27 jun. 2024.

Com base nas informações apresentadas, resolva os itens a seguir.

- Quais são as consequências do aumento do uso de transportes individuais e da redução dos transportes coletivos? **Resposta esperada:** Aumentam-se os congestionamentos, a emissão de gases poluentes e o efeito estufa, a quantidade de acidentes de trânsito, entre outras consequências.
- Qual categoria de veículo emite mais CO₂ por passageiro transportado no deslocamento de 1 km? **Resposta esperada:** O automóvel individual.
- Para cada categoria de veículo, escreva a lei de formação de uma função afim que descreva a emissão de CO₂, em grama, no deslocamento de um passageiro por x quilômetros.
- Considere uma pessoa que se desloque diariamente 50 km para realizar suas atividades, como trabalhar e estudar. Calcule a emissão de CO₂, em grama, no deslocamento diário dessa pessoa, considerando cada uma das categorias de veículo apresentadas.
- Pesquise ações, individuais e coletivas, que podem minimizar os impactos ambientais causados pela emissão de CO₂. Em seguida, com base nessas informações e nos itens anteriores, elabore um texto argumentativo que apresente as ações pesquisadas e compare a emissão de gases poluentes de acordo com cada tipo de veículo. **Resposta esperada:** Pesquisa e elaboração do estudante.

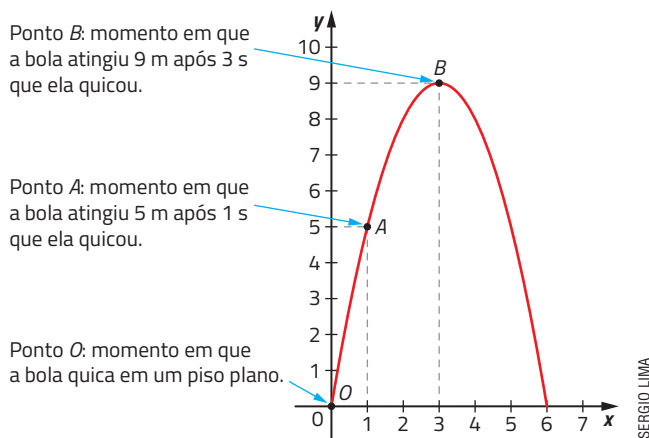
13. c) motocicleta: $m(x) = 71x$; automóvel individual: $a(x) = 127x$; ônibus: $o(x) = 16x$

13. d) motocicleta: 3 550 g; automóvel individual: 6 350 g; ônibus: 800 g

Taxa de variação média de uma função

Considere a situação descrita a seguir.

Uma bola de borracha quica em um piso plano e, a partir desse momento até tocar no piso novamente, realiza uma trajetória que pode ser descrita pela função $f: [0, 6] \rightarrow \mathbb{R}$, definida por $f(x) = -x^2 + 6x$, em que $y = f(x)$ corresponde à altura da bola, em metro, após x segundos do momento em que ela quicou. Observe o gráfico dessa função com três pontos destacados.



► Bola de borracha.

PARA PENSAR

Com suas palavras, explique como é possível verificar que os pontos de coordenadas $(0, 0)$, $(1, 5)$ e $(3, 9)$ pertencem ao gráfico da função f .

Resposta esperada: Calculando, de acordo com a lei de formação da função f , os valores de $f(0) = 0$, $f(1) = 5$ e $f(3) = 9$.

Na situação desse exemplo, podemos estudar quanto variou, em média, a altura da bola no intervalo de tempo de 1 s até 3 s. Esse estudo está relacionado à determinação da taxa de variação média dessa função.

Dada uma função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ e $x_1, x_2 \in D(f)$, com $x_1 \neq x_2$, temos que a **taxa de variação média** de f , para x variando de x_1 até x_2 , é dada por:

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

Em relação à situação apresentada, a taxa de variação média de f , para x variando de 1 até 3, é dada por:

$$\frac{f(3) - f(1)}{3 - 1} = \frac{(-3^2 + 6 \cdot 3) - (-1^2 + 6 \cdot 1)}{2} = \frac{9 - 5}{2} = 2$$

Portanto, podemos dizer que, no intervalo de tempo de 1 s até 3 s após o momento em que a bola quicou no piso, a altura da bola de borracha variou, em média, 2 metros por segundo.

PARA PENSAR

Na situação apresentada, qual é a taxa de variação média da função f quando x varia de 0 até 2? Interprete esse resultado.

Resposta esperada: A taxa de variação média de f quando x varia de 0 até 2 é igual a 4. Esse resultado indica que, no intervalo de tempo de 0 s até 2 s após o momento em que a bola quicou no piso, a altura da bola de borracha variou, em média, 4 metros por segundo.

• Taxa de variação média de uma função afim

Considere a situação descrita a seguir.

Um açude foi construído para disponibilizar água a uma comunidade que vive em certa região árida do país. Na sua inauguração, verificou-se que o açude tinha um volume de água estimado em 13 mil metros cúbicos. No entanto, um monitoramento identificou que, a cada ano, o volume de água diminuía, de acordo com a função definida por $f(x) = -2x + 13$, em que $y = f(x)$ indicava o volume estimado de água no açude, em milhares de metros cúbicos, x anos após sua inauguração.

DELFIN MARTINS/PULSAR IMAGENS

► Açude Engenheiro Ávidos, no município de Cajazeiras (PB). Fotografia de 2022.

Com base nessa situação, podemos analisar quanto variou o volume de água do açude nos intervalos de tempo de 0 ano até 1 ano, de 1 ano até 2 anos e de 1 ano até 3 anos, por exemplo. Para isso, vamos calcular a taxa de variação média da função afim f para x variando de:

- 0 até 1: $\frac{f(1) - f(0)}{1 - 0} = \frac{11 - 13}{1} = -2$
- 1 até 2: $\frac{f(2) - f(1)}{2 - 1} = \frac{9 - 11}{1} = -2$
- 1 até 3: $\frac{f(3) - f(1)}{3 - 1} = \frac{7 - 11}{2} = -2$

Note que as taxas de variação média obtidas são todas iguais a -2 , independentemente de x variar 1 ano ou mais.

PARA PENSAR

Em relação à função constante, o que podemos afirmar sobre sua taxa de variação?

Resposta esperada: Em uma função constante, a taxa de variação é nula, ou seja, $a = 0$.

Em uma função afim $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, definida por $f(x) = ax + b$, chamamos a taxa de variação média de f , para x variando de x_1 até x_2 , com $x_1 \neq x_2$, apenas de **taxa de variação** de f , que, nesse caso, é sempre igual ao coeficiente a .

Podemos estabelecer as propriedades a seguir para uma função afim $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, definida por $f(x) = ax + b$, com $a \neq 0$.

- f é **crecente** se, e somente se, a taxa de variação de f for positiva ($a > 0$), pois:

$$x_2 > x_1 \Leftrightarrow ax_2 > ax_1 \Leftrightarrow ax_2 + b > ax_1 + b \Leftrightarrow f(x_2) > f(x_1)$$

- f é **decrescente** se, e somente se, a taxa de variação de f for negativa ($a < 0$), pois:

$$x_2 > x_1 \Leftrightarrow ax_2 < ax_1 \Leftrightarrow ax_2 + b < ax_1 + b \Leftrightarrow f(x_2) < f(x_1)$$

Atividade resolvida

R3. Considerando as informações apresentadas a seguir, classifique as funções afins $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ e $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ em crescente ou decrescente.

a) $f(0) = 3$ e $f(2) = -5$

b) $g(-2) = 4$ e $g(6) = 8$

Resolução

Para determinar se uma função afim é crescente ou decrescente, podemos calcular e analisar sua taxa de variação.

a) $\frac{f(2) - f(0)}{2 - 0} = \frac{-5 - 3}{2} = -4$

Como $-4 < 0$, a função f é decrescente.

b) $\frac{g(6) - g(-2)}{6 - (-2)} = \frac{8 - 4}{6 + 2} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$

Como $\frac{1}{2} > 0$, a função g é crescente.

Atividades

Não escreva no livro.

14. Determine a taxa de variação média da função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ em cada caso a seguir.

a) $f(x) = 2x^2 + 6$, para x variando de -1 até 2 . **2**

b) $f(x) = 4x - 1$, para x variando de -4 até 0 . **4**

c) $f(x) = 3x^3$, para x variando de 1 até 2 . **21**

d) $f(x) = \frac{x}{2} + 7$, para x variando de -2 até 6 . **$\frac{1}{2}$**

15. Mostre que, em uma função afim $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, definida por $f(x) = ax + b$, o coeficiente a de x é igual à taxa de variação de f para x variando de x_1 até x_2 , com $x_1 \neq x_2$. **Resposta nas Orientações para o professor.**

16. Sem realizar cálculos, determine a taxa de variação de cada função afim a seguir. Depois, classifique cada uma em crescente ou decrescente.

a) $f(x) = 5x + 10$ **5; crescente**

b) $g(x) = -8x + \frac{5}{2}$ **-8; decrescente**

c) $h(x) = 2 - x$ **-1; decrescente**

d) $p(x) = \frac{x}{3} - 1$ **$\frac{1}{3}$; crescente**

17. Em cada item a seguir, são apresentadas informações sobre uma função afim. Classifique cada função afim em crescente ou decrescente.

a) $f(1) = 6$ e $f(5) = -2$ **decrescente**

b) $g(1) = -1$ e $g(-2) = -13$ **crescente**

c) $h(-3) = 0$ e $h(-6) = 3$ **decrescente**

d) $p(-3) = 1$ e $p(6) = 4$ **crescente**

18. Um laboratório químico tem uma câmara fria com temperatura interna constante de -4°C . Em um experimento, para avaliar as reações de uma solução líquida submetida a aquecimento, essa câmara foi programada para que, em certo momento, a temperatura comesse a aumentar gradativamente.

Sabendo que a temperatura interna dessa câmara registrou 1°C após 1 h do experimento e 16°C após 4 h do experimento e que, no intervalo de tempo da realização do experimento, a temperatura interna dessa câmara pôde ser expressa por uma função afim f , resolva os itens a seguir.

a) As grandezas temperatura interna da câmara fria e tempo do experimento são grandezas diretamente proporcionais? Justifique.

b) Qual é a taxa de variação da função f ? O que ela indica? **c) $f: [0, 4] \rightarrow \mathbb{R}$, definida por $f(t) = 5t - 4$**

c) Escreva a lei de formação de f , representando o tempo, em hora, por t .

d) Quanto tempo após o início desse experimento a temperatura interna da câmara atingiu 6°C ? **2 h**

18. a) Não, pois, por exemplo, ao quadruplicar o tempo do experimento, a temperatura interna da câmara fria não quadruplica, uma vez que, em 1 h do experimento, a temperatura era de 1°C e, em 4 h, era de 16°C .

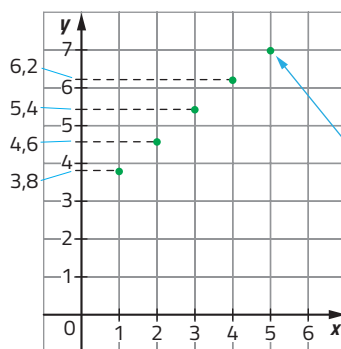
18. b) 5. Indica que, a cada hora, a temperatura interna da câmara fria aumentou 5°C .

Gráfico da função afim

Vamos retomar o contexto apresentado no início desta Unidade, em que determinamos a função $f(x) = 0,80x + 3$, que expressa o preço a pagar $y = f(x)$ pela locação de um patinete elétrico por um tempo x , em minuto.

Estudamos, na Unidade 2, que uma função pode ser representada por meio de um gráfico no plano cartesiano. Em relação à situação que envolve a locação de patinetes, para esboçarmos o gráfico de f , podemos obter pares ordenados (x, y) e representá-los no plano cartesiano.

x	y	(x, y)
1	$0,80 \cdot 1 + 3 = 3,8$	$(1; 3,8)$
2	$0,80 \cdot 2 + 3 = 4,6$	$(2; 4,6)$
3	$0,80 \cdot 3 + 3 = 5,4$	$(3; 5,4)$
4	$0,80 \cdot 4 + 3 = 6,2$	$(4; 6,2)$
5	$0,80 \cdot 5 + 3 = 7$	$(5, 7)$



► Modelo de patinete elétrico.

Este ponto do gráfico, cujas coordenadas são $(5, 7)$, indica que o preço da locação do patinete por 5 minutos é de R\$ 7,00.

DICA

Lembre-se de que, nesta situação, o cliente deveria pagar um valor composto de uma taxa fixa de R\$ 3,00 mais R\$ 0,80 para cada minuto de uso do patinete elétrico.

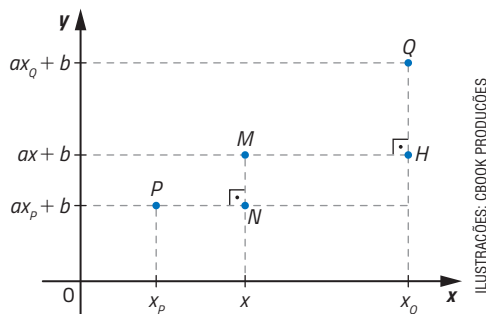
Note que os pontos do gráfico da função f sugerem a construção de uma reta passando por eles. De fato, podemos conjecturar que o gráfico de qualquer função afim, com domínio \mathbb{R} , é uma reta. Para garantir a validade dessa conjectura, precisamos demonstrar que ela é verdadeira. Acompanhe.

Inicialmente, consideramos a função afim $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, definida por $f(x) = ax + b$, com $a \neq 0$ e $b \in \mathbb{R}$, e os pontos $P(x_p, y_p)$ e $Q(x_q, y_q)$ do gráfico dessa função. Vamos mostrar que qualquer outro ponto $M(x, y)$ desse gráfico pertence à reta \overleftrightarrow{PQ} .

Como P, Q e M pertencem ao gráfico de f , temos que:

$$\begin{cases} y_p = ax_p + b \\ y_q = ax_q + b \\ y = ax + b \end{cases}$$

Assim, podemos representar esses pontos no plano cartesiano da seguinte maneira.



ILUSTRAÇÕES: CBOOK PRODUÇÕES

DICA

Na imagem, é possível notar que a função afim representada é crescente, uma vez que $x_q > x_p$ e $y_q > y_p$. No entanto, a demonstração pode ser realizada de maneira análoga para o caso da função afim decrescente.

Note que os pontos auxiliares H e N foram escolhidos de modo que PMN e MQH sejam triângulos retângulos. As coordenadas desses pontos são $H(x_Q, ax + b)$ e $N(x, ax_P + b)$. Assim, temos:

- $QH = (ax_Q + b) - (ax + b) = ax_Q + b - ax - b = a(x_Q - x)$
- $MN = (ax + b) - (ax_P + b) = ax + b - ax_P - b = a(x - x_P)$
- $HM = x_Q - x$
- $NP = x - x_P$

Logo, podemos escrever a seguinte relação entre as medidas dos catetos.

$$\frac{QH}{MN} = \frac{a(x_Q - x)}{a(x - x_P)} = \frac{x_Q - x}{x - x_P} = \frac{HM}{NP}$$

Como $\frac{QH}{MN} = \frac{HM}{NP}$ e $\text{med}(\widehat{QHM}) = \text{med}(\widehat{MNP}) = 90^\circ$,

temos pelo caso LAL (lado, ângulo, lado) que os triângulos PMN e MQH são semelhantes. Logo, todos os demais pares de ângulos internos correspondentes têm medidas iguais.

$$\text{med}(\widehat{MQH}) = \text{med}(\widehat{PMN}) \text{ e}$$

$$\text{med}(\widehat{HMQ}) = \text{med}(\widehat{NPM}).$$

Como $\vec{MH} \parallel \vec{NP}$ e $\text{med}(\widehat{HMQ}) = \text{med}(\widehat{NPM})$, podemos afirmar que os pontos P , Q e M são colineares, ou seja, pertencem a uma mesma reta. Logo, M pertence à reta \vec{PQ} .

Em relação à função constante $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, ou seja, quando $a = 0$, a lei de formação é $f(x) = b$. Nesse caso, todos os pontos do gráfico de f são do tipo (x, b) , que resultam em uma reta paralela ou coincidente ao eixo x e que cruza o eixo y na ordenada b .

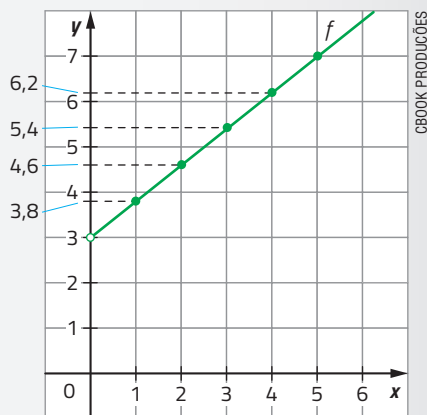
Portanto, o gráfico de qualquer função afim, com domínio \mathbb{R} , é uma reta.

DICA

Indicamos a medida de um ângulo \widehat{MNP} como $\text{med}(\widehat{MNP})$. Indicamos que as retas \vec{MH} e \vec{NP} são paralelas utilizando a notação $\vec{MH} \parallel \vec{NP}$.

Como dois pontos distintos determinam uma única reta, podemos esboçar o gráfico de uma função afim com domínio \mathbb{R} determinando as coordenadas de apenas dois de seus pontos.

Em relação à situação do preço de locação do patinete, é importante considerar que o domínio da função é \mathbb{R}_+^* , uma vez que o tempo de locação não pode ser negativo ou nulo. Nesse caso, temos que o gráfico de f é dado por:

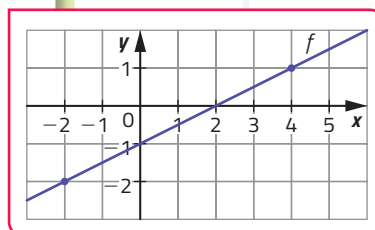


Acompanhe os exemplos a seguir de construção de gráficos de algumas funções afins.

Exemplo 1

Função afim $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, definida por $f(x) = \frac{x}{2} - 1$.

x	$f(x) = \frac{x}{2} - 1$	(x, y)
-2	$f(-2) = \frac{-2}{2} - 1 = -2$	$(-2, -2)$
4	$f(4) = \frac{4}{2} - 1 = 1$	$(4, 1)$



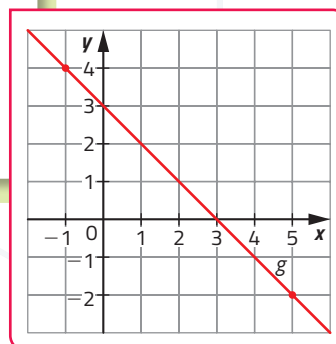
DICA

Note que a taxa de variação de f é positiva ($a = \frac{1}{2}$), ou seja, f é uma função crescente. Nesse caso, o gráfico de f é uma reta ascendente da esquerda para a direita.

Exemplo 2

Função afim $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, definida por $g(x) = 3 - x$.

x	$g(x) = 3 - x$	(x, y)
-1	$g(-1) = 3 - (-1) = 4$	$(-1, 4)$
5	$g(5) = 3 - 5 = -2$	$(5, -2)$



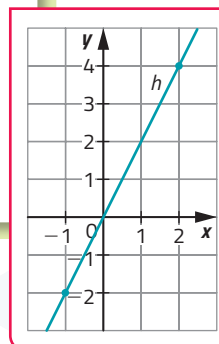
DICA

Note que a taxa de variação de g é negativa ($a = -1$), ou seja, g é uma função decrescente. Nesse caso, o gráfico de g é uma reta descendente da esquerda para a direita.

Exemplo 3

Função afim $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, definida por $h(x) = 2x$.

x	$h(x) = 2x$	(x, y)
-1	$h(-1) = 2 \cdot (-1) = -2$	$(-1, -2)$
2	$h(2) = 2 \cdot 2 = 4$	$(2, 4)$



DICA

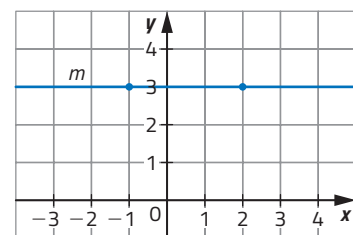
Note que h é uma função linear. Nesse caso, o gráfico de h passa pela origem do plano cartesiano.

ILUSTRAÇÕES: CBOOK PRODUÇÕES

Exemplo 4

Função $m: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, definida por $m(x) = 3$.

x	$m(x) = 3$	(x, y)
-1	$m(-1) = 3$	$(-1, 3)$
2	$m(2) = 3$	$(2, 3)$



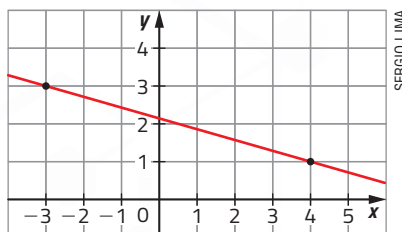
CBOOK PRODUÇÕES

DICA

Note que a taxa de variação de m é nula ($a = 0$), ou seja, m é uma função constante. O gráfico de uma função constante é uma reta paralela ao eixo das abscissas.

ATIVIDADES RESOLVIDAS

R4. Observe o gráfico de uma função afim f no plano cartesiano a seguir e resolva as questões.



SÉRGIO LIMA

- Qual é o valor de $f(4)$?
- Para qual valor de $x \in D(f)$ têm-se $f(x) = 3$?
- A função f é crescente ou decrescente?
- Determine a taxa de variação da função afim f .

Resolução

- Para determinar $f(4)$, analisando o gráfico podemos identificar a ordenada y do ponto desse gráfico cuja abscissa é 4. Como o ponto de coordenadas $(4, 1)$ pertence ao gráfico de f , temos $f(4) = 1$.
- Para determinar o valor x do domínio de f para o qual $f(x) = 3$, analisando o gráfico podemos identificar a abscissa x do ponto desse gráfico cuja ordenada é 3. Como o ponto de coordenadas $(-3, 3)$ pertence ao gráfico de f , temos $f(x) = 3$ para $x = -3$.
- Dos itens anteriores, temos $f(4) = 1$ e $f(-3) = 3$. Assim, dados os números reais -3 e 4 pertencentes ao domínio de f , sendo $-3 < 4$, temos $\underbrace{f(-3)}_3 > \underbrace{f(4)}_1$.

Portanto, a função f é decrescente.

- Calculando a taxa de variação da função afim f , temos:

$$\frac{f(4) - f(-3)}{4 - (-3)} = \frac{1 - 3}{4 + 3} = \frac{-2}{7}$$

Portanto, a taxa de variação da função f é $-\frac{2}{7}$.

R5. (Enem/MEC) Um dos grandes desafios do Brasil é o gerenciamento dos seus recursos naturais, sobretudo os recursos hídricos. Existe uma demanda crescente por água e o risco de racionamento não pode ser descartado. O nível de água de um reservatório foi monitorado por um período, sendo o resultado mostrado no gráfico. Suponha que essa tendência linear observada no monitoramento se prolongue pelos próximos meses.

Nas condições dadas, qual o tempo mínimo, após o sexto mês, para que o reservatório atinja o nível zero de sua capacidade?

- a) 2 meses e meio. d) 4 meses.
b) 3 meses e meio. e) 1 mês.
c) 1 mês e meio.



Resolução

Para resolver esta atividade, podemos realizar as seguintes etapas.

1ª COMPREENDER O ENUNCIADO

Do enunciado, temos que:

- o nível de água de um reservatório foi monitorado por um período de tempo e o resultado é mostrado pelo gráfico, que descreve uma tendência linear;

- os pontos de coordenadas (1, 30) e (6, 10) pertencem ao gráfico.

Temos de identificar qual é o tempo mínimo, após o sexto mês, para que o reservatório atinja o nível zero de sua capacidade.

2ª ELABORAR UM PLANO

O gráfico "Nível do reservatório" representa a função afim f que corresponde ao nível de água do reservatório, em porcentagem, no mês x . Analisando os pontos do gráfico, podemos determinar a lei de formação de f , expressa na forma $f(x) = ax + b$, e,

então, calcular para qual valor de x temos $f(x) = 0$, isto é, o zero da função. Por fim, podemos subtrair 6 desse resultado para obter a quantidade mínima de meses, após o sexto mês, para que o nível de água do reservatório seja zero.

3ª EXECUTAR O PLANO

Como os pontos de coordenadas (1, 30) e (6, 10) pertencem ao gráfico de f , podemos determinar a taxa de variação de f e o valor de b :

- $a = \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} = \frac{30 - 10}{1 - 6} = -4$;
- $f(1) = 30 \Rightarrow -4 \cdot 1 + b = 30 \Rightarrow b = 30 + 4 = 34$.

Assim, temos que $f(x) = -4x + 34$ e podemos calcular o zero de f :

$$0 = -4x + 34 \Rightarrow 4x = 34 \Rightarrow x = 8,5$$

Logo, em 8,5 meses, o nível de água do reservatório será zero, ou seja, 2,5 meses após o sexto mês (8,5 - 6).

4ª VERIFICAR OS RESULTADOS

Para verificar o resultado obtido, podemos realizar os seguintes cálculos:

- $f(1) = -4 \cdot 1 + 34 = 30$; $f(6) = -4 \cdot 6 + 34 = 10$; $f(8,5) = -4 \cdot 8,5 + 34 = 0$.

Note que esses cálculos indicam que os pontos de coordenadas (1, 30) e (6, 10) pertencem ao gráfico da função f e que 8,5 é o zero dessa função.

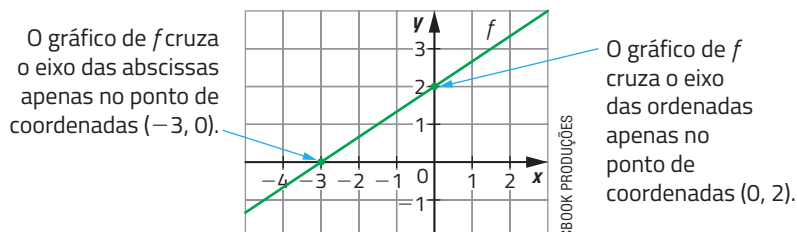
Portanto, a alternativa **a** é a correta.

• Interseção do gráfico de uma função afim com os eixos cartesianos

O gráfico de toda função afim, não constante, cruza cada um dos eixos cartesianos em um único ponto. Observe, por exemplo, o gráfico da função afim $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, definida por

$$f(x) = \frac{2}{3}x + 2.$$

Resposta esperada: Cruza o eixo das ordenadas em um único ponto e não cruza o eixo das abscissas, pois é uma reta paralela e não coincidente ao eixo das abscissas.



PARA PENSAR

Em quantos pontos o gráfico de uma função constante, não nula, cruza os eixos cartesianos? Justifique.

Agora, observe como podemos determinar as coordenadas dos pontos em que o gráfico de uma função afim cruza os eixos cartesianos.

Seja uma função afim $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, definida por $f(x) = ax + b$, com $a \neq 0$, sendo $P(x_p, y_p)$ e $Q(x_q, y_q)$ os pontos em que o gráfico de f cruza os eixos das abscissas e das ordenadas, respectivamente. Podemos estudar as coordenadas desses pontos da seguinte maneira.

- $P(x_p, y_p)$

Como P pertence ao eixo das abscissas, temos que $y_p = 0$. Assim, segue que:

$$y_p = f(x_p) = 0 \Rightarrow ax_p + b = 0 \Rightarrow x_p = -\frac{b}{a}$$

Portanto, o gráfico da função afim f cruza o eixo das abscissas em $x_p = -\frac{b}{a}$, ou seja, no ponto $P\left(-\frac{b}{a}, 0\right)$.

O **zero da função** afim $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, definida por $f(x) = ax + b$, com $a \neq 0$ é dado por $x = -\frac{b}{a}$.

- $Q(x_q, y_q)$

Como Q pertence ao eixo das ordenadas, temos que $x_q = 0$. Assim, segue que:

$$y_q = f(x_q) = f(0) = a \cdot 0 + b \Rightarrow y_q = b$$

Portanto, o gráfico da função f cruza o eixo das ordenadas em $y_q = b$, ou seja, no ponto $Q(0, b)$.

Em relação ao gráfico da função $f(x) = \frac{2}{3}x + 2$, apresentado anteriormente, as coordenadas dos pontos P e Q , em que ele cruza os eixos das abscissas e das ordenadas, respectivamente, são dadas por:

- $x_p = -\frac{b}{a} = -\frac{2}{\frac{2}{3}} = -3$, ou seja, $P(-3, 0)$;
- $y_q = b = 2$, ou seja, $Q(0, 2)$.

PARA PENSAR

Existe função afim cujo gráfico cruza os eixos das abscissas e das ordenadas em um mesmo ponto? Justifique.

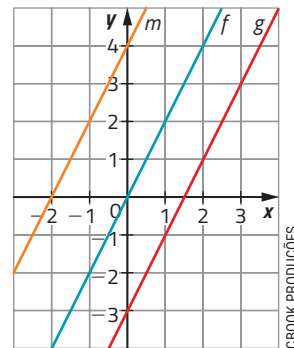
Sim, as funções lineares cruzam os eixos das abscissas e das ordenadas no ponto $O(0, 0)$.

● Translação do gráfico de uma função afim

Observe, em um mesmo plano cartesiano, o gráfico das funções $f(x) = 2x$, $g(x) = 2x - 3$ e $m(x) = 2x + 4$, que têm a mesma taxa de variação, mas com diferentes termos independentes.

Note que esses gráficos correspondem a retas paralelas. Além disso, em relação ao gráfico da função $f(x) = 2x$, cujo termo independente é $b = 0$, temos que o gráfico da função:

- $g(x) = 2x - 3$, cujo termo independente é $b = -3$, corresponde ao gráfico de f transladado 3 unidades para baixo, pois dado um ponto de coordenadas (x_1, y_1) do gráfico de f , então o ponto de coordenadas $(x_1, y_1 - 3)$ pertence ao gráfico de g ;
- $m(x) = 2x + 4$, cujo termo independente é $b = 4$, corresponde ao gráfico de f transladado 4 unidades para cima, pois, dado um ponto de coordenadas (x_1, y_1) do gráfico de f , então o ponto de coordenadas $(x_1, y_1 + 4)$ pertence ao gráfico de m .



PARA PENSAR

Quais são as coordenadas dos pontos em que o gráfico de cada função indicada cruza o eixo das ordenadas?

$f: (0, 0); g: (0, -3); m: (0, 4)$

Considerando uma função afim f dada por $f(x) = ax + b$, com $b \neq 0$, dizemos que o gráfico de f corresponde ao gráfico de uma função g dada por $g(x) = ax$ transladado $|b|$ unidades:

- para cima, se $b > 0$;
- para baixo, se $b < 0$.

ATIVIDADES RESOLVIDAS

- R6.** Em um programa de computador, foi representado o gráfico da função afim definida por $f(x) = 5x + 2$. Em seguida, utilizando uma opção desse programa, foram construídas duas retas, r e s , de maneira que correspondessem a translações do gráfico de f 3 unidades para cima e 4 unidades para baixo, respectivamente. Determine a lei de formação das funções cujos gráficos correspondem às retas r e s .

Resolução

Sejam g e h as funções cujos gráficos correspondem, respectivamente, às retas r e s . Note que o gráfico de f corresponde ao gráfico de uma função j dada por $j(x) = 5x$ transladado 2 unidades para cima. Sendo a reta que corresponde ao gráfico de f e as retas r e s paralelas entre si, podemos escrever que $g(x) = 5x + b_1$ e $h(x) = 5x + b_2$, com $b_1, b_2 \in \mathbb{R}$.

Assim, como o gráfico de g (reta r) corresponde ao de f transladado 3 unidades para cima, temos:

Indica a translação do gráfico de f em relação ao gráfico de j duas unidades para cima.

$$b_1 = 2 + 3 = 5$$

Indica a translação do gráfico de g em relação ao gráfico de f três unidades para cima.

De maneira análoga, como o gráfico de h (reta s) corresponde ao de f transladado 4 unidades para baixo, temos:

$$b_2 = 2 - 4 = -2$$

Portanto, as retas r e s correspondem, respectivamente, aos gráficos das funções cujas leis de formação são $g(x) = 5x + 5$ e $h(x) = 5x - 2$.

R7. Leia, no trecho a seguir, as informações sobre a aorta, considerada a maior e mais importante artéria do corpo humano.

Durante a vida, a aorta absorve o impacto de 2 a 3 bilhões de batimentos cardíacos enquanto distribui aproximadamente 2 milhões de litros de sangue pelo corpo.

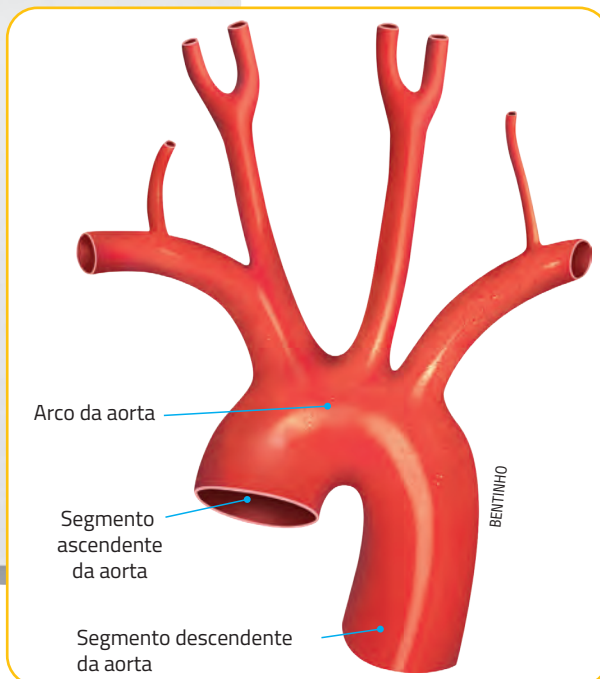
[...]

O conhecimento dos valores dos diâmetros normais dos diversos segmentos aórticos é importante para avaliação e conduta das doenças da aorta. Os diâmetros da aorta aumentam com a idade [...].

DIAS, Ricardo Ribeiro; STOLF, Noedir Antônio Groppo. **Doenças da aorta torácica**. São Paulo: ABRECCV: SBCCV, c2023-2024. p. 1-2. Disponível em: www.sbccv.org.br/residentes/downloads/area_cientifica/doencas_aorta_toracica.pdf. Acesso em: 27 jun. 2024.

ESB PROFESSIONAL/
SHUTTERSTOCK.COM

► Representação da artéria aorta
(imagem sem escala; cores-fantasia).



O diâmetro D do segmento ascendente da aorta, em milímetro, pode ser modelado, de acordo com a idade i de uma pessoa (em ano), pela função dada por $D(i) = 0,16i + 31$.

Conforme esse modelo, resolva as questões.

- Calcule $D(50)$ e interprete o resultado.
- Considere $d(i) = ai + b$, a lei de formação da função que modela o diâmetro d do segmento descendente da aorta, em milímetro, de acordo com a idade i de uma pessoa (em ano), sendo a e b números reais. Sabendo que os gráficos de d e D são paralelos, sendo o gráfico de d correspondente ao de D transladado 10 unidades para baixo, determine os números reais a e b .

Resolução

- Calculando $D(50)$, temos:

$$D(50) = 0,16 \cdot 50 + 31 = 8 + 31 = 39$$

Portanto, como $D(50) = 39$, temos que, de acordo com o modelo apresentado, o diâmetro do segmento ascendente da aorta de uma pessoa de 50 anos de idade é de 39 mm.

- Como os gráficos de d e D são paralelos, essas funções têm a mesma taxa de variação, ou seja, $a = 0,16$.

Como o gráfico de d corresponde ao gráfico de D transladado 10 unidades para baixo, temos que:

$$b = 31 - 10 = 21$$

Assim, $a = 0,16$ e $b = 21$, ou seja, $d(i) = 0,16i + 21$.

PARA PENSAR

Com base na função obtida no item **b**, determine para que idade de uma pessoa a medida de 33 mm para o diâmetro do segmento descendente da aorta é considerado adequado.

Para uma pessoa de 75 anos de idade.

R8. Construa o gráfico da função indicada em cada item e marque os pontos em que ele cruza os eixos cartesianos.

a) $f(x) = 2x - 8$

b) $g(x) = -3x + 6$

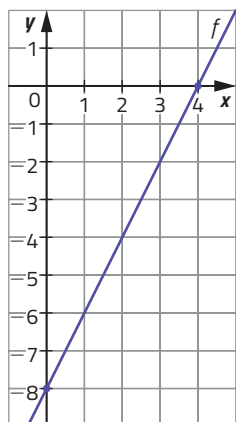
Resolução

a) Calculando o zero de f , temos:

$$\begin{aligned} f(x) = 0 &\Rightarrow 2x - 8 = 0 \Rightarrow \\ &\Rightarrow 2x = 8 \Rightarrow x = \frac{8}{2} = 4 \end{aligned}$$

Portanto, 4 é o zero da função e $(4, 0)$ são as coordenadas do ponto em que o gráfico de f cruza o eixo das abscissas. Como $b = -8$, o gráfico de f cruza o eixo das ordenadas no ponto de coordenadas $(0, -8)$.

Para representar o gráfico de f , podemos marcar os pontos de coordenadas $(4, 0)$ e $(0, -8)$ e traçar a reta que passar por eles.

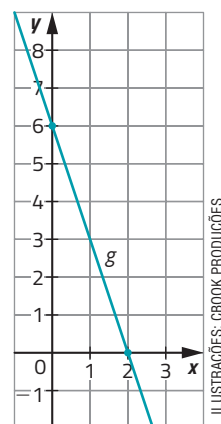


b) Calculando o zero de g , temos:

$$\begin{aligned} g(x) = 0 &\Rightarrow -3x + 6 = 0 \Rightarrow \\ &\Rightarrow -3x = -6 \Rightarrow x = \frac{-6}{-3} = 2 \end{aligned}$$

Portanto, 2 é o zero da função e $(2, 0)$ são as coordenadas do ponto em que o gráfico de g cruza o eixo das abscissas. Como $b = 6$, o gráfico de g cruza o eixo das ordenadas no ponto de coordenadas $(0, 6)$.

Para representar o gráfico de g , podemos marcar os pontos de coordenadas $(2, 0)$ e $(0, 6)$ e traçar a reta que passar por eles.



19. Respostas nas **Orientações para o professor**.

Atividades

Não escreva no livro.

19. Em uma malha quadriculada, esboce o gráfico da função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, definida por:

a) $f(x) = 3x - 1$;

c) $f(x) = 5 - 2x$;

b) $f(x) = x + 4$;

d) $f(x) = -\frac{x}{3} - 6$.

20. Dada a função afim $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, definida por $f(x) = -2x + 5$, responda às questões.

a) Essa função é crescente ou ^{decrecente} decrescente?

b) Qual é o zero dessa função? $x = \frac{5}{2}$

20. c) eixo x : $(\frac{5}{2}, 0)$; eixo y : $(0, 5)$

c) Quais são as coordenadas dos pontos em que o gráfico dessa função cruza os eixos cartesianos?

- Agora, esboce o gráfico de f e, com suas palavras, explique como resolveu cada item anterior. **Resposta pessoal.**

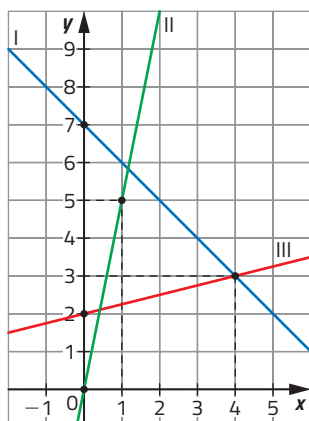
21. Em uma malha quadriculada, esboce o gráfico da função afim f que passa pelos pontos $P(7, 5)$ e $Q(-3, -1)$. Em seguida, determine se essa função é crescente ou decrescente.

Resposta nas **Orientações para o professor**. f é crescente.

22. b) I: $n(x) = -x + 7$; II: $h(x) = 5x$; III: $m(x) = \frac{x}{4} + 2$

22. Resposta nas **Orientações para o professor**.

22. Observe os gráficos I, II e III de funções afins representados em um mesmo plano cartesiano e resolva as questões, justificando o procedimento de construção de cada um.



22. a) crescente: II e III; decrescente: I

a) Classifique as funções representadas pelos gráficos em crescente ou decrescente.

b) A lei de formação da função correspondente a cada um desses gráficos está indicada no quadro a seguir. Relacione cada gráfico à lei de formação da função correspondente.

$$\begin{array}{ll} g(x) = 4x + 1 & m(x) = \frac{x}{4} + 2 \\ n(x) = -x + 7 & f(x) = x + 7 \\ h(x) = 5x & \end{array}$$

23. Leia o texto a seguir e faça o que se pede.



Na safra 2022/2023, o Brasil se consolidou como o maior produtor de soja do mundo. Naquela safra, foram produzidos no país cerca de 155 milhões de toneladas de soja, com uma produtividade média de 3,5 t/ha, ou seja, a cada hectare de soja plantada, foram colhidos, em média, 3,5 t.

Fonte dos dados: BRASIL. Ministério da Agricultura e Pecuária. Empresa Brasileira de Pesquisa Agropecuária.

Soja em números: safra 2022/23. Brasília, DF: Mapa: Embrapa, 2024. Disponível em: <https://web.archive.org/web/20231026022134/https://www.embrapa.br/en/soja/cultivos/soja/dados-economicos>. Acesso em: 28 jun. 2024.

Considere q a função que relaciona as grandezas quantidade de soja produzida, em tonelada, e a área x de plantio, em hectare.

a) As grandezas relacionadas pela função q são grandezas diretamente proporcionais? Justifique.

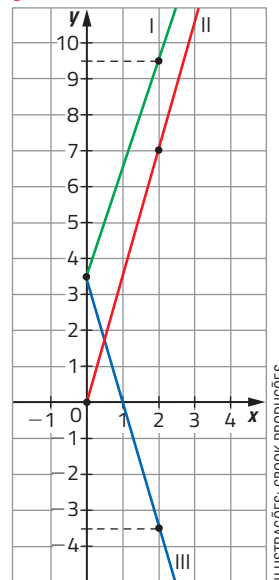
b) A função q é linear ou não linear? Escreva a lei de formação dessa função e verifique a sua resposta. **função linear; $q(x) = 3,5x$**

23. a) Sim, pois, se considerarmos, por exemplo, o dobro da área de plantio, a quantidade de soja produzida também será o dobro.

24. b) $a = -\frac{2}{3}$

24. c) $f(x) = -\frac{2}{3}x + 4$

c) Qual dos gráficos a seguir representa a função q ? **gráfico II**



ILUSTRAÇÕES: CBOOK PRODUÇÕES

d) Sabendo que 1 ha corresponde a 0,01 km², responda: na safra 2022/2023, o plantio de soja no Brasil foi realizado em quantos quilômetros quadrados de terra? Utilize uma calculadora para efetuar o cálculo.

aproximadamente 443 000 km²

e) Sabendo que a área territorial do Brasil é de aproximadamente 8,5 milhões de km², calcule, com o auxílio de uma calculadora, a razão entre a área destinada ao plantio de soja na safra 2022/2023 e a área total do país. O que esse valor representa?

24. Considere o gráfico da função afim $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ que cruza o eixo das abscissas no ponto $P(6, 0)$ e o eixo das ordenadas no ponto $Q(0, 4)$ e responda às questões a seguir.

24. a) decrescente

a) A função f é crescente ou decrescente?

b) Qual é a taxa de variação a da função f ?

c) Qual é a lei de formação da função f ?

25. Sejam f e g funções definidas por $f(x) = -\frac{x}{3} + m + 5$ e $g(x) = 5x - 10$, em que m corresponde a um número inteiro. Determine o valor de m para que o gráfico de f cruze o eixo:

a) das abscissas no ponto $A(9, 0)$;

b) das ordenadas no ponto $B(0, 6)$;

c) das abscissas e das ordenadas no ponto $O(0, 0)$.

$m = -5$

23. e) Aproximadamente 0,052. Resposta esperada: Representa que cerca de 5,2% da área territorial do Brasil foi utilizada no plantio de soja na safra 2022/2023.

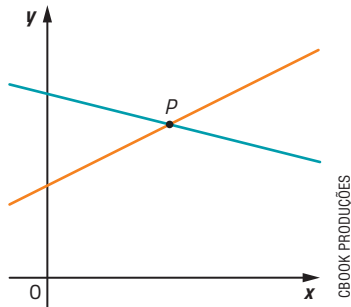
DICA

Para resolver esta atividade, você pode, inicialmente, selecionar apenas os dados necessários indicados no enunciado.

26. a) $k = \frac{1}{4}$; $f(x) = -\frac{x}{4} + 6$ e $g(x) = \frac{x}{2} + 3$

27. b) e d) Respostas nas **Orientações para o professor**.

26. No plano cartesiano, estão representados os gráficos das funções afins definidas por $f(x) = -kx + 6$ e $g(x) = 2kx + 3$, em que k corresponde a um número real.



a) Sabendo que P , de abscissa 4, é o ponto de interseção entre os gráficos dessas funções, calcule o valor de k e escreva a lei de formação das funções f e g .

b) Quais são as coordenadas dos pontos em que os gráficos dessas funções cruzam o:

- eixo das abscissas? $f: (24, 0)$; $g: (-6, 0)$
- eixo das ordenadas? $f: (0, 6)$; $g: (0, 3)$

27. O valor da fatura de energia elétrica cobrado nas residências em certo município é determinado pelo produto da quantidade de energia consumida (em kWh) pela tarifa correspondente (em R\$/kWh), acrescido de R\$ 10,00 de iluminação pública. A seguir, estão representadas as tarifas cobradas pela companhia de energia elétrica de acordo com a faixa de consumo.

Faixa de consumo (kWh)	Tarifa (R\$/kWh)
Até 50	0,50
Maior que 50 até 200	0,70
Maior que 200 até 500	0,80
Maior que 500	0,90

a) Podemos definir uma função v , expressa por mais de uma sentença, para relacionar o valor cobrado na fatura de energia elétrica (em R\$), de acordo com o consumo c (em kWh), nas residências desse município. Por exemplo, para um consumo de até 50 kWh, temos:

$$v(c) = 0,50c + 10, \text{ para } 0 \leq c \leq 50$$

Determine as sentenças que expressam a função v para: $v(c) = 0,70c + 10$

- $50 < c \leq 200$; ▪ $c > 500$.
- $200 < c \leq 500$; $v(c) = 0,90c + 10$
- $v(c) = 0,80c + 10$

27. e) Sim, pois, ao escolhermos quaisquer valores $c_1, c_2 \in D(v)$, com $c_2 > c_1$, temos que $v(c_2) > v(c_1)$.

b) Com base no item a, escreva a lei de formação da função v .

c) Qual é o domínio da função v ? E qual é o conjunto imagem dessa função? Justifique sua resposta. $D(v) = [0, +\infty[$; $Im(v) = [10, +\infty[$

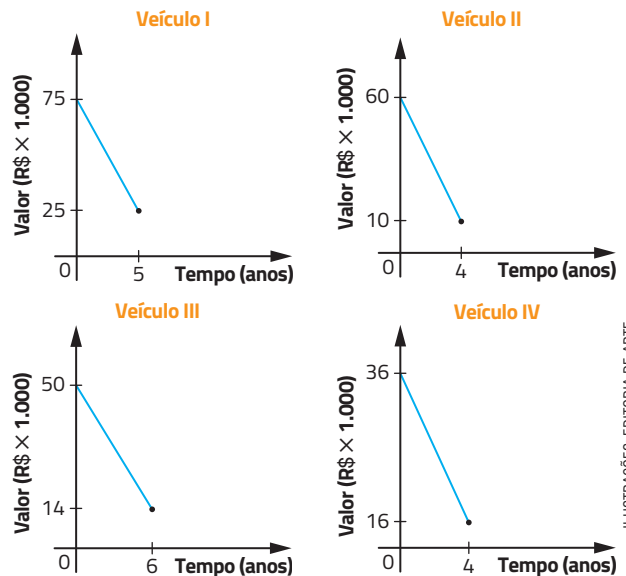
d) No caderno, esboce o gráfico da função v .

e) Podemos afirmar que v é uma função crescente em todo o seu domínio? Justifique.

f) Calcule o valor da fatura de energia elétrica em uma residência desse município cujo consumo no mês foi de:

- 600 kWh; R\$ 550,00 R\$ 330,00
- 400 kWh; R\$ 330,00
- 30 kWh; R\$ 25,00 R\$ 94,00
- 120 kWh; R\$ 94,00

28. (UERJ) Os veículos para transporte de passageiros em determinado município têm vida útil que varia entre 4 e 6 anos, dependendo do tipo de veículo. Nos gráficos, está representada a desvalorização de quatro desses veículos ao longo dos anos, a partir de sua compra na fábrica.



Com base nos gráficos, o veículo que mais desvalorizou por ano foi: **alternativa b**

a) I b) II c) III d) IV

29. Identifique, entre as fichas, aquelas que apresentam as leis de formação de cada gráfico apresentado na atividade anterior.

$$f(x) = -5x + 36$$

$$g(x) = -5x + 75$$

$$h(x) = -10x + 75$$

$$m(x) = -6x + 50$$

$$n(x) = -12,5x + 60$$

$$p(x) = 6x + 50$$

29. f: veículo IV; h: veículo I; m: veículo III; n: veículo II

ILUSTRAÇÕES: EDITORIA DE ARTE

30. c) Resposta nas **Orientações para o professor**.

30. d) loja A: $P_A(x) = 3,5x + 200$; loja B: $P_B(x) = 4,50x + 80$. Ambas são funções afins.

30. Rafael compra produtos no atacado para revender. Observe, a seguir, a cotação do preço de um produto que ele realizou em duas lojas virtuais.

Cotação, em reais, do preço de certo produto por quantidade comprada e valor do frete incluso

Loja \ Quantidade	50	80	120	200	300
A	375	480	620	900	1 250
B	305	440	620	980	1 430

Fonte: Dados fictícios.

Sabendo que o preço da unidade desse produto e o valor do frete, em cada loja, não variam de acordo com a quantidade comprada, resolva as questões.

loja A: R\$ 200,00; loja B: R\$ 80,00

a) Qual é o valor do frete de cada loja citada?

b) Em qual das lojas o preço unitário do produto é maior? Quanto custa, em reais, a unidade do produto nessa loja? loja B: R\$ 4,50

c) Represente, em um plano cartesiano, as informações apresentadas na tabela anterior.

d) Escreva a lei de formação de uma função que expresse o preço P , em reais, cobrado pela compra e entrega de uma quantidade x desse produto em cada uma dessas lojas. Essas são funções afins?

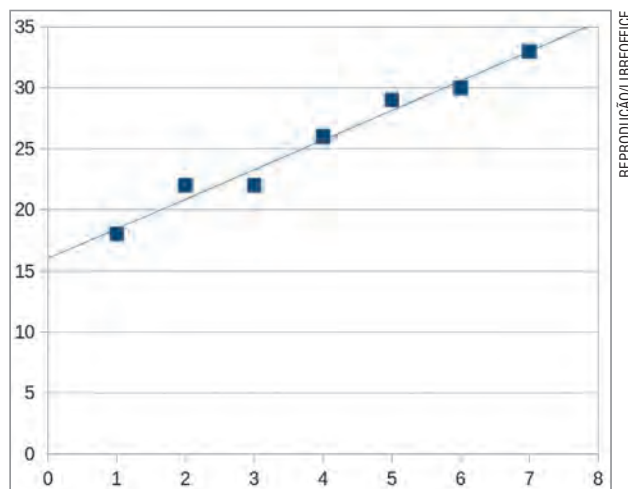
e) A partir de quantas unidades desse produto é financeiramente mais vantajoso realizar a compra na loja A? para quantidades maiores que 120 unidades

31. Em um centro de recuperação de animais silvestres, um dos animais resgatados em condições físicas precárias foi submetido a uma suplementação alimentar por um período de 7 meses. A cada mês, sua massa foi aferida e registrada em uma planilha eletrônica.

Mês	Massa (kg)
Janeiro	18
Fevereiro	22
Março	22
Abril	26
Maio	29
Junho	30
Julho	33

REPRODUÇÃO/LIBREOFFICE

Nessa planilha eletrônica, os dados coletados foram representados por pontos em um plano cartesiano, utilizando os recursos: **Gráfico... → XY (Dispersão)**. Em seguida, utilizando o recurso **Linha de tendência para a série de dados 'Massa (kg)'**, esses pontos foram modelados por uma reta correspondente à função $f(x) = 2,43x + 16$, que determina a massa do animal resgatado (em quilograma) no mês x , conforme indicado a seguir.



REPRODUÇÃO/LIBREOFFICE

a) Olhando apenas para a planilha de dados coletados, quantos quilogramas o animal em recuperação ganhou em 7 meses? 15 kg

b) Calcule a diferença, em quilograma, entre os valores registrados na planilha de dados coletados e os determinados pela função f para cada um dos meses apresentados.

c) Pela função f , qual teria sido o ganho estimado de massa do animal no período de recuperação? 14,58 kg

d) Você considera que a função f indica, de maneira aproximada, os dados aferidos pelo centro de recuperação? Justifique sua resposta. Resposta pessoal.

32. Considere o gráfico de uma função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, definida por $f(x) = ax + b$.

a) Que alterações ocorrerão no gráfico de f ao modificar o valor do coeficiente a ?

b) O que você acredita que vai ocorrer com o gráfico da função f ao modificar o valor do coeficiente b ?

31. b) janeiro: 0,43 kg; fevereiro: 1,14 kg; março: 1,29 kg; abril: 0,28 kg; maio: 0,85 kg; junho: 0,58 kg; julho: 0,01 kg

32. a) A inclinação da reta correspondente ao gráfico da função f será alterada.

32. b) Resposta esperada: O gráfico da função f será transladado verticalmente. **125**

• Equação da reta

A **Geometria Analítica** é um campo da Matemática que estuda, entre outros conceitos, a representação de figuras geométricas por meio de equações. A seguir, estudaremos uma importante relação entre função afim e Geometria Analítica, partindo do fato matemático demonstrado de que o gráfico de qualquer função afim de domínio \mathbb{R} é uma reta.

Seja $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função afim, definida por $f(x) = ax + b$, cujo gráfico é uma reta r . Dizemos que $y = ax + b$ é a **equação da reta r** .

Estudamos anteriormente que, na função afim, o coeficiente a corresponde à taxa de variação e b ao termo independente. No estudo da equação da reta, denominamos a de **coeficiente angular** da reta e b de **coeficiente linear** da reta.

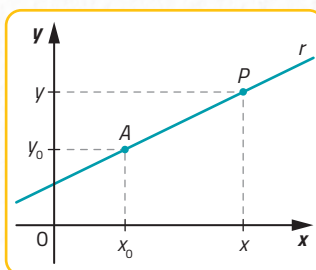
Coeficiente angular \quad $y = ax + b$ \quad Coeficiente linear

Podemos determinar a equação de uma reta r não paralela ao eixo y representada em um plano cartesiano com base nas coordenadas de um de seus pontos e do seu coeficiente angular a . Para isso, consideramos dois pontos de r : um ponto arbitrário $P(x, y)$ e um ponto dado $A(x_0, y_0)$. Observe.

$$a = \frac{y - y_0}{x - x_0} \Rightarrow$$

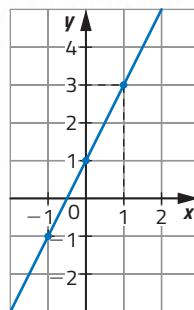
$$\Rightarrow y - y_0 = a(x - x_0) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y = y_0 + a(x - x_0)$$



A equação de uma reta pode ser expressa na forma reduzida ($y = ax + b$) ou na forma geral ($mx + ny + c = 0$). Por exemplo, em relação à reta representada no plano cartesiano da figura, temos que a:

- **equação reduzida da reta** é $y = 2x + 1$;
- **equação geral da reta** é $2x - y + 1 = 0$.



ILUSTRAÇÕES: CBOOK PRODUÇÕES



MUSEU DO LOUVRE, PARIS, FRANÇA. GILL MAR/SHUTTERSTOCK.COM; M88/SHUTTERSTOCK.COM

- **HALS, Frans. Retrato de René Descartes.** Óleo sobre tela, 78 cm \times 69 cm. Museu do Louvre, Paris. Descartes (1596-1650) é considerado um dos principais precursores da Geometria Analítica. Suas contribuições estão presentes, sobretudo, no terceiro apêndice, intitulado **La géometrie**, publicado no seu livro **Discours** em 1637.

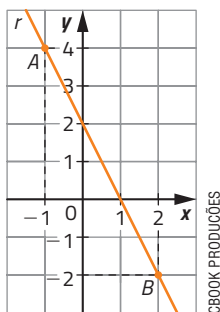


DICA

Toda reta não paralela ou não coincidente ao eixo y corresponde ao gráfico de uma função afim. Já as retas paralelas ou coincidentes ao eixo y não correspondem ao gráfico de função afim, mas também podem ser expressas por uma equação.

ATIVIDADES RESOLVIDAS

R9. Observe a reta r representada a seguir.



- a) Determine a equação da reta r e expresse-a na forma reduzida e na forma geral.
 b) Verifique se o ponto $C(5, -8)$ pertence à reta r .

Resolução

- a) Com base nas coordenadas dos pontos $A(-1, 4)$ e $B(2, -2)$ de r , calculamos seu coeficiente angular a .

$$a = \frac{4 - (-2)}{-1 - 2} = \frac{6}{-3} = -2$$

Assim, a equação reduzida da reta r é dada por:

$$y = y_0 + a(x - x_0) \Rightarrow y = 4 + (-2)[x - (-1)] \Rightarrow y = -2x + 2$$

Com base na equação reduzida, determinamos a equação geral da reta r :

$$y = -2x + 2 \Rightarrow 2x + y - 2 = 0$$

Portanto, a equação reduzida da reta r é $y = -2x + 2$, e a equação geral é $2x + y - 2 = 0$.

- b) Para verificar se o ponto $C(5, -8)$ pertence à reta r , podemos substituir $x = 5$ na equação da reta r (reduzida ou geral) e verificar se o resultado obtido é $y = -8$. Em relação à equação reduzida, temos:

$$y = -2 \cdot 5 + 2 = -10 + 2 = -8$$

Portanto, temos que o ponto $C(5, -8)$ pertence à reta r .

R10. Considere, em um plano cartesiano, a reta r de equação $3y + 2x = 15$ e uma reta s determinada pelos pontos $A(-1, 2)$ e $B(7, 4)$. Quais são as coordenadas do ponto C , em que as retas r e s se intersectam?

Resolução

Como s passa pelos pontos A e B , temos:

$$a_s = \frac{2 - 4}{-1 - 7} = \frac{1}{4}$$

Assim, a equação da reta s é dada por:

$$y - 2 = \frac{1}{4}[x - (-1)] \Rightarrow 4y - x = 9$$

Para determinar as coordenadas do ponto C , em que as retas r e s se intersectam, podemos resolver o seguinte sistema de equações:

$$\begin{cases} 3y + 2x = 15 \\ 4y - x = 9 \end{cases} \cdot 2 \Rightarrow \begin{cases} 3y + 2x = 15 \\ 8y - 2x = 18 \end{cases} +$$

$$11y + 0x = 33 \Rightarrow y = 3$$

Substituindo $y = 3$ na equação $3y + 2x = 15$, temos:

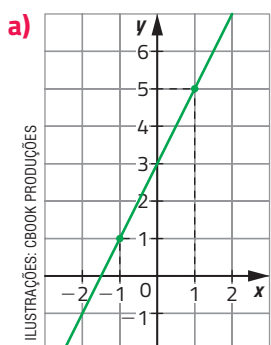
$$3 \cdot 3 + 2x = 15 \Rightarrow x = 3$$

Portanto, as retas r e s se intersectam no ponto $C(3, 3)$.

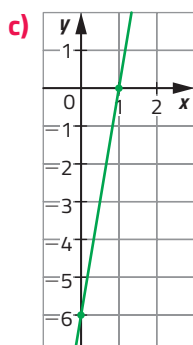
DICA

Note que utilizamos as coordenadas do ponto A na determinação da equação reduzida da reta r . Porém poderíamos utilizar qualquer outro ponto de r , como o ponto B .

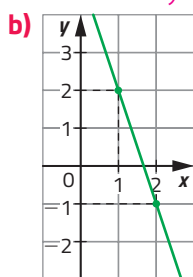
33. Determine a equação de cada reta a seguir e expresse-a na forma reduzida.



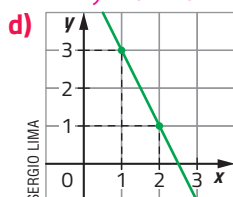
$$y = 2x + 3$$



$$y = 6x - 6$$

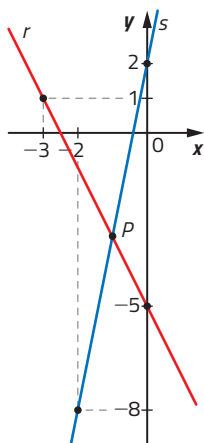


$$y = -3x + 5$$



$$y = -2x + 5$$

34. Observe as retas r e s em um mesmo plano cartesiano e determine as coordenadas do ponto P em que elas se cruzam. $P(-1, -3)$



35. Jorge tem uma loja e, para realizar entregas de produtos em domicílio, ele utiliza o serviço de uma empresa terceirizada. Sabe-se que o preço p cobrado por essa empresa para cada entrega, em reais, pode ser descrito por uma função do tipo $p(x) = ax + b$, sendo a e b números reais e x , a distância percorrida, em quilômetro. Observe, em uma planilha eletrônica, registros de entregas que Jorge já contratou.

distância (km)	preço (R\$)
3	15
21	35

REPRODUÇÃO/
LIBREOFFICE

Nessas condições, determine:

- a) o preço cobrado pela empresa terceirizada para uma entrega com 25,5 km de distância percorrida; **R\$ 40,00**
- b) a distância percorrida em certa entrega, sabendo que o preço cobrado pela empresa terceirizada foi de R\$ 50,00; **34,5 km**
- c) a equação geral da reta r correspondente ao gráfico da função p . **$-10x + 9y - 105 = 0$**
36. Considere as retas r e s representadas em um mesmo plano cartesiano, dado que a reta r passa pelos pontos $A(6, 5)$ e $B(-2, -1)$, e a reta s passa pelos pontos $C(-1, 6)$ e $D(5, -2)$.
- a) Escreva a equação de cada uma dessas retas. $r: 3x - 4y = -2$; $s: 4x + 3y = 14$
- b) Quais são as coordenadas do ponto em que as retas r e s se cruzam? **(2, 2)**
37. Escreva a equação da reta que:
- a) passa pelo ponto $A(1, 4)$ e tem coeficiente angular $a = 3$; **$y = 3x + 1$**
- b) passa pelo ponto $B(2, 1)$ e tem coeficiente angular $a = -\frac{1}{2}$. **$y = 2 - \frac{x}{2}$**
38. Determine a equação da reta que passa pelos pontos:
- a) $(1, 3)$ e $(-2, 0)$. **$y = x + 2$**
- b) $(2, -5)$ e $(-1, 7)$. **$y = -4x + 3$**
- c) $(-3, 5)$ e $(3, 7)$. **$y = \frac{x}{3} + 6$**
- d) $(-1, -2)$ e $(3, 2)$. **$y = x - 1$**
39. Para cada item, escreva a equação da reta que passa pelos pontos indicados.
- a) $A(5, 2)$ e $B(7, 2)$ **$y = 2$**
- b) $C(-3, 5)$ e $D(0, 5)$ **$y = 5$**
- c) $E(1, -3)$ e $F(6, -3)$ **$y = -3$**
- d) $G(-7, -1)$ e $H(4, -1)$ **$y = -1$**

Que padrões você pode observar em relação às coordenadas dos pontos indicados em cada item? E que padrão há entre as equações das retas que você escreveu?

Resposta esperada: Em cada item, as ordenadas dos dois pontos indicados são iguais. Em cada item, a equação obtida tem o coeficiente angular igual a zero, o que implica que a reta é paralela ao eixo das abscissas e pode ser expressa na forma $y = c$, sendo c a ordenada dos dois pontos indicados.

INTEGRANDO COM...

CIÊNCIAS DA NATUREZA E SUAS TECNOLOGIAS

Movimento retilíneo uniforme

Entre as ciências que se relacionam com a Matemática, a Física provavelmente é a mais lembrada, uma vez que, para demonstrar, expressar e generalizar algumas de suas teorias, se faz uso da linguagem e de conceitos matemáticos. Para exemplificar isso, podemos citar o **movimento retilíneo uniforme**. Nesse tipo de movimento, o móvel se desloca sempre no mesmo sentido, em linha reta, e a sua velocidade se mantém constante no espaço percorrido em determinado tempo. Observe, a seguir, a denominada **equação horária do movimento retilíneo uniforme**, que relaciona a posição do móvel com um instante de tempo.

$$S = S_0 + v \cdot t$$

Diagrama explicativo da equação horária:

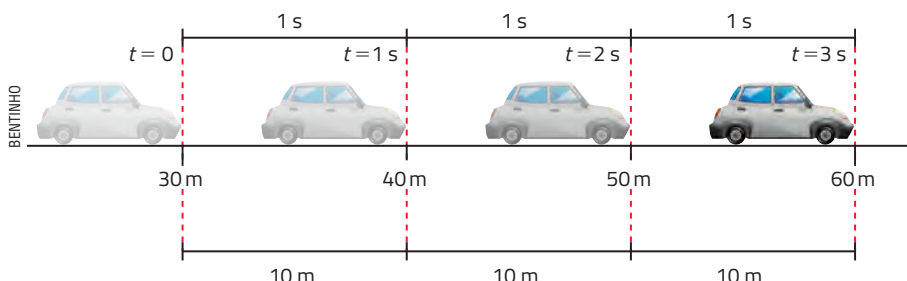
- S : Espaço ou posição do móvel (m) em função do tempo (s)
- S_0 : Espaço inicial ou posição inicial (m)
- v : Velocidade constante e diferente de zero (m/s)
- t : Tempo (s)

Nessa equação, a velocidade v é uma constante. Dessa maneira, tal equação pode ser associada a uma função afim definida por $S(t) = S_0 + v \cdot t$, que corresponde a um modelo matemático para o movimento retilíneo uniforme. Nesse caso, o espaço S corresponde à variável dependente; o tempo t , à variável independente; a velocidade constante v , à taxa de variação da função; e o espaço inicial S_0 , ao termo independente.

Fonte dos dados: KNIGHT, Randall D. **Física**: uma abordagem estratégica: mecânica newtoniana, gravitação, oscilações e ondas. Tradução: Trieste Freire Ricci. 2. ed. Porto Alegre: Bookman, 2009. v. 1, p. 34-37.

O exemplo do automóvel em movimento

Na figura a seguir, estão representadas informações sobre a posição e o tempo de deslocamento de um automóvel em um movimento retilíneo uniforme, com velocidade constante de 10 m/s.



DICA

Nesta situação, consideramos $D(S) = \{t \in \mathbb{R} \mid t \geq 0\}$, ou seja, a função descreve o movimento a partir da posição inicial do automóvel.

Podemos determinar a posição desse automóvel, em metro, no tempo t , em segundo, por meio da função afim definida por:

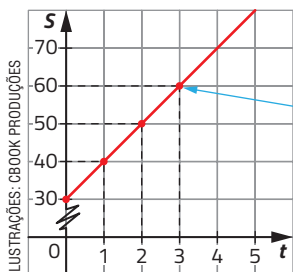
$$S(t) = 30 + 10t$$

PARA PENSAR

Qual é o espaço percorrido pelo automóvel no intervalo de tempo entre $t = 0$ e $t = 1$? Justifique.

10 m, pois $S(1) - S(0) = 10$

Também é possível expressar essa função, graficamente, no plano cartesiano. Observe.



Este ponto de coordenadas (3, 60) indica que, no tempo correspondente a 3 s, a posição do automóvel era de 60 m.

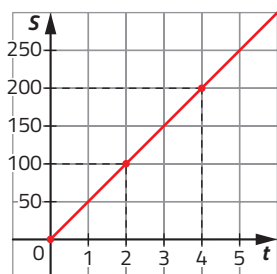
DICA

Neste gráfico, as escalas dos eixos são diferentes e parte do eixo das ordenadas foi suprimido, indicado pelo símbolo \parallel .

PENSANDO NO ASSUNTO

Não escreva no livro.

- Em relação ao movimento retilíneo uniforme, identifique as afirmativas verdadeiras, ^{alternativas a e d}
 - A velocidade do móvel é sempre constante.
 - A velocidade do móvel varia de acordo com o intervalo de tempo.
 - O móvel pode percorrer uma mesma distância em intervalos de tempo diferentes.
 - Em dois intervalos de tempo iguais, o móvel percorre distâncias também iguais.
- Análise as informações apresentadas nas páginas 129 e 130 para resolver as questões.
 - No gráfico apresentado, o que o ponto de coordenadas (2,50) representa?
 - Calcule a posição do automóvel no tempo $t = 12$. **150 m**
 - Em que instante o automóvel ocupará a posição 200 m? **17 s**
- O gráfico a seguir representa o deslocamento S (em metro) de um móvel por meio de um movimento retilíneo uniforme, de acordo com o tempo t (em segundo). Observe.



Neste gráfico, as escalas dos eixos são diferentes.

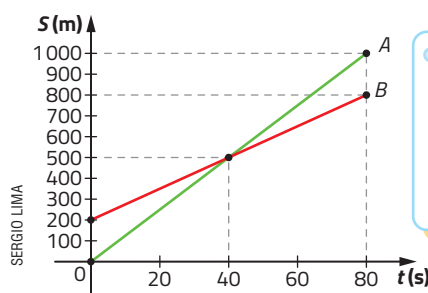
- Qual é a posição inicial desse móvel? E no instante 4 s? **0 m; 200 m**
- Qual é a velocidade desse móvel? **$v = 50$ m/s**
- Quantos metros esse móvel percorre em intervalos de tempo iguais a 2 s? **100 m**
- Escreva a lei de formação dessa função. **$S(t) = 50t$**

2. a) O ponto de coordenadas (2, 50) representa que, no tempo correspondente a 2 s, a posição do automóvel era de 50 m.

- Um automóvel se desloca em uma rodovia retilínea com velocidade constante. A seguir, estão indicadas as posições desse automóvel em alguns instantes. Determine a lei de formação da função que descreve a posição S desse automóvel (em quilometro) no tempo t (em hora). **$S(t) = 10 + 50t$**

Tempo (h)	0	1	2	3
Posição (km)	10	60	110	160

- Dois móveis, **A** e **B**, ao percorrerem simultaneamente a mesma trajetória e no mesmo sentido, tiveram sua posição S , em metro, variando com o tempo t , em segundo, conforme a representação no gráfico a seguir.



Neste gráfico, as escalas dos eixos são diferentes.

Com base nessas informações, determine:

- a posição inicial S_0 , em metro, de cada móvel; **móvel A: 0 m; móvel B: 200 m**
- o instante t , em segundo, que os móveis se encontram; **40 s**
- a distância que cada móvel percorreu nessa trajetória, em metro; **móvel A: 1000 m; móvel B: 800 m**
- para cada móvel, a lei de formação da função que descreve a posição S (em metro) no tempo t (em segundo) nessa trajetória. **móvel A: $S_A(t) = 12,5t$; móvel B: $S_B(t) = 200 + 7,5t$**

6. Reúnam-se em grupos de três integrantes para realizar um experimento que simula um movimento retilíneo uniforme. Para isso, providenciem os seguintes materiais: **Resposta pessoal.**

- uma fita adesiva;
- uma fita métrica;
- água;
- uma mangueira ou um tubo transparente com 50 cm de comprimento;
- um pedaço de madeira de superfície plana com 50 cm de comprimento;
- cronômetro (pode ser usado um aplicativo de *smartphone*);
- duas rolhas (para tampar as extremidades da mangueira ou do tubo).

Depois, realizem as etapas a seguir e, se possível, façam os registros em vídeo.

- 1ª) Utilizando fita adesiva, fixem, sobre o pedaço de madeira, a mangueira e a fita métrica paralelamente entre si. É importante que a marcação 0 (zero) da fita métrica esteja alinhada com uma extremidade da mangueira (ver Figura A e Figura B).
- 2ª) Tampem uma das extremidades da mangueira com uma rolha (ou outro objeto capaz de vedar as extremidades da mangueira ou do tubo) e encham-na com água. Tampem a outra extremidade da mangueira com a outra rolha, deixando um pouco de ar entre a rolha e a água, formando uma pequena bolha de ar.
- 3ª) Em uma mesa, apoiem uma das extremidades da madeira sobre um livro e a outra extremidade na superfície dessa mesa, de modo que o pedaço de madeira fique inclinado e a bolha de ar se desloque dentro da mangueira (Figura A). Quanto menor for essa inclinação, mais lento será o deslocamento da bolha de ar.
- 4ª) Aguardem até que a bolha de ar chegue a uma extremidade da mangueira e alternem a posição da extremidade do pedaço de madeira sobre o livro para iniciar um novo deslocamento da bolha de ar. Após a bolha de ar começar a se deslocar, com auxílio de um cronômetro, observem quanto tempo ela demora para realizar cada deslocamento de 5 cm e registrem os resultados (Figura B).
- 5ª) Organizem os resultados obtidos na etapa anterior em uma tabela ou um gráfico. Depois, identifiquem a variação dos dados obtidos por vocês e comparem-nos com aqueles obtidos por outros grupos. Em seguida, considerem os eventuais erros das medidas aferidas no experimento e verifiquem se o deslocamento da bolha de ar corresponde a um movimento retilíneo uniforme, destacando as características desse tipo de movimento. Por fim, elaborem um relatório desse experimento e o compartilhem com os colegas.



► Figura A.



► Figura B.

FOTOS: DÓTTA2

Estudo do sinal de uma função afim

Leia a situação a seguir.

A agricultura familiar é uma atividade econômica desenvolvida em pequenas propriedades rurais e costuma representar a principal fonte de renda das famílias que nelas residem. Nicole é uma agricultora familiar que cultiva uva. Para participar de uma feira e ter um espaço para vender o que cultivou e colheu, ela tem de pagar uma taxa fixa de R\$ 180,00. Descontados os custos de produção, sabe-se que cada kilograma de uva vendida na feira rende R\$ 4,50 para Nicole. Quantos kilogramas de uva, no mínimo, Nicole tem de vender para obter lucro nessa feira?

Para responder a essa questão, podemos determinar a lei de formação de uma função afim m que descreve o lucro (ou o prejuízo) de Nicole de acordo com x kilogramas de uva vendidas, considerando a taxa fixa a ser paga.

$$m(x) = 4,5x - 180$$

PARA PENSAR

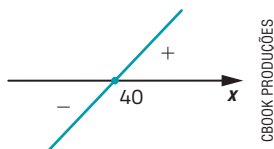
Na lei de formação da função m , o que indica a taxa de variação? E o termo independente?

Note que Nicole terá lucro quando a função m for positiva. Assim, vamos determinar para quais pontos do domínio a função é positiva, para quais é nula e para quais é negativa. Ao fazer isso, dizemos que vamos **estudar o sinal** dessa função afim. Para isso, inicialmente, calculamos o zero de m , ou seja, o valor de x para o qual $m(x) = 0$, e identificamos se essa é uma função crescente ou decrescente.

- Zero de m : $4,5x - 180 = 0 \Rightarrow 4,5x = 180 \Rightarrow x = \frac{180}{4,5} = 40$
- $a > 0$, pois $a = 4,5$. Logo, m é uma função crescente.

A taxa de variação $a = 4,5$ indica o rendimento, em reais, que Nicole recebe a cada kilograma de uva vendida. O termo independente $b = -180$ indica o valor, em reais, a ser descontado pela participação na feira.

Com base nessas informações, construímos um esboço do gráfico da função m com as informações relevantes para o estudo desejado. Essas informações são: o zero da função e o traçado da reta, ascendente ou descendente, dependendo do crescimento da função.



A partir do esboço do gráfico, concluímos que:

- m é **nula** para $x = 40$, ou seja, se $x = 40 \Rightarrow m(x) = 0$;
- m é **negativa** para $x < 40$, ou seja, se $x < 40 \Rightarrow m(x) < 0$;
- m é **positiva** para $x > 40$, ou seja, se $x > 40 \Rightarrow m(x) > 0$.

Portanto, Nicole terá lucro nessa feira se vender mais que 40 kg de uva.



RUBENS CHAVES/PULSAR IMAGENS

► Agricultora familiar colhendo uva em sua propriedade, no município de Salto de Pirapora (SP). Fotografia de 2022.



DICA

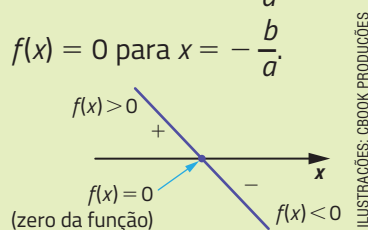
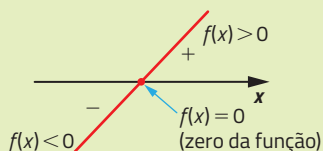
Podemos, também, utilizar uma inequação para resolver a situação apresentada.

$$\begin{aligned} m(x) &> 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow 4,5x - 180 &> 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow 4,5x &> 180 \Rightarrow \\ \Rightarrow x &> \frac{180}{4,5} \Rightarrow x > 40 \\ S &= \{x \in \mathbb{R} \mid x > 40\} \end{aligned}$$

De maneira geral, para estudar o sinal de uma função afim, determinamos o zero e o crescimento dessa função e, em seguida, analisamos para quais valores do domínio a função é positiva, negativa ou nula. Como o zero de uma função afim é dado por $x = -\frac{b}{a}$, podemos definir o seguinte.

Dada uma função afim $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, definida por $f(x) = ax + b$ com $a \neq 0$.

- Se f é uma função crescente ($a > 0$), temos:
 - $f(x) > 0$ para $x > -\frac{b}{a}$;
 - $f(x) < 0$ para $x < -\frac{b}{a}$;
 - $f(x) = 0$ para $x = -\frac{b}{a}$.
- Se f é uma função decrescente ($a < 0$), temos:
 - $f(x) > 0$ para $x < -\frac{b}{a}$;
 - $f(x) < 0$ para $x > -\frac{b}{a}$;
 - $f(x) = 0$ para $x = -\frac{b}{a}$.



ILUSTRAÇÕES: CBOOK PRODUÇÕES

Atividade resolvida

R11. Realize o estudo do sinal das funções a seguir.

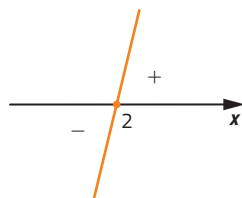
a) $f(x) = \frac{x}{2} - 1$

Resolução

a) Vamos calcular o zero de f e identificar se ela é uma função crescente ou decrescente.

- Zero de f : $\frac{x}{2} - 1 = 0 \Rightarrow x = 2$.
- $a > 0$, pois $a = \frac{1}{2}$. Logo, f é uma função crescente.

Assim, segue que:



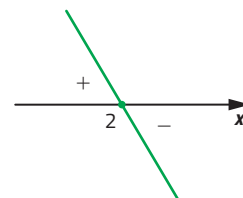
- Para $x = 2$, temos $f(x) = 0$.
- Para $x < 2$, temos $f(x) < 0$.
- Para $x > 2$, temos $f(x) > 0$.

b) $g(x) = -2x + 4$

b) Vamos calcular o zero de g e identificar se ela é uma função crescente ou decrescente.

- Zero de g : $-2x + 4 = 0 \Rightarrow x = 2$.
- $a < 0$, pois $a = -2$. Logo, g é uma função decrescente.

Assim, segue que:



- Para $x = 2$, temos $g(x) = 0$.
- Para $x < 2$, temos $g(x) > 0$.
- Para $x > 2$, temos $g(x) < 0$.

45. a) estacionamento A: R\$ 24,00

45. b) estacionamento A: $V(t) = 12t$; estacionamento B: $V(t) = 6t + 20$

ATIVIDADES

Não escreva no livro.

40. Respostas nas **Orientações para o professor**.

40. Realize o estudo do sinal das funções a seguir.

a) $f(x) = 6x - 2$

d) $m(x) = -5x - 4$

b) $g(x) = -7x + 1$

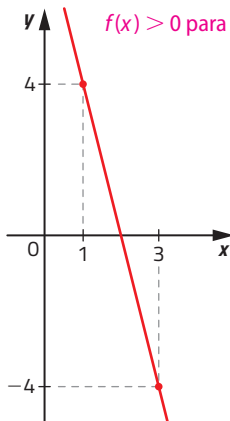
e) $n(x) = 3x + 12$

c) $h(x) = 9x - 3$

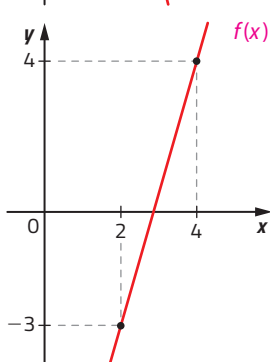
f) $p(x) = 10x$

41. Determine para quais valores de x as funções representadas a seguir são positivas.

a) $f(x) > 0$ para $x < 2$



b) $f(x) > 0$ para $x > \frac{20}{7}$



42. Considere as funções $f(x) = -3x - 12$ e $g(x) = -4x - 4$. Determine os valores reais de x para os quais ambas as funções são positivas. Explique, com suas palavras, como você realizou esta atividade. $x \in]-\infty, -4[$; resposta pessoal

43. Em um experimento realizado em laboratório, certo líquido foi submetido a um resfriamento por 10 min e sua temperatura foi registrada em um termômetro em dois momentos. Observe.



DICA
O tempo registrado abaixo dos termômetros representa o período contabilizado após o início do experimento, em minuto.

45. c) Para períodos de até 3 horas de uso, o estacionamento A é mais vantajoso financeiramente para o motorista. Para períodos a partir de 3 horas, o estacionamento B é mais vantajoso.

43. positiva: $0 \leq t < 6$; igual a zero: $t = 6$; negativa: $6 < t \leq 10$

Considerando que a variação da temperatura durante o período de realização do experimento pode ser modelada por uma função afim, descreva em quais momentos essa temperatura, em grau Celsius, foi negativa, positiva e igual a zero.

44. Mostre que, em uma função afim decrescente $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, definida por $f(x) = ax + b$, temos $f(x) > 0$ para $x < \frac{-b}{a}$. Resposta nas **Orientações para o professor**.

45. Em uma rua movimentada de certa cidade, há dois estacionamentos para carros que apresentam maneiras distintas de cobrança. Observe.

- Estacionamento A: R\$ 12,00 por hora.
- Estacionamento B: R\$ 20,00 fixos, mais R\$ 6,00 por hora.

a) Qual dos estacionamentos é financeiramente mais vantajoso para um motorista deixar o carro estacionado por 2 horas? Nesse caso, que quantia ele vai pagar?

b) Para cada estacionamento, determine uma função que expresse o valor V a pagar, em reais, de acordo com o tempo t , em hora, que um carro fica estacionado.

c) Qual desses estacionamentos é mais vantajoso financeiramente para um motorista de acordo com o tempo em que o carro fica estacionado? Explique.

DICA
Para resolver esta atividade, considere as frações de hora de permanência do carro no estacionamento como a hora exata seguinte. Por exemplo, se um carro ficar estacionado por 2h15min, é cobrada a permanência de 3 h.

46. (UEA-AM) Ana e Beatriz caminham em uma pista retilínea, na mesma direção e sentido, e com as respectivas velocidades constantes. Sabe-se que a posição de Ana, P_A , é dada por $P_A(t) = 200 + 25t$, que a posição de Beatriz, P_B , é dada por $P_B(t) = 500 + 20t$ e que o tempo t é dado em minutos. Nessas condições, o tempo que Ana precisa para alcançar Beatriz é:

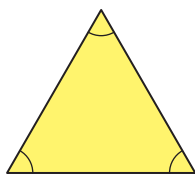
- a) 60 minutos.
 - b) 45 minutos.
 - c) 25 minutos.
 - d) 20 minutos.
 - e) 40 minutos.
- alternativa a

Algumas aplicações

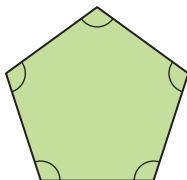
Estudaremos, a seguir, diferentes situações nas quais a compreensão do conceito e das características de uma função afim são importantes para a interpretação e a análise delas.

Função afim e perímetro de polígonos regulares

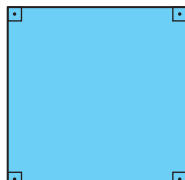
Você provavelmente estudou que os polígonos regulares são aqueles cujas medidas de todos os seus lados são iguais e as medidas de todos os seus ângulos internos também são iguais. Observe alguns exemplos de polígonos regulares.



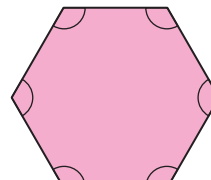
▶ Triângulo regular ou triângulo equilátero.



▶ Pentágono regular.



▶ Quadrilátero regular ou quadrado.



▶ Hexágono regular.

É possível representar por uma função afim o perímetro de um polígono regular de acordo com a medida de seus lados. No caso de um pentágono regular, por exemplo, a função afim f , que determina seu perímetro de acordo com a medida x de um de seus lados, pode ser definida pela seguinte lei de formação.

$$f(x) = 5x$$

Perímetro do pentágono regular

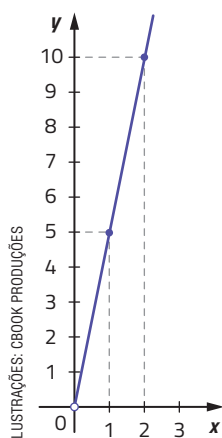
Quantidade de lados do pentágono

Medida de cada lado do pentágono regular

PARA PENSAR

A medida do lado de um pentágono regular e seu perímetro são grandezas diretamente proporcionais? Justifique.

Nesse caso, note que x pode assumir apenas valores reais positivos, ou seja, $D(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$, uma vez que representa a medida de um lado do pentágono regular. Observe o gráfico da função f .



DICA

Nesta situação, é necessário estabelecer uma unidade de medida de comprimento para x . Por exemplo, considerando $x = 1,5$ e o centímetro como a unidade de medida de comprimento, temos:

$$f(1,5) = 5 \cdot 1,5 = 7,5; \text{ ou seja, } 7,5 \text{ cm}$$

Um pentágono regular com 1,5 cm de lado tem 7,5 cm de perímetro.

Resposta esperada: Sim, pois, se aumentarmos ou reduzirmos a medida de cada lado do pentágono regular, seu perímetro também aumenta ou reduz, respectivamente, na mesma proporção. Assim, se multiplicarmos a medida de cada lado do pentágono regular por um número real positivo k , seu perímetro também será multiplicado por esse mesmo número ($5 \cdot kx = k \cdot 5x = k \cdot f(x)$).

• Função afim e juro simples

O juro simples é uma modalidade de aplicação financeira que envolve os elementos descritos a seguir.

- Juro (j): rendimento obtido.
- Capital (c): quantia investida ou correspondente à dívida inicial.
- Taxa de juro (i): percentual de rendimento em certo período de tempo.
- Tempo (t): período em que o capital fica investido ou em dívida.

Na modalidade de juro simples, a relação entre esses elementos pode ser expressa da maneira a seguir.

$$j = c \cdot i \cdot t$$

Capital aplicado — c — Período de tempo — t — Taxa de juro simples — i — Juro obtido na aplicação — j

Agora, considere a situação descrita a seguir.

Sérgio fez uma aplicação financeira de R\$ 500,00 a uma taxa de juro simples de 2% ao mês.

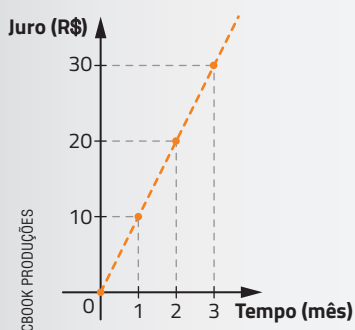
Podemos calcular, por exemplo, o juro obtido nessa aplicação após um período de 10 meses da seguinte maneira:

$$j = 500 \cdot 0,02 \cdot 10 = 100$$

Assim, Sérgio obterá R\$ 100,00 de juro ao final de 10 meses dessa aplicação.

Também podemos analisar o comportamento do juro nessa aplicação de acordo com o tempo. Para isso, substituímos os valores correspondentes ao capital e à taxa de juro na expressão: $j = 500 \cdot 0,02 \cdot t \Rightarrow j = 10t$.

Assim, podemos definir a lei de formação de uma função $f(t) = 10t$, em que t é um número natural, para expressar o juro obtido nessa aplicação de acordo com o tempo t , em mês. Observe o gráfico dessa função.



t	$f(t)$
0	0
1	10
2	20
3	30

DICA

Neste gráfico, as escalas dos eixos estão diferentes.

PARA PENSAR

Em quanto tempo o capital aplicado por Sérgio será dobrado?

após 50 meses da aplicação

ATIVIDADE RESOLVIDA

R12. O gráfico da figura representa o juro obtido em uma aplicação de R\$ 1.500,00 no sistema de juro simples de acordo com o tempo. Determine a taxa mensal de juro dessa aplicação e escreva uma função f para expressar o juro obtido de acordo com o tempo t , em mês.

Resolução

De acordo com o gráfico, ao fim de 5 meses da aplicação, o juro obtido é igual a R\$ 600,00. Como o capital aplicado foi de R\$ 1.500,00, temos que:

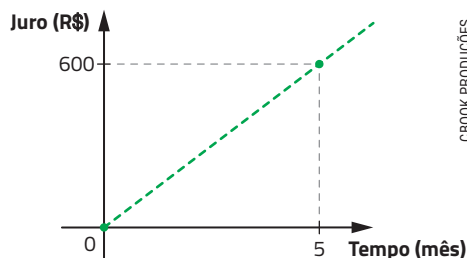
$$j = c \cdot i \cdot t \Rightarrow 600 = 1500 \cdot i \cdot 5 \Rightarrow i = 0,08 = 8\%$$

Portanto, a taxa de juro dessa aplicação é de 8% ao mês.

Agora, devemos determinar uma função f que expresse o juro obtido nessa aplicação de acordo com o tempo t , em mês. Substituindo os valores de c e i na expressão, segue que:

$$j = c \cdot i \cdot t \Rightarrow j = 1500 \cdot 0,08 \cdot t \Rightarrow j = 120t$$

Assim, podemos escrever a função $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$, definida por $f(t) = 120t$.



CBOOK PRODUÇÕES

DICA

Neste gráfico, as escalas dos eixos estão diferentes.

Porque os valores de t do domínio correspondem à quantidade de meses de uma aplicação financeira.

PARA PENSAR

Explique por que o domínio da função f deve ser \mathbb{N} .

Função afim e progressão aritmética

Considere a função $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$, definida por $f(x) = 2x + 3$. Agora, vamos calcular o valor numérico dessa função fazendo x variar de acordo com a sequência dos números naturais, a partir de $x = 0$. Acompanhe.

- $x = 0 \rightarrow f(0) = 2 \cdot 0 + 3 = 3$
- $x = 1 \rightarrow f(1) = 2 \cdot 1 + 3 = 5$
- $x = 2 \rightarrow f(2) = 2 \cdot 2 + 3 = 7$
- $x = 3 \rightarrow f(3) = 2 \cdot 3 + 3 = 9$
- $x = 4 \rightarrow f(4) = 2 \cdot 4 + 3 = 11$
- $x = 5 \rightarrow f(5) = 2 \cdot 5 + 3 = 13$
- ⋮

Note que os valores obtidos, na ordem em que foram calculados, correspondem a termos de uma sequência numérica em que, a partir do 2º termo, cada termo corresponde ao anterior adicionado de duas unidades.

$$(3, 5, 7, 9, 11, 13, \dots)$$

$\xrightarrow{+2} \xrightarrow{+2} \xrightarrow{+2} \xrightarrow{+2} \xrightarrow{+2}$

Essa sequência obtida é um exemplo de progressão aritmética.

Denominamos **progressão aritmética** (PA) toda sequência numérica em que, a partir do 2º termo, a diferença entre um termo qualquer e seu antecessor é igual a uma constante. Essa constante, que pode ser indicada por r , é a **razão** da PA.

Podemos determinar os termos de uma PA a partir de uma função $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$, definida por $f(x) = ax + b$.

Atividade resolvida

R13. Considere uma função $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$, definida por $f(x) = -3x + 2$, e a PA dada por $(f(0), f(1), f(2), f(3), \dots, f(n), \dots)$.

- Escreva os cinco primeiros termos dessa PA.
- Qual é a razão dessa PA?
- Construa o gráfico de f .

Resolução

a) Os cinco primeiros termos dessa PA são dados por $f(0)$, $f(1)$, $f(2)$, $f(3)$ e $f(4)$.

- $f(0) = -3 \cdot 0 + 2 = 2$
- $f(1) = -3 \cdot 1 + 2 = -1$
- $f(2) = -3 \cdot 2 + 2 = -4$
- $f(3) = -3 \cdot 3 + 2 = -7$
- $f(4) = -3 \cdot 4 + 2 = -10$

Portanto, os cinco primeiros termos dessa PA são 2, -1, -4, -7 e -10.

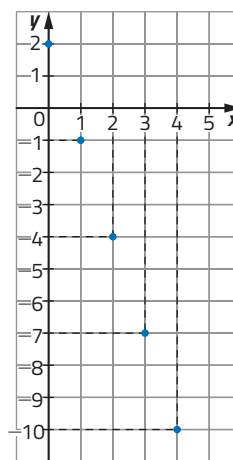
b) Como a razão r de uma PA corresponde, a partir do segundo termo, à diferença entre um termo qualquer e seu antecessor, temos:

$$r = -1 - 2 = -3$$

Portanto, a razão dessa PA é -3.

c) Construindo o gráfico de f , temos:

x	y	(x, y)
0	2	(0, 2)
1	-1	(1, -1)
2	-4	(2, -4)
3	-7	(3, -7)
4	-10	(4, -10)

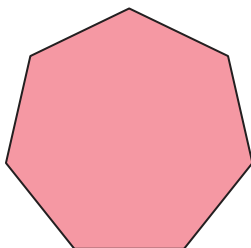


ILUSTRAÇÕES: CBOOK PRODUÇÕES

Atividades

Não escreva no livro.

47. Observe a figura de um polígono regular.

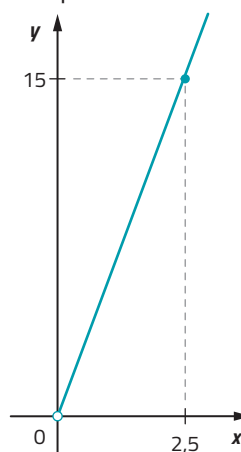


- Como é nomeado esse polígono em relação ao número de lados? **heptágono regular**
- Escreva uma função f que expresse o perímetro desse polígono de acordo com a medida x de cada um de seus lados.
- Em relação à função f que você escreveu no item **b**, calcule $f(4)$ e explique o que esse cálculo indica.

47. b) $f:]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$, definida por $f(x) = 7x$

47. c) $f(4) = 28$. Resposta esperada: Esse cálculo indica que um heptágono regular tem perímetro com 28 unidades de comprimento quando cada um de seus lados mede 4 unidades de comprimento.

48. Este gráfico representa uma função g que expressa o perímetro de um polígono regular em que cada lado mede x . Qual é esse polígono? **hexágono regular**



DICA
Neste gráfico, as escalas dos eixos são diferentes.

49. Em uma aplicação financeira, o **montante (M)** é a soma do capital aplicado e do juro obtido após certo tempo. Esse montante pode ser calculado por meio da expressão a seguir.

$$M = c + j \Rightarrow M = c + (c \cdot i \cdot t) \Rightarrow \\ \Rightarrow M = c(1 + i \cdot t)$$

Considere um capital de R\$ 600,00 aplicado a uma taxa de juro simples de 5% ao mês e resolva os itens a seguir.

- a) Qual é o montante obtido nessa aplicação após 1 mês? E após 5 meses? **R\$ 630,00; R\$ 750,00**
- b) Escreva uma função f que expresse o montante dessa aplicação de acordo com o tempo t , em mês. **$f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$, definida por $f(t) = 30t + 600$**
- c) Represente o gráfico da função que você escreveu no item b. **Resposta nas Orientações para o professor.**

50. O quadro a seguir expressa a relação entre medidas do lado de um quadrado e os respectivos valores do perímetro e da área dele.

Lado (cm)	Perímetro (cm)	Área (cm ²)
1	4	1
2	8	4
3	12	9
4	16	16

Resposta nas Orientações para o professor.

- a) Que regularidades há entre os números indicados nas colunas correspondentes às medidas do lado e ao perímetro do quadrado? E entre os números correspondentes às medidas do lado e à área do quadrado?
- b) De acordo com a resposta ao item anterior, expresse o perímetro e a área de um quadrado cujo lado mede x , considerando certa unidade de medida de comprimento.
- c) Se dobrarmos a medida do lado de um quadrado qualquer, a área dele também dobra? Justifique sua resposta. **Resposta nas Orientações para o professor.**
- d) Se dobrarmos a medida do lado de um quadrado, o perímetro dele também dobra? Justifique sua resposta. **Resposta nas Orientações para o professor.**
- e) Escreva a lei de formação das funções p e s que expressam, respectivamente, o perímetro e a área de um quadrado cujo lado mede x , considerando certa unidade de medida de comprimento. **$p(x) = 4x$; $s(x) = x^2$.**

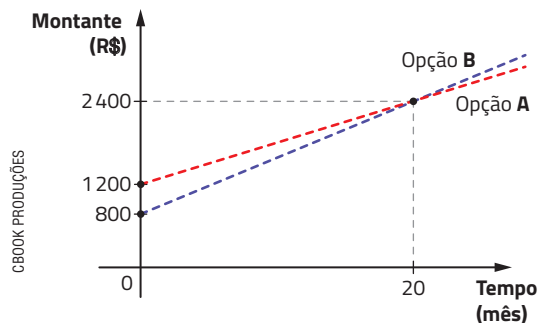
50. b) perímetro: $4x$; área: x^2

51. c) A: $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$, definida por $f(t) = 60t + 1\,200$; B: $g: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$, definida por $g(t) = 80t + 800$

51. Uma instituição oferece as opções **A** e **B** de investimentos sob sistema de juro simples. Observe, no gráfico, o montante que um cliente pode obter aplicando capitais distintos nessas duas opções.

DICA

Neste gráfico, as escalas dos eixos são diferentes.



- a) Que capital o cliente pretende aplicar em cada opção de investimento? **A: R\$ 1.200,00; B: R\$ 800,00**
- b) Determine a taxa mensal de juro em cada opção de investimento. **A: 5%; B: 10%**
- c) Escreva uma função que expresse o montante obtido (em reais) ao final de t meses para cada um desses investimentos.
- d) Em qual investimento o montante obtido é o maior após 1 ano? E após 2 anos? **investimento A; investimento B**
52. Antônio trabalha com vendas em certa loja de materiais esportivos. Seu salário mensal varia de acordo com a quantia, em reais, obtida nas vendas que ele realizou no mês. Observe.
- Vendas de até R\$ 5.000,00: salário de R\$ 2.000,00.
 - Vendas maiores que R\$ 5.000,00 até R\$ 10.000,00: salário de R\$ 2.000,00 mais 10% do valor das vendas que ultrapassar R\$ 5.000,00.
 - Vendas maiores que R\$ 10.000,00: salário de R\$ 2.500,00 mais 15% do valor das vendas que ultrapassar R\$ 10.000,00.
- a) Escreva a lei de formação de uma função definida por mais de uma sentença que relacione o salário mensal S de Antônio com a quantia v , em reais, obtida nas vendas que ele realizou no mês. **Resposta nas Orientações para o professor.**
- b) Em uma malha quadriculada, construa o gráfico da função S .

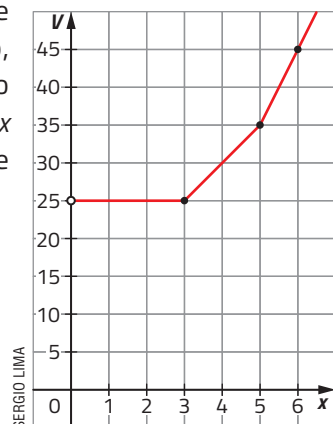
$$52. a) S(v) = \begin{cases} 2\,000, & \text{se } v \leq 5\,000 \\ 0,10v + 1\,500, & \text{se } 5\,000 < v \leq 10\,000 \\ 0,15v + 1\,000, & \text{se } v > 10\,000 \end{cases}$$

53. a) $V(x) = \begin{cases} 25, & \text{se } 0 < x \leq 3 \\ 5x + 10, & \text{se } 3 < x \leq 5 \\ 10x - 15, & \text{se } x > 5 \end{cases}$

53. O gráfico a seguir representa a função V que expressa o valor a pagar na fatura de gás de um condomínio de certo município, em reais, de acordo com a quantidade x de metro cúbico de gás consumido.



Neste gráfico, as escalas dos eixos são diferentes.



a) Escreva a lei de formação da função V , apresentada no gráfico.

b) Elabore três questões que envolvam as informações apresentadas nesta atividade e trabalhe o conceito de função. Depois, troque-as com um colega para que um resolva as questões do outro. Ao final, confirmem juntos as resoluções. *Elaboração do estudante.*

54. Considere uma função afim $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$, definida por $f(x) = 5x - 20$, e a PA dada por:

$$(f(0), f(1), f(2), \dots, f(n), \dots)$$

a) Escreva os cinco primeiros termos dessa PA. *-20, -15, -10, -5 e 0*

b) Qual é a razão dessa PA? *5*

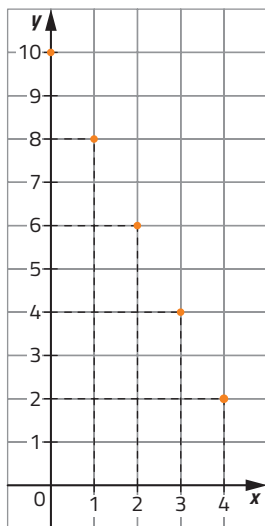
c) Construa o gráfico de f . *Resposta nas Orientações para o professor.*

55. Observe o gráfico de uma função $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$.

a) Escreva a lei de formação da função f . *$f(x) = -2x + 10$*

b) A partir da função f , podemos determinar uma PA de termos $(f(0), f(1), f(2), \dots, f(n), \dots)$. Nessa PA, qual é o valor do:

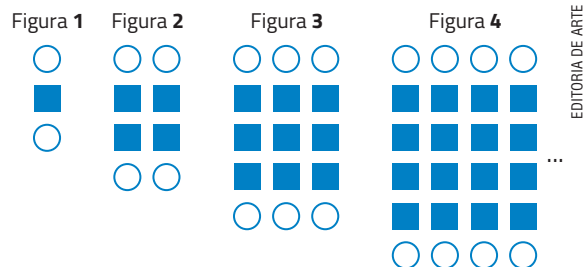
- 10º termo? *-8*
- 20º termo? *-28*
- 100º termo? *-188*



57. d) A sequência numérica $(2, 4, 6, 8, 10, \dots, 2n, \dots)$ é uma PA, pois, a partir do segundo termo, a diferença entre cada termo e o anterior é igual a 2, que corresponde à razão da PA.

56. Ao aplicar um capital de R\$ 900,00 a uma taxa de juro simples mensal de 7%, obteve-se R\$ 252,00 de juro. Por quantos meses esse capital ficou aplicado? *4 meses*

57. Observe a sequência figural a seguir, em que cada figura é formada por quadrados e circunferências.



Resposta pessoal.

a) Nessa sequência, que regularidade você percebe na variação da quantidade de quadrados e de circunferências de uma figura para a seguinte? Explique com suas palavras.

b) Desenhe como você imagina ser a figura 5 dessa sequência. Depois, compare com os desenhos feitos pelos colegas. *Construção do estudante.*

c) Escreva uma sequência numérica para expressar a quantidade de:

- quadrados nas figuras dessa sequência figural. *$(1, 4, 9, 16, 25, \dots, n^2, \dots)$*
- circunferências nas figuras dessa sequência figural. *$(2, 4, 6, 8, 10, \dots, 2n, \dots)$*

d) Qual das sequências numéricas que você escreveu no item anterior é uma PA? Justifique sua resposta.

58. Pesquise uma situação que envolva uma progressão aritmética. Pode ser uma situação do seu dia a dia ou de alguma área do conhecimento. Depois, descreva como a progressão aritmética se relaciona com essa situação. Indique também os primeiros termos dessa sequência e defina uma função que possa ser relacionada a ela. Ao final, troque a situação que você analisou com a de um colega para que um avalie a produção do outro.

Pesquisa e elaboração do estudante.

59. Elabore um problema envolvendo uma função $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$, definida por $f(x) = ax + b$, e uma progressão aritmética. Em seguida, troque o problema com um colega para que um resolva o do outro. Ao final, confirmem juntos as resoluções.

Elaboração do estudante.

Função modular

Estudamos na Unidade 1 que o módulo de um número real x , indicado por $|x|$, é dado por x , se $x \geq 0$, e por $-x$, se $x < 0$. Observe alguns exemplos.

- $|3,7| = 3,7$
- $|1,\bar{3}| = 1,\bar{3}$
- $|-6| = 6$
- $|-100| = 100$
- $|-\sqrt{5}| = \sqrt{5}$

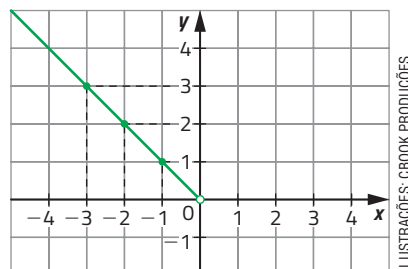
A partir da definição de módulo de um número real, podemos determinar uma função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, definida por $f(x) = |x|$. Esse tipo de função é denominado **função modular** e pode ser expresso da maneira a seguir.

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{se } x \geq 0 \\ -x, & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

Acompanhe as etapas que podemos realizar para esboçar o gráfico de uma função modular.

- 1ª) Atribuir valores arbitrários para $x < 0$, determinar os pares ordenados (x, y) correspondentes e esboçar o gráfico para $x < 0$.

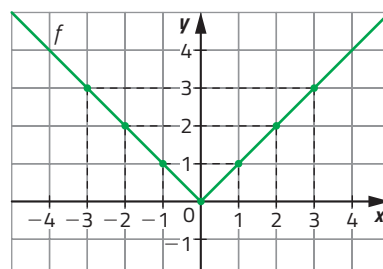
x	$f(x) = -x$	(x, y)
-3	$f(-3) = -(-3) = 3$	$(-3, 3)$
-2	$f(-2) = -(-2) = 2$	$(-2, 2)$
-1	$f(-1) = -(-1) = 1$	$(-1, 1)$



ILUSTRAÇÕES: CBOOK PRODUÇÕES

- 2ª) Em seguida, de maneira análoga à primeira etapa, atribuímos valores arbitrários para $x \geq 0$ e esboçamos o gráfico para $x \geq 0$. Assim, obtemos o gráfico da função modular $f(x) = |x|$.

x	$f(x) = x$	(x, y)
0	$f(0) = 0$	$(0, 0)$
1	$f(1) = 1$	$(1, 1)$
2	$f(2) = 2$	$(2, 2)$
3	$f(3) = 3$	$(3, 3)$



DICA

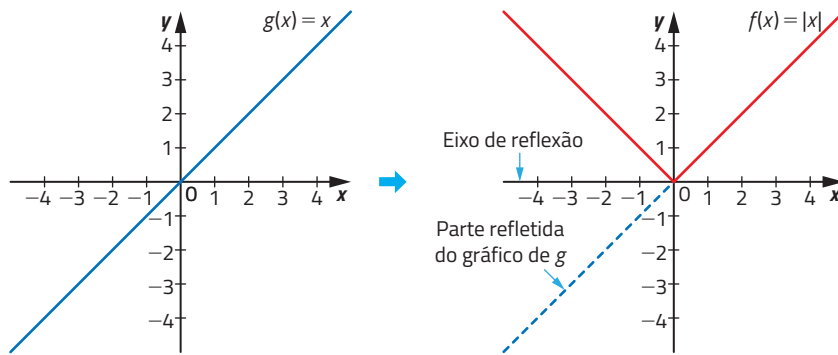
Note que, para construir o gráfico da função modular $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, definida por $f(x) = |x|$, podemos representar o gráfico de $g(x) = -x$, para $x < 0$, e de $h(x) = x$, para $x \geq 0$.

PARA PENSAR

Para quais valores reais de x uma função modular do tipo $f(x) = |x|$ é negativa? Justifique.

Não há valor real de x para o qual $f(x) < 0$, pois $|x| \geq 0$ para todo x real.

Também podemos obter o gráfico da função modular $f(x) = |x|$ considerando o gráfico da função identidade $g(x) = x$ e refletindo seus pontos em relação ao eixo das abscissas para $x < 0$. Observe.



ILUSTRAÇÕES: CBOOK PRODUÇÕES

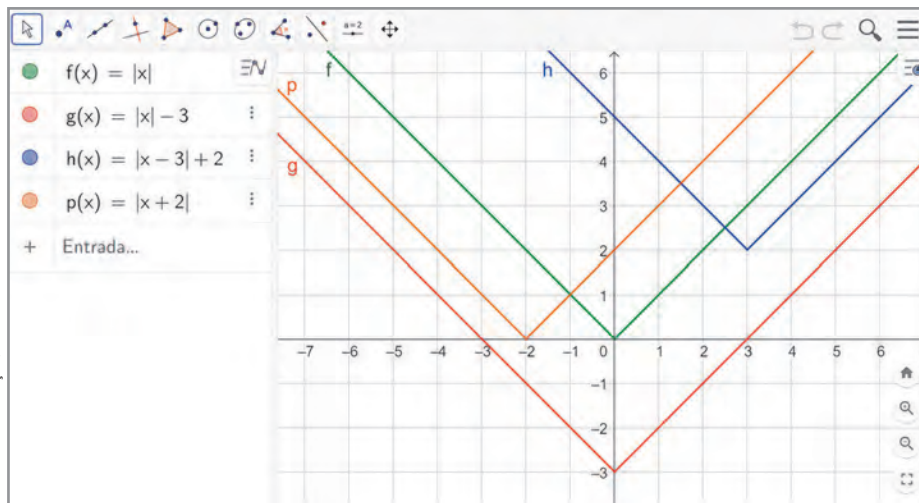
PARA PENSAR

Estabeleça as coordenadas de um ponto P pertencente ao gráfico de g , para $x < 0$. Depois, determine as coordenadas do ponto P' , simétrico a P por reflexão em relação ao eixo das abscissas. Por fim, mostre que P' é um ponto do gráfico da função modular f . Explique a um colega os procedimentos realizados.

Resposta pessoal.

• Translação do gráfico de uma função modular

O gráfico da função modular $f(x) = |x|$ foi construído no **GeoGebra** e transladado diversas vezes, obtendo-se gráficos de diferentes funções.



PARA PENSAR

Que regularidade você pode perceber entre cada translação do gráfico de f e a lei de formação da função correspondente ao gráfico obtido?

Resposta pessoal.

DICA

- Para escrever o módulo de um número real no campo **Entrada** do **GeoGebra**, utilizamos $|$ (barra vertical do teclado).
- Utilizando as opções \leftarrow (Mover janela de visualização), \oplus (Ampliar) e \ominus (Reduzir), é possível visualizar os gráficos dessas funções em diferentes intervalos do domínio real.

Dada uma função $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, definida por $g(x) = |x + a| + b$, sendo a e b números reais, podemos obter o gráfico de g transladando o gráfico da função modular $f(x) = |x|$ da seguinte maneira:

- $|a|$ unidades para a esquerda, se $a > 0$;
- $|b|$ unidades para cima, se $b > 0$;
- $|a|$ unidades para a direita, se $a < 0$;
- $|b|$ unidades para baixo, se $b < 0$.

DICA

Quando $a = 0$, o gráfico não é transladado horizontalmente. Quando $b = 0$, o gráfico não é transladado verticalmente.

ATIVIDADES RESOLVIDAS

R14. Esboce os gráficos das funções indicadas a seguir com base no gráfico da função modular $f(x) = |x|$.

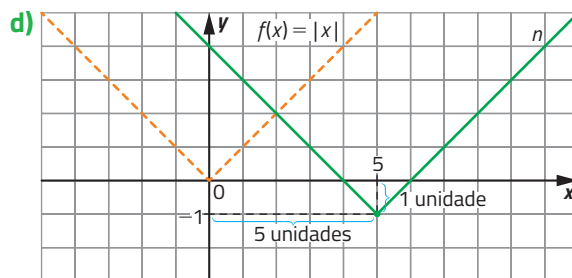
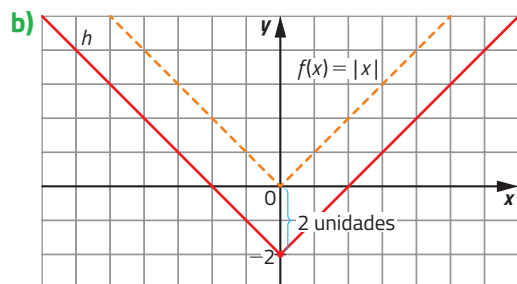
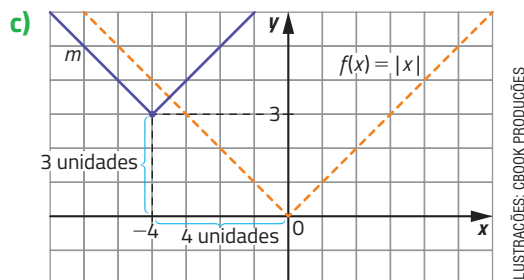
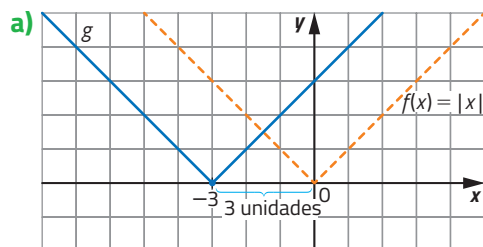
a) $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, definida por $g(x) = |x + 3|$.

b) $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, definida por $h(x) = |x| - 2$.

c) $m: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, definida por $m(x) = |x + 4| + 3$.

d) $n: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, definida por $n(x) = |x - 5| - 1$.

Resolução



R15. O gráfico de uma função modular $f(x) = |x|$ foi transladado em 7 unidades para a esquerda e em 3 unidades para baixo, determinando o gráfico de uma função g . Calcule $g(-8)$.

Resolução

Como o gráfico de g foi obtido por translações horizontal e vertical do gráfico de uma função modular $f(x) = |x|$, temos que sua lei de formação é dada por $g(x) = |x + a| + b$, sendo a e b números reais. Assim, segue que:

- $a = 7$, pois a translação horizontal foi de 7 unidades para a esquerda;
- $b = -3$, pois a translação vertical foi de 3 unidades para baixo.

Logo, determinamos que $g(x) = |x + 7| - 3$. Calculando $g(-8)$, temos:

$$g(-8) = |-8 + 7| - 3 = |-1| - 3 = 1 - 3 = -2$$

Portanto, $g(-8) = -2$.

PARA PENSAR

No caderno, esboce o gráfico da função g e destaque o ponto de coordenadas $(-8, -2)$, correspondente a $g(-8) = -2$.

Construção do estudante.

ATIVIDADES

Não escreva no livro.

60. Dadas as funções $f(x) = |x + 5| - 6$ e $g(x) = |x - 1| + 4$, calcule:

- a)** $f(-3)$; -4 **d)** $g(-1)$; 6
b) $f(4)$; 3 **e)** $f(0) + g(3)$; 5
c) $g(6)$; 9 **f)** $g(-2) - f(2)$; 6

61. Esboce o gráfico de cada função indicada a seguir. Respostas nas Orientações para o professor.

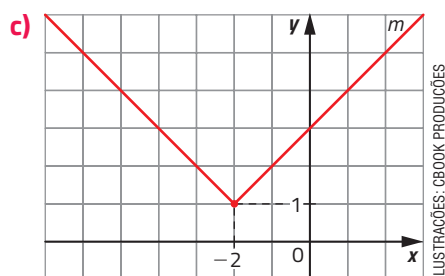
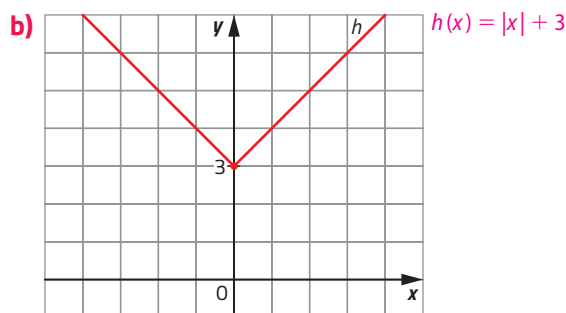
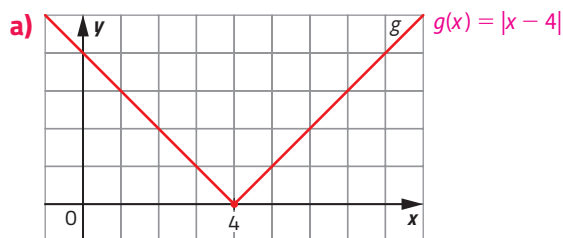
- a)** $f(x) = |x|$
b) $g(x) = |x - 2|$
c) $h(x) = |x| + 5$
d) $m(x) = |x + 1| - 4$

65. a) $g(x) = |x - 7|$

65. b) O alvo C, pois é o único cujo ponto correspondente pertence ao gráfico da função g , pois $g(12) = |12 - 7| = |5| = 5$.

62. Em um mesmo plano cartesiano, esboce os gráficos das funções $g(x) = |x - 3|$ e $h(x) = |x| - 3$. Depois, com suas palavras, analise e compare esses gráficos. **Resposta nas Orientações para o professor.**

63. Em cada item a seguir, obtenha a lei de formação da função correspondente, sabendo que cada um dos gráficos representados corresponde a uma translação horizontal ou vertical do gráfico da função modular $f(x) = |x|$.



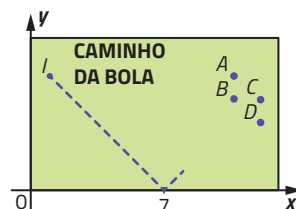
- Agora, explique a um colega os procedimentos que você realizou para resolver os itens desta atividade. **Resposta pessoal.**

64. Com um programa de computador, Felipe construiu o gráfico da função modular $f(x) = |x|$. Depois, utilizando ferramentas desse programa, Felipe transladou o gráfico de f em 5 unidades para cima e em 2 unidades para a direita.

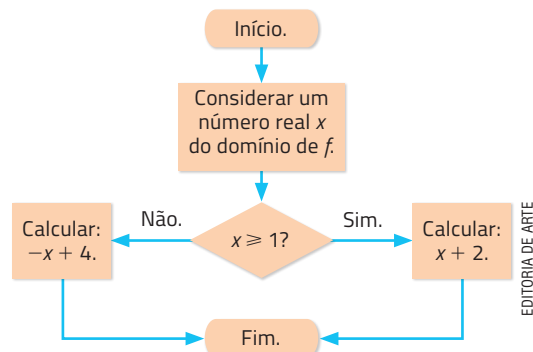
- a) Escreva a lei de formação da função g correspondente ao gráfico obtido por Felipe após as translações. $g(x) = |x - 2| + 5$
- b) Quais são as coordenadas do ponto em que o gráfico de g cruza o eixo das ordenadas? **(0, 7)**

65. Raquel faz um curso de programação em que aprende a desenvolver aplicativos e jogos digitais. Em um de seus projetos, ela desenvolveu um jogo chamado "Caminho da bola", que consiste em um tabuleiro disposto em um plano cartesiano, no qual uma bola é lançada a partir de um ponto descrevendo uma trajetória sobre o gráfico de uma função $g(x) = |x + a| + b$, com a e b reais. Tal bola deve atingir alvos definidos sobre pontos destacados. Ao atingir um ponto qualquer $P(x, y)$, o jogador recebe $x - y$ pontos. Observe uma jogada nesse tabuleiro, em que estão destacados parte da trajetória da bola, que estava sobre o ponto I , e os alvos disponíveis.

Alvo	Coordenadas do ponto
A	(11, 6)
B	(11, 5)
C	(12, 5)
D	(12, 4)



- a) Qual é a lei de formação da função sobre a qual está a trajetória da bola nessa jogada?
- b) Nessa jogada, quais alvos serão atingidos? Justifique.
- c) Nessa jogada, qual será a pontuação obtida? Justifique. **7 pontos, pois $x - y = 12 - 5 = 7$.**
66. O fluxograma a seguir representa um algoritmo por meio do qual é possível determinar os valores da função $y = f(x)$ dado o número real x do domínio de f . **alternativa d**



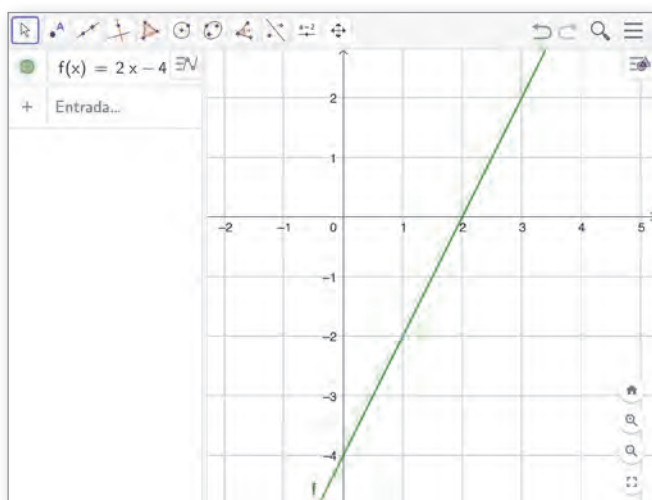
Qual é a lei de formação da função f ?

- a) $f(x) = x + 2$ d) $f(x) = |x - 1| + 3$
- b) $f(x) = -x + 4$ e) $f(x) = |x - 4| + 5$
- c) $f(x) = |x + 2| + 4$

VOCÊ CONECTADO

Construindo e analisando o gráfico da função afim


Observe como podemos construir e analisar o gráfico de uma função afim de acordo com sua lei de formação utilizando o *software* de geometria dinâmica **GeoGebra**.




Exemplo 1:

Vamos construir o gráfico da função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = 2x - 4$. Para isso, clicamos no campo **Entrada**, digitamos $f(x) = 2x - 4$ e pressionamos a tecla **Enter**.

Exemplo 2:

Utilizando a opção  (Controle deslizante), podemos realizar uma construção no **GeoGebra** que possibilita analisar a relação entre os coeficientes de uma função afim $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, definida por $f(x) = ax + b$, e seu respectivo gráfico.

Para isso, siga estes passos.

- A** Vamos criar os controles deslizantes para os coeficientes a e b . Para o coeficiente a (com $a \in [-5, 5]$), selecionamos a opção  (Controle deslizante) e clicamos em qualquer ponto na **Janela de visualização**. Em seguida, na caixa de texto que vai abrir, digitamos a na opção **Nome**; na aba **Intervalo**, digitamos -5 na opção **min** e 5 na opção **max**; depois, clicamos em **OK**. De maneira análoga, criamos o controle deslizante para o coeficiente b (com $b \in [-10, 10]$).

Controle Deslizante

Nome: $a = 1$

☒ Número ☐ Ângulo ☐ Inteiro

Intervalo: Controle Deslizante Animação

min: -5 max: 5 Incremento:

CANCELAR OK

Controle Deslizante

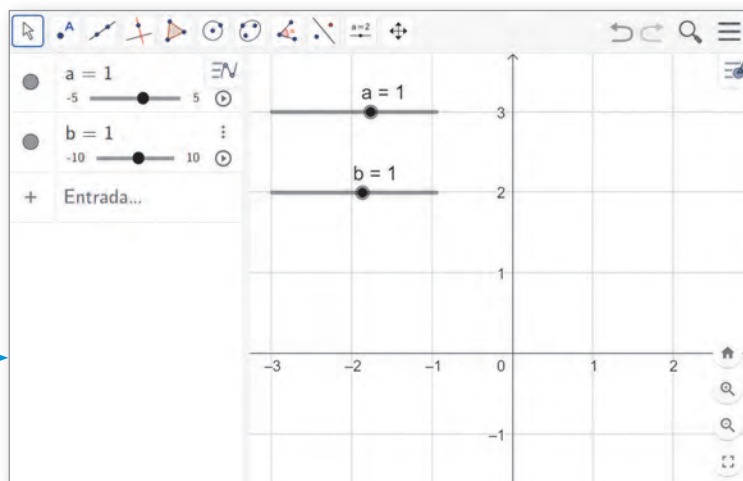
Nome: $b = 1$

☒ Número ☐ Ângulo ☐ Inteiro

Intervalo: Controle Deslizante Animação

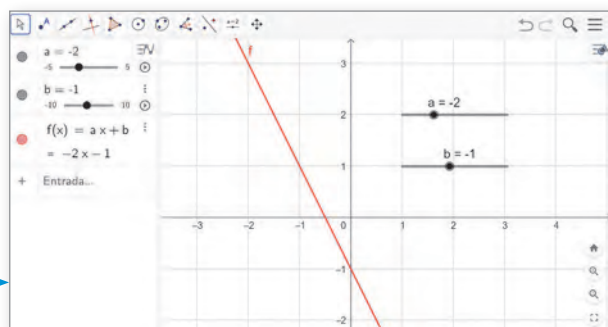
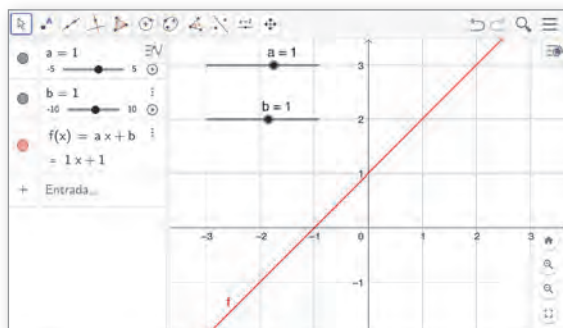
min: -10 max: 10 Incremento:

CANCELAR OK



IMAGENS: REPRODUÇÃO/GEOTREBA

- B** No campo **Entrada**, digitamos $f(x) = ax + b$ e pressionamos a tecla **Enter**. Ao movimentar os controles deslizantes, variamos os valores dos coeficientes da função e o gráfico se ajusta automaticamente. Observe.



IMAGENS: REPRODUÇÃO/GEOGEBRA

MÃOS À OBRA

Não escreva no livro.

4. a) Resposta esperada: Ao movimentar o controle deslizante **a**, a inclinação da reta que representa o gráfico da função é alterada e, ao movimentar o controle deslizante **b**, o gráfico da função é transladado verticalmente.

- No **GeoGebra**, reproduza a construção apresentada no exemplo 1 e, em relação à função f definida por $f(x) = 2x - 4$, resolva as questões.
 - Essa função é crescente ou decrescente? **crescente**
 - Com a opção (Interseção de dois objetos), indique os pontos em que o gráfico cruza os eixos cartesianos. Qual é o zero dessa função? **Cruza o eixo x no ponto de coordenadas (2, 0) e o eixo y no ponto de coordenadas (0, -4). O zero da função é x = 2.**
 - Faça o estudo do sinal dessa função afim. **$f(x) > 0$ para $x > 2$, $f(x) = 0$ para $x = 2$ e $f(x) < 0$ para $x < 2$**
- Utilizando procedimentos análogos aos do exemplo 1, construa os gráficos das funções indicadas em cada item. **Construção do estudante.**
 - $f(x) = 3x - 1$
 - $g(x) = x + 4$
 - $h(x) = 5 - 2x$
 - $m(x) = -\frac{x}{3} - 6$
- Com a opção (Reta), represente no **GeoGebra** as retas que passam pelos pontos indicados em cada item. **Construção do estudante.**
 - $A(-2, 3)$ e $B(3, 1)$
 - $C(5, 2)$ e $D(-1, -1)$
 - $E(4, -1)$ e $F(2, -3)$

Agora, observe a **Janela de Álgebra** e escreva as equações dessas retas. **a) $2x + 5y = 11$; b) $x - 2y = 1$; c) $x - y = 5$**
- No **GeoGebra**, reproduza a construção apresentada no exemplo 2 e resolva as questões.
 - Movimente os controles deslizantes **a** e **b**. Em cada caso, quais alterações você pode observar no gráfico?
 - O que você acredita que vai ocorrer com o gráfico ao movimentar o controle deslizante **b** de -6 para 4 ? **Resposta pessoal.**
 - Faça o ajuste indicado no item anterior e verifique sua resposta. **Resposta esperada: O gráfico da função foi transladado em 10 unidades para cima.**
- No **GeoGebra**, utilizando a opção (Controle deslizante), construa os controles deslizantes **a** e **b**, variando de -10 a 10 , e o gráfico da função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, definida por $f(x) = |x + a| + b$. Em seguida, movimente os controles deslizantes e descreva as alterações que cada um deles ocasionou no gráfico de f . **Construção do estudante. Resposta esperada: O controle deslizante a transladou o gráfico para a direita ao diminuir seu valor e para a esquerda ao aumentar seu valor. O controle deslizante b transladou o gráfico para baixo ao diminuir seu valor e para cima ao aumentar seu valor.**

Construindo um modelo para representar relações entre grandezas

A planilha eletrônica **LibreOffice Calc** pode ser usada para estudar o comportamento de duas grandezas que se relacionam, construindo modelos correspondentes a funções afins e representações de retas no plano cartesiano. Para isso, considere a seguinte situação.

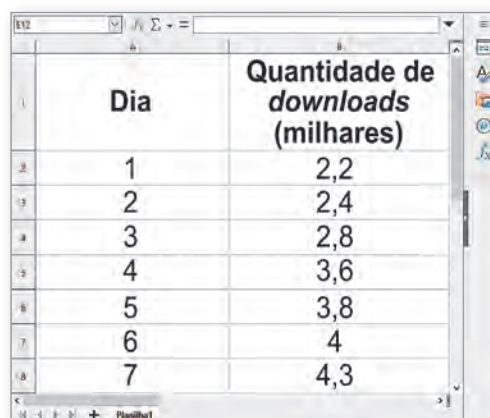
Uma empresa de desenvolvimento de aplicativos *mobile* lançou, há uma semana, um jogo digital. No quadro, está representada a quantidade de *downloads* desse jogo até o momento.

Dia	Quantidade de <i>downloads</i> (milhares)
1	2,2
2	2,4
3	2,8
4	3,6
5	3,8
6	4
7	4,3

A fim de estimar a quantidade de *downloads* desse jogo para os próximos dias, sabendo que a situação pode ser modelada por uma função afim, vamos obter, na planilha eletrônica **LibreOffice Calc**, a representação da reta e a função que modela a relação entre a quantidade diária de *downloads* e a quantidade de dias após o lançamento do jogo.

Para isso, siga estes passos.

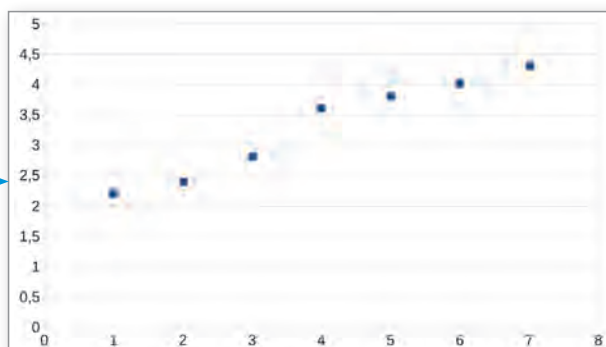
- A** Organizamos os dados do quadro na planilha eletrônica.



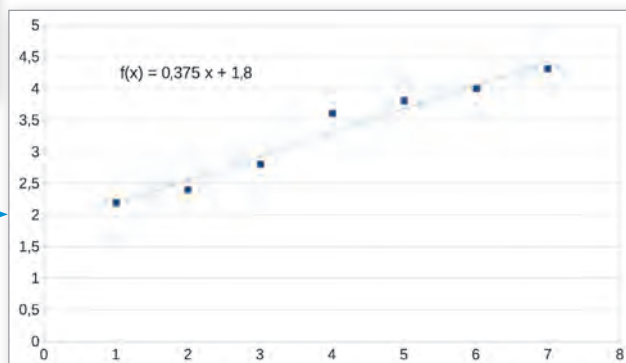
Dia	Quantidade de <i>downloads</i> (milhares)
1	2,2
2	2,4
3	2,8
4	3,6
5	3,8
6	4
7	4,3

IMAGENS: REPRODUÇÃO/LIBREOFFICE

- B** Selecionamos as células **A2:B8** e clicamos na opção **Inserir gráfico** do *menu*. Em seguida, ao abrir a caixa de diálogo **Assistente de gráficos**, na opção **1. Tipo de gráfico**, selecionamos as opções **XY (Dispersão)** e **Somente pontos**. Por fim, clicamos em **Finalizar** e obtemos os pontos de coordenadas (x, y) , que indicam a quantidade x de dias após o lançamento do jogo e a quantidade y de *downloads* diários, em milhar.



- C** Para determinar a reta e a função afim que modela a relação entre essas grandezas, clicamos sobre um dos pontos plotados para selecioná-lo. Em seguida, clicamos nas opções **Inserir** e **Linha de tendência...** do *menu*. Ao abrir a caixa de diálogo **Linha de tendência para a série de dados 'Coluna B'**, na opção **Tipo de regressão**, selecionamos a opção **Linear** e, em **Opções**, marcamos **Mostrar equação**. Por fim, clicamos em **OK**.



IMAGENS: REPRODUÇÃO/LIBREOFFICE

MÃOS À OBRA

Não escreva no livro.

- De acordo com a situação apresentada no exemplo, faça o que se pede.
 - Calcule a diferença entre a quantidade de *downloads* indicada no quadro e a quantidade correspondente determinada pela função f para cada um dos dias apresentados.
 - Considerando a aproximação dos dados obtidos pela função f , estime a quantidade de *downloads* do jogo para os próximos três dias.
- Utilizando os mesmos procedimentos apresentados no exemplo, represente os dados a seguir em uma planilha eletrônica e obtenha a representação da reta e da função afim que melhor descrevem a relação entre o faturamento de uma empresa de confecções e os 6 primeiros meses do ano.

Construção do estudante.

Mês	Faturamento (em milhares de reais)
1	7
2	8
3	9,5
4	11
5	14
6	15

1. a) dia 1: 25 downloads;
dia 2: 150 downloads;
dia 3: 125 downloads;
dia 4: 300 downloads;
dia 5: 125 downloads;
dia 6: 50 downloads;
dia 7: 125 downloads

1. b) dia 8: 4,8 mil downloads;
dia 9: 5,175 mil downloads;
dia 10: 5,55 mil downloads

- Com base nas informações fornecidas e na construção que você realizou, elabore um problema relacionado a função afim. Em seguida, troque o problema com um colega para que um resolva o do outro. Juntos, verifiquem se as respostas estão corretas. *Elaboração do estudante.*

O QUE ESTUDEI

Não escreva no livro.

1. Leia com atenção cada frase a seguir e faça uma reflexão sobre seu comportamento durante o estudo desta Unidade. Depois, responda se você **concorda**, **concorda parcialmente** ou **não concorda** com cada uma das afirmações. *Respostas pessoais.*

- | | | |
|--|---|--|
| a) Ouvi com atenção as explicações do professor. | d) Participei das discussões propostas à turma. | g) Respeitei os colegas nas atividades em grupo. |
| b) Quando precisei, pedi ajuda ao professor. | e) Fiz as atividades propostas na sala de aula. | h) Auxiliei os colegas quando eles tiveram dúvidas. |
| c) Auxiliei o professor quando ele me pediu. | f) Fiz as atividades escolares propostas para casa. | i) Levei para a sala de aula os materiais necessários. |

2. Nas fichas a seguir, estão indicados os principais conteúdos que estudamos nesta Unidade. Reflita sobre cada um deles e verifique se você precisa retomar algum para melhor compreendê-lo.

Resposta pessoal.

Função afim	Taxa de variação média de uma função	Função afim e perímetro de polígonos regulares
Função constante	Determinação de uma função afim	Função afim e juro simples
Função linear	Gráfico da função afim	Estudo do sinal de uma função afim
Função identidade	Função afim e progressão aritmética	Função modular

3. Agora, para retomar de maneira colaborativa o estudo de um conteúdo desta Unidade, junte-se a dois colegas, e sigam as etapas. *Respostas pessoais.*

1 SELECIONAR

Consultem os conteúdos indicados na atividade anterior e escolham um deles. Deem preferência a um conteúdo em que foi constatada necessidade de retomada de estudo.

2 REVISAR

Juntos, façam uma revisão do estudo desse conteúdo. É importante a participação de todos os integrantes nessa revisão.

4 APRESENTAR

Na apresentação, é importante usar uma linguagem adequada, simples e objetiva. É necessário oportunizar um momento para que cada integrante do grupo possa contribuir com as explicações. Ao final, vocês podem disponibilizar os materiais produzidos aos demais colegas da turma.

3 PREPARAR

Elaborem uma apresentação sobre esse conteúdo, o que pode ser realizado por meio de *slides*, cartazes, vídeo, entre outros recursos. Na apresentação, podem ser incluídos exemplos e atividades resolvidas. Também podem ser propostas atividades para que os demais colegas da turma resolvam.

4. Na abertura desta Unidade, foram apresentadas algumas informações sobre mobilidade urbana sustentável. Observe na figura mais informações sobre a cobrança de um serviço de aluguel de bicicletas.

- Escreva a lei de formação de uma função f que determine o preço a ser pago, nesse serviço de aluguel, por x minutos de uso da bicicleta. $f(x) = 0,5x + 2,50$
- Calcule $f(5)$ e $f(10)$. Depois, explique o que esses resultados indicam no contexto apresentado.
- Classifique f como uma função afim, linear, identidade, constante ou modular. **função afim**
- A função f é crescente ou decrescente? O que isso indica no contexto apresentado?
- Determine a taxa de variação da função f , para x variando de 2 min até 20 min. **0,5**
- Esboce o gráfico da função f .
- Os gráficos a seguir foram obtidos ao se deslocar verticalmente o gráfico da função f . Determine a lei de formação da função correspondente a cada gráfico apresentado.

O nome do estabelecimento que aparece nesta página é fictício.



ZAVADSKYI IHOR/SHUTTERSTOCK.COM

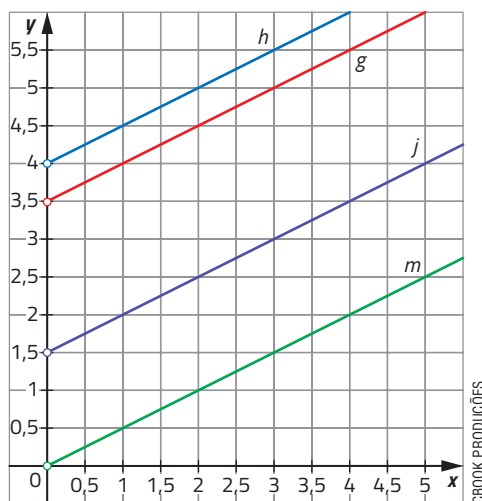
LEO TEIXEIRA

4. b) $f(5) = 5$ e $f(10) = 7,50$. Esses resultados indicam que o aluguel da bicicleta por 5 min e por 10 min custam, respectivamente, R\$ 5,00 e R\$ 7,50.

4. d) Função crescente. Indica que, ao aumentarmos o tempo de locação da bicicleta, o valor a pagar por esse serviço também aumenta.

4. f) Resposta nas **Orientações para o professor**.

4. g) $g(x) = 0,5x + 3,5$; $h(x) = 0,5x + 4$;
 $j(x) = 0,5x + 1,5$; $m(x) = 0,5x$



CBOOK PRODUÇÕES

h) Pesquise na internet o preço cobrado em algum serviço de mobilidade urbana sustentável, como a locação de bicicleta ou de patinete elétrico. Em seguida, descreva a lei de formação de uma função que possa expressar o valor a pagar por esse serviço de acordo com o tempo de uso ou da distância percorrida. **Pesquisa e elaboração do estudante.**



i) Em grupo com dois colegas, investiguem e analisem dados sobre os principais meios de transporte utilizados na região onde vivem. Depois, com base nessa pesquisa, elaborem um texto que contemple as seguintes questões: A população, em geral, utiliza veículos automotores a combustão ou meios de transporte alternativos e menos poluentes? O transporte público oferecido no município onde vivem atende às necessidades e demandas da população por um preço acessível? Por fim, compartilhem as produções com os colegas e discutam o tema em uma roda de conversa.

Pesquisa e elaboração do estudante.

PRATICANDO: ENEM E VESTIBULARES

Não escreva no livro.

1. (UFPR) Uma fábrica de calçados possui um custo fixo mensal de R\$ 20.000,00 relacionado a pagamentos de salários, aluguel e outras despesas fixas. Sabendo que, a cada par de calçados produzido, essa fábrica fatura R\$ 28,00, a expressão que descreve o lucro mensal, em reais, em função do número x de calçados produzidos é: **alternativa b**

- a) $20000x - 28$. d) $-28x + 20000$.
b) $28x - 20000$. e) $-20000x + 28$.
c) $28x + 20000$.

2. (Enem/MEC) Dirigir após ingerir bebidas alcoólicas é uma atitude extremamente perigosa, uma vez que, a partir da primeira dose, a pessoa já começa a ter perda de sensibilidade de movimentos e de reflexos. Apesar de a eliminação e absorção do álcool depender de cada pessoa e de como o organismo consegue metabolizar a substância, ao final da primeira hora após a ingestão, a concentração de álcool (C) no sangue corresponde a aproximadamente 90% da quantidade (q) de álcool ingerida, e a eliminação total dessa concentração pode demorar até 12 horas.

Disponível em: <http://g1.globo.com>.
Acesso em: 1 dez. 2018 (adaptado).

Nessas condições, ao final da primeira hora após a ingestão da quantidade q de álcool, a concentração C dessa substância no sangue é expressa algebricamente por **alternativa a**

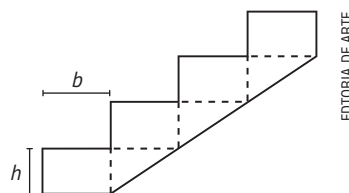
- a) $C = 0,9q$ d) $C = 1 - 0,9q$
b) $C = 0,1q$ e) $C = q - 10$
c) $C = 1 - 0,1q$

3. (Enem/MEC) Uma casa de dois andares está sendo projetada. É necessário incluir no projeto a construção de uma escada para o acesso ao segundo andar. Para o cálculo das dimensões dos degraus utilizam-se as regras:

$$[2h + b - 63,5] \leq 1,5 \text{ e } 16 \leq h < 19,$$

nas quais h é a altura do degrau (denominada espelho) e b é a profundidade da pisada, como mostra a figura. Por conveniência, escolheu-se

a altura do degrau como sendo $h = 16$. As unidades de h e b estão em centímetro.

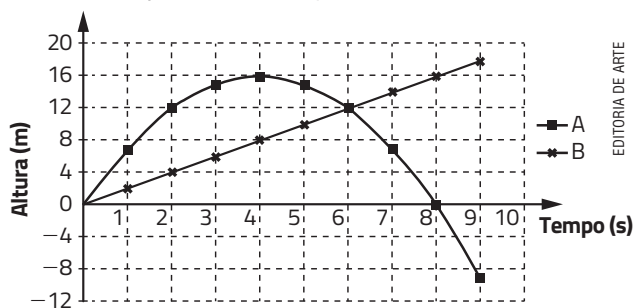


alternativa c

Nesse caso, o mais amplo intervalo numérico ao qual a profundidade da pisada (b) deve pertencer, para que as regras sejam satisfeitas é:

- a) $30 \leq b$ d) $31,5 \leq b \leq 33$
b) $30 \leq b \leq 31,5$ e) $b \leq 33$
c) $30 \leq b \leq 33$

4. (Enem/MEC) Para uma feira de ciências, dois projéteis de foguetes, **A** e **B**, estão sendo construídos para serem lançados. O planejamento é que eles sejam lançados juntos, com o objetivo de o projétil **B** interceptar o **A** quando esse alcançar sua altura máxima. Para que isso aconteça, um dos projéteis descreverá uma trajetória parabólica, enquanto o outro irá descrever uma trajetória supostamente retilínea. O gráfico mostra as alturas alcançadas por esses projéteis em função do tempo, nas simulações realizadas.



Com base nessas simulações, observou-se que a trajetória do projétil **B** deveria ser alterada para que o objetivo fosse alcançado.

Para alcançar o objetivo, o coeficiente angular da reta que representa a trajetória de **B** deverá

- a) diminuir em 2 unidades. **alternativa c**
b) diminuir em 4 unidades.
c) aumentar em 2 unidades.
d) aumentar em 4 unidades.
e) aumentar em 8 unidades.

5. (UECE) Ao representarmos a equação $|x| - |y| = 1$, no plano, com o sistema usual de coordenadas cartesianas, teremos: **alternativa a**

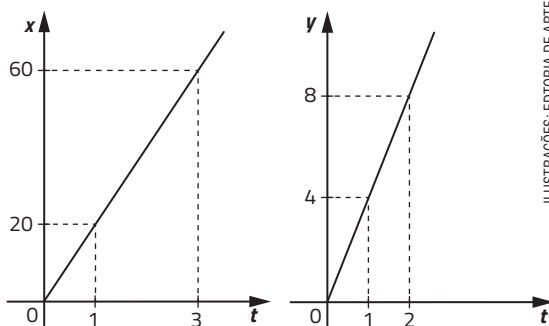
a) quatro semirretas.
b) quatro segmentos de retas.
c) duas retas.
d) duas semirretas.

6. (Enem/MEC) Uma empresa tem diversos funcionários. Um deles é o gerente, que recebe R\$ 1.000,00 por semana. Os outros funcionários são diaristas. Cada um deles trabalha 2 dias por semana, recebendo R\$ 80,00 por dia trabalhado.

Chamando de X a quantidade total de funcionários da empresa, a quantia Y , em reais, que esta empresa gasta semanalmente para pagar seus funcionários é expressa por

a) $Y = 80X + 920$. **alternativa d** $Y = 160X + 840$.
b) $Y = 80X + 1000$. $Y = 160X + 1000$.
c) $Y = 80X + 1080$.

7. (Enem/MEC) A quantidade x de peças, em milhar, produzidas e o faturamento y , em milhar de real, de uma empresa estão representados nos gráficos, ambos em função do número t de horas trabalhadas por seus funcionários.



O número de peças que devem ser produzidas para se obter um faturamento de R\$ 10.000,00 é

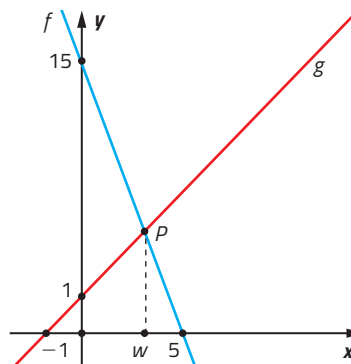
a) 2000. **alternativa d** 50000.
b) 2500. $200\,000$.
c) 40000.

8. (UFMS) O Sr. Flávio é um apaixonado pela mobilidade e deseja pegar um transporte coletivo cuja função de custo é dada pela equação $C(x) = 6,00 + 0,50 \cdot x$, em que x representa a distância percorrida pelo transporte em km e $C(x)$ o valor a ser pago em reais. Esse custo pode sofrer modificação caso a viagem seja alterada. Se a viagem aconteceu conforme o

previsto pelo aplicativo utilizado, e o Sr. Flávio percorreu uma distância de 48 km, o total a ser pago para o motorista é: **alternativa c**

a) R\$ 6,00. **d** R\$ 48,00.
b) R\$ 24,00. **e** R\$ 54,00.
c) R\$ 30,00.

9. (UERJ) Observe o plano cartesiano, no qual estão representadas as funções f e g :



O ponto P de interseção entre os gráficos dessas funções possui abscissa w , cujo valor é:

a) $\frac{5}{2}$ **alternativa c** $\frac{7}{2}$ **d** 4
b) 3

10. (Famerp-SP) Um animal, submetido à ação de uma droga experimental, teve sua massa corporal registrada nos sete primeiros meses de vida. Os sete pontos destacados no gráfico mostram esses registros e a reta indica a tendência de evolução da massa corporal em animais que não tenham sido submetidos à ação da droga experimental. Sabe-se que houve correlação perfeita entre os registros coletados no experimento e a reta apenas no 1º e no 3º mês.



Se a massa registrada no 6º mês do experimento foi 210 gramas inferior à tendência de evolução da massa em animais não submetidos à droga experimental, o valor dessa massa registrada é igual a **alternativa e**

a) 3,47 kg. **d** 3,35 kg.
b) 3,27kg. **e** 3,29 kg.
c) 3,31 kg.

FUNÇÃO QUADRÁTICA

Lançamento oblíquo

Quando um corpo qualquer é arremessado e forma determinado ângulo maior que 0° e menor que 90° , em relação à superfície horizontal, dizemos que ocorreu um **lançamento oblíquo** ou de projétil.

Nesse lançamento, o corpo realiza um movimento composto de forças nas direções horizontal e vertical. Esse movimento é chamado de **trajetória parabólica** pelo seu formato, como estudaremos nesta Unidade. Na direção horizontal, o corpo realiza um movimento uniforme. Na direção vertical, o movimento é uniformemente variado, isto é, o corpo sobe em um lançamento vertical até atingir a altura máxima e, depois, realiza uma queda livre.

Os conceitos que descrevem esse tipo de lançamento são aplicados no treinamento de atletas que praticam modalidades esportivas, como salto em distância, lançamento de dardo e arremesso de peso. Observe, no esquema, algumas informações sobre a modalidade salto em distância.

Salto em distância

O salto em distância é uma das modalidades olímpicas do atletismo; nele, o competidor deve correr por uma pista, saltar e cair com os dois pés dentro de uma caixa de areia. Vence aquele que saltar a maior distância horizontal.

Tábua de impulsão: tábua no mesmo nível do corredor e da superfície da área de queda, na qual o competidor deve pisar e pegar impulso para o salto. Se o competidor pisar fora da tábua, ultrapassando o limite, é marcada uma falta, e o salto é invalidado.

Trajetória: do momento em que salta da tábua de impulsão até aquele em que toca a caixa de areia, o atleta descreve uma trajetória parabólica.

Corredor: local por onde o competidor deve correr, atingindo a maior velocidade possível até a tábua de impulsão. Essa parte da pista tem de 40 m a 45 m de comprimento.

Área de queda: caixa de areia na qual o competidor deve cair. Logo após o salto, é realizada a medição da distância, a partir da borda da tábua de impulsão até a marca da queda na areia.

- Representação esquemática da modalidade esportiva salto em distância (imagem sem escala; cores-fantasia).

Elaborado com base em: HEWITT, Paul G. **Física conceitual**. 11. ed. Porto Alegre: Bookman, 2011. p. 174-179. CONFEDERAÇÃO BRASILEIRA DE ATLETISMO. **Regras de competição:** regras técnicas. [S. l.]: Cbat: WA: Abraat, 2024. p. 122-127. Edição 2024. Disponível em: https://sge.cbat.org.br/_uploads/orgaoAnexo/1u6-h4V4oe9ZzDNu7c37-FHbFK4YVxRIL.pdf. Acesso em: 18 jul. 2024.

Respostas nas Orientações para o professor.

Após ler as informações, converse com os colegas e o professor sobre os itens a seguir.

1. Como pode ser descrita a trajetória realizada por um objeto em um lançamento oblíquo? Você conhece outro exemplo de lançamento oblíquo?
2. De acordo com o texto, os conceitos que descrevem o lançamento oblíquo são aplicados no treinamento de algumas modalidades do atletismo. Por que isso ocorre?
3. Represente, no caderno, a possível trajetória que certo corpo realiza em um lançamento oblíquo. Nessa representação, indique a posição da maior altura atingida e a distância horizontal percorrida.

Não escreva no livro.

A parábola

Na abertura desta Unidade, foram apresentadas algumas informações sobre o lançamento oblíquo. Nesse tipo de lançamento, o objeto descreve uma trajetória parabólica. A parábola é uma curva com formato específico e que, como estudaremos a seguir, está presente em diversos campos da Matemática. Também podemos identificar formatos que lembram parábolas em construções ou objetos.

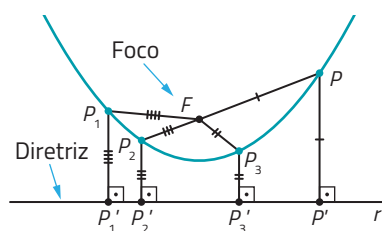


- Sobre a ponte Juscelino Kubitschek, em Brasília (DF), foram construídos três arcos que lembram parábolas. A construção foi inspirada no movimento de uma pedra quicando sobre a água. Fotografia de 2022.

Acompanhe, a seguir, a definição de parábola e alguns de seus elementos.



Uma parábola é o conjunto de todos os pontos de um plano que são **equidistantes** de um ponto F , denominado **foco**, e de uma reta r , denominada **diretriz**, com $F \notin r$.



DICA

Nesta figura, os segmentos de reta com as mesmas marcações têm comprimentos iguais.

• **Equidistantes:** Sendo A e F dois pontos e r uma reta de um mesmo plano, dizemos que A é equidistante de F e de r se a distância de A a F for igual à distância de A a r .

Além do foco F e da reta diretriz r , podemos identificar os seguintes elementos da parábola:

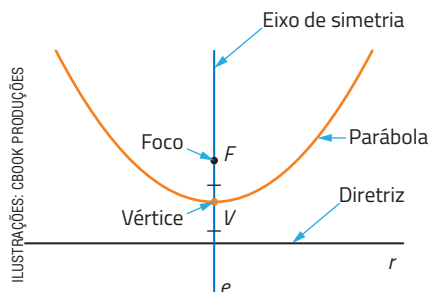
- a reta e , perpendicular à reta diretriz e que passa pelo foco F , é o **eixo de simetria** da parábola;
- o ponto V , interseção da parábola com o eixo e , é o **vértice** da parábola e o ponto da parábola mais próximo da reta diretriz.

Com isso, da definição de parábola, podemos concluir que a distância entre o foco e o vértice é igual à distância entre o vértice e a diretriz.

PARA PENSAR

Pesquisa do estudante.

Além de aplicações na arquitetura e na análise de um lançamento oblíquo, o estudo da parábola é aplicado em outras situações, como na arte, nos faróis de automóveis e holofotes, entre outros. Pesquise uma dessas aplicações e, em uma roda de conversa, compartilhe os resultados de sua pesquisa.

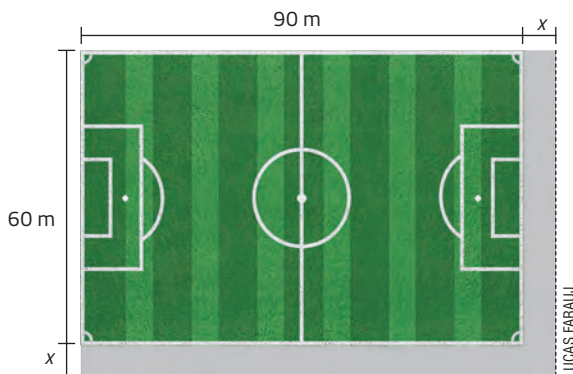


A seguir, estudaremos a função quadrática, cujo gráfico corresponde a uma parábola.

Função quadrática: características e definição

Acompanhe a seguinte situação.

Pretende-se ampliar um campo de futebol que tem 90 metros de comprimento e 60 metros de largura aumentando uma mesma medida x no comprimento e na largura, conforme o esquema a seguir.



PARA PENSAR

Qual é a área desse campo, em metro quadrado, antes da ampliação?
5 400 m²

A área desse campo, após a ampliação das medidas de comprimento e largura em x metro, pode ser expressa por meio de uma função f . Observe como a expressão que representa f pode ser obtida.

Área do campo (m²)

Comprimento do campo (m)

$$f(x) = (90 + x) \cdot (60 + x)$$

Largura do campo (m)

$$f(x) = 90 \cdot 60 + 90x + 60x + x^2 \Rightarrow f(x) = x^2 + 150x + 5400$$

Com essa lei de formação da função, podemos calcular $f(12)$, por exemplo, para determinar a área do campo, caso a ampliação seja de 12 m no comprimento e 12 m na largura. Assim, temos:

$$f(12) = 12^2 + 150 \cdot 12 + 5400 = 144 + 1800 + 5400 = 7344$$

Logo, a área do campo com 102 m de comprimento e 72 m de largura é igual a 7 344 m².

Na situação inicial, é explorada a ideia de função quadrática, por meio da função f dada por $f(x) = x^2 + 150x + 5400$, que expressa a área desse campo após a ampliação.

PARA PENSAR

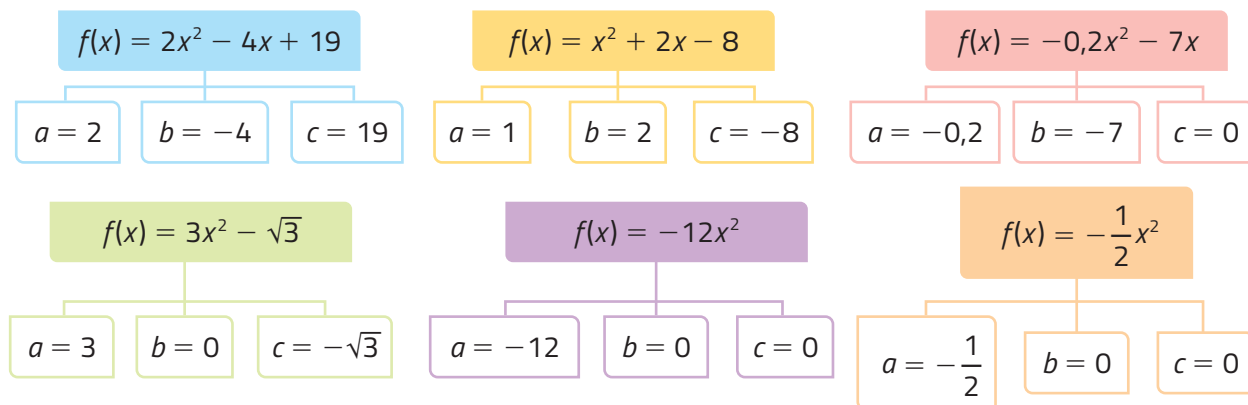
Considerando $x = 30$, qual é a área do campo, em metro quadrado, após a ampliação?

10 800 m²

Denominamos **função quadrática** toda função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, definida pela lei de formação $f(x) = ax^2 + bx + c$, em que a , b e c são números reais com $a \neq 0$.

Dizemos que a , b e c são os **coeficientes** da função quadrática.

Observe alguns exemplos de função quadrática.



ATIVIDADES RESOLVIDAS

R1. Dada a função quadrática $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, definida por $f(x) = -3x^2 + 2x + 9$, resolva os itens a seguir.

a) Identifique os coeficientes a , b e c da função f .

b) Calcule $f(3)$, $f(-5)$, $f\left(\frac{1}{2}\right)$, $f(0,1)$ e $f(0)$.

Resolução

a) $a = -3$, $b = 2$ e $c = 9$

b) $f(3) = -3 \cdot 3^2 + 2 \cdot 3 + 9 = -3 \cdot 9 + 6 + 9 = -27 + 6 + 9 = -12$

$$\bullet f(-5) = -3 \cdot (-5)^2 + 2 \cdot (-5) + 9 = -3 \cdot 25 - 10 + 9 = -75 - 10 + 9 = -76$$

$$\bullet f\left(\frac{1}{2}\right) = -3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right) + 9 = -3 \cdot \frac{1}{4} + 1 + 9 = -\frac{3}{4} + 1 + 9 = \frac{37}{4}$$

$$\bullet f(0,1) = -3 \cdot (0,1)^2 + 2 \cdot 0,1 + 9 = -3 \cdot 0,01 + 0,2 + 9 = -0,03 + 0,2 + 9 = 9,17$$

$$\bullet f(0) = -3 \cdot 0^2 + 2 \cdot 0 + 9 = 0 + 0 + 9 = 9$$

R2. Certa câmara fria tem capacidade para 8 000 L, e sua temperatura interior está programada para variar de -10°C a -2°C . Ao atingir a temperatura máxima, o motor dessa câmara liga automaticamente e permanece assim até que a temperatura interna caia para -10°C , momento em que o motor é desligado. Após o motor ser ligado, a temperatura interna t dessa câmara fria varia de acordo com a função T dada por $T(t) = -\frac{t^2}{8} - 2$, com t em hora. Quantas horas após atingir a temperatura máxima o motor dessa câmara voltará a desligar?

Resolução

Note que, no enunciado desta atividade, há dados que não são essenciais para resolver a questão indicada. Então, vamos selecionar as informações necessárias para determinar depois de quanto tempo o motor da câmara fria voltará a desligar.

• A temperatura mínima dessa câmara é -10°C .

• A lei de formação de T é dada por $T(t) = -\frac{t^2}{8} - 2$.

Com base nessas informações, vamos determinar o valor de t para $T(t) = -10$, que é o momento em que o motor vai desligar, pois a câmara atingiu a temperatura mínima (-10°C). Assim:

$$T(t) = -10 \Rightarrow -\frac{t^2}{8} - 2 = -10 \Rightarrow \frac{t^2}{8} = 8 \Rightarrow t^2 = 64 \Rightarrow \begin{cases} t = \sqrt{64} = 8 \\ \text{ou} \\ t = -\sqrt{64} = -8 \text{ (não convém)} \end{cases}$$

Portanto, o motor dessa câmara voltará a desligar 8 h após atingir a temperatura máxima.

1. a, b, d e e. Todos os itens indicados podem ser descritos pela lei de formação $f(x) = ax^2 + bx + c$, com $a \neq 0$.

ATIVIDADES

Não escreva no livro.

1. Identifique em quais dos itens a seguir a lei de formação corresponde a uma função quadrática $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Justifique sua resposta.

a) $f(x) = x^2 + 9$ d) $f(x) = 7 + 3x - 5x^2$
 b) $f(x) = x(x - 1)$ e) $f(x) = (-x + 1)^2$
 c) $f(x) = x(x - 1) - x^2$ f) $f(x) = 6x + \frac{5}{2}$

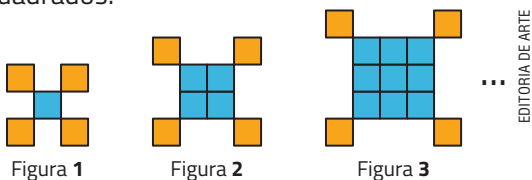
2. Nas funções quadráticas definidas a seguir, identifique os coeficientes a , b e c .

a) $f(x) = -5x^2 + 3x - 9$ $a = -5; b = 3; c = -9$
 b) $f(x) = -0,4 + x^2$ $a = 1; b = 0; c = -0,4$
 c) $f(x) = -\frac{1}{3}x^2 + 4 + \frac{1}{7}x$ $a = -\frac{1}{3}; b = \frac{1}{7}; c = 4$
 d) $f(x) = 3,5x^2$ $a = 3,5; b = 0; c = 0$
 e) $f(x) = 4 + \sqrt{3}x^2$ $a = \sqrt{3}; b = 0; c = 4$
 f) $f(x) = 4(x + 7)^2$ $a = 4; b = 56; c = 196$

3. Dadas as funções quadráticas definidas por $f(x) = x^2 + 5x - 7$ e $g(x) = -2x^2 + 4x + 3$, calcule:

a) $f(2)$; 7 d) $g(-0,3)$; 1,62
 b) $f(-3)$; -13 e) $f(-1) + g(9)$; -134
 c) $g(5)$; -27 f) $3 \cdot f(3) - 2 \cdot g(-1)$; 57

4. Observe a sequência de figuras compostas de quadrados.



- a) Quantos quadrados compõem cada uma dessas três primeiras figuras da sequência?
 b) Qual das fichas a seguir apresenta a lei de formação de uma função que indica a quantidade de quadrados que compõem a figura x , sabendo que x é um número natural positivo? $f(x) = x^2 + 4$

$f(x) = x^2 + 3x + 5$

$f(x) = -3x^2$

$f(x) = x^2 + 4$

$f(x) = x^2 + 3$

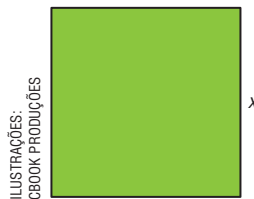
- c) Quantos quadrados compõem a figura 8 dessa sequência? Explique, com suas palavras, como você pensou. 68 quadrados. Resposta pessoal.

4. a) figura 1: 5 quadrados; figura 2: 8 quadrados; figura 3: 13 quadrados

5. b) $f(5) = 25$; $f(3) = 9$. Resposta esperada: Esses cálculos indicam que os quadrados cujos lados medem 5 u.c. e 3 u.c. têm área com medidas de 25 u.a. e 9 u.a., respectivamente.

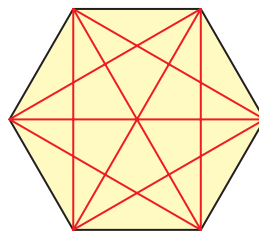
5. c) afirmativa III

5. Observe a figura de um quadrado.



- a) Escreva a lei de formação de uma função f que relacione a área e a medida x do lado desse quadrado. $f(x) = x^2$
 b) Calcule $f(5)$ e $f(3)$. O que esses cálculos indicam?
 c) Qual afirmativa a seguir é correta?
 I) A área dessa figura é diretamente proporcional à medida do lado dela.
 II) A área dessa figura é diretamente proporcional ao dobro da medida do lado dela.
 III) A área dessa figura é diretamente proporcional ao quadrado da medida do lado dela.

6. Podemos calcular a quantidade d de diagonais de um polígono convexo de n lados por meio da função $d(n) = \frac{n(n-3)}{2}$. No caso de um hexágono convexo, por exemplo, temos:



$$d(6) = \frac{6(6-3)}{2} = 9;$$

9 diagonais

- a) Calcule a quantidade de diagonais de um polígono convexo com:
 ■ 7 lados; 14 diagonais
 ■ 14 lados; 77 diagonais
 ■ 18 lados; 135 diagonais
 b) Identifique os valores dos coeficientes da função quadrática d . $a = \frac{1}{2}$; $b = -\frac{3}{2}$; $c = 0$
 c) Agora, com um colega, demonstrem a validade da expressão apresentada para calcular a quantidade de diagonais de um polígono convexo de n lados.
 Resposta nas Orientações para o professor.

8. a) R\$ 320,00; R\$ 720,00

7. Defina uma função quadrática indicando o domínio, o contradomínio e a lei de formação. Depois, destaque os coeficientes a , b e c e calcule o valor numérico dessa função para alguns elementos do domínio. Por fim, troque seus registros com os de um colega para que um verifique se os procedimentos realizados pelo outro estão corretos. *Elaboração do estudante.*

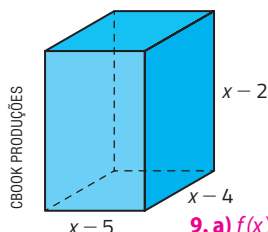
8. Uma cooperativa conta com 25 artesãos e produz bolsas utilizando retalhos de tecidos. Eles trabalham na produção durante cinco dias por semana e, por dois dias, vão à feira vender as bolsas produzidas. Para calcular o custo de produção diário, em reais, a cooperativa utiliza a função $f(x) = 0,2x^2 + 5x + 200$. Nessa função, x é um número natural que representa a quantidade de bolsas produzidas, tal que $10 \leq x \leq 50$.

- a) Qual é o custo diário de produção dessa cooperativa quando são produzidas 15 bolsas? E quando são produzidas 40 bolsas?
- b) Certo dia, nessa cooperativa, foram produzidas 35 bolsas, e todas foram vendidas por um total de R\$ 1.400,00. Qual foi o lucro obtido nessa venda? **R\$ 780,00**

DICA

Para resolver esta atividade, você pode, inicialmente, selecionar apenas os dados necessários indicados no enunciado.

9. Observe o bloco retangular no qual as medidas das arestas, em metro, estão indicadas por expressões algébricas.



9. a) $f(x) = x^2 - 9x + 20$

- a) Determine a lei de formação de uma função f que representa a área da base desse bloco retangular, de acordo com a medida x .
- b) Escreva a lei de formação de uma função g que representa a área total da superfície desse bloco, de acordo com a medida x . $g(x) = 6x^2 - 44x + 76$
- c) Qual é a área da base desse bloco retangular para $x = 10$? E a área total de sua superfície? **30 m²; 236 m²**

10. a) Resposta esperada: Cada número da segunda linha corresponde ao quadrado do respectivo número da primeira linha, multiplicado por 4,9.

10. Leia o texto e, depois, faça o que se pede.

**MATEMÁTICA
NA HISTÓRIA**

O italiano Galileu Galilei (1564-1642) é considerado um dos mais importantes cientistas do século XVII. Dentre suas contribuições, está a relação conhecida como **lei dos corpos em queda**. Ao analisar o movimento de objetos em queda, Galileu concluiu que, desprezando a resistência do ar, a distância percorrida por um objeto em queda livre, abandonado em repouso, é proporcional ao quadrado do tempo de sua queda.

Fonte dos dados: EVES, Howard. **Introdução à história da matemática**. Tradução: Hygino Hugueros Domingues. 4. ed. Campinas: Editora da Unicamp, 2007. p. 354.

BENTINHO

Observe, a seguir, o registro da distância percorrida por um objeto em queda livre, abandonado em repouso, no decorrer do tempo.

Tempo (s)	0	1	2	3	4	...
Distância (m)	0	4,9	19,6	44,1	78,4	...

- a) Que relação é possível identificar entre os números da primeira linha e os números correspondentes da segunda linha desse quadro?

DICA

Para identificar uma regularidade, divida cada número indicado na segunda linha por 4,9 e compare o resultado com o número correspondente da primeira linha.

- b) De acordo com sua resposta ao item a, expresse a distância percorrida por um objeto em queda livre após t segundos de ele ser abandonado em repouso. **$4,9t^2$**
- c) Escreva a lei de formação de uma função f que determina a distância $f(t)$ percorrida por esse objeto, em metro, de acordo com o tempo t de queda, em segundo. Essa função pode ser classificada como função quadrática? **$f(t) = 4,9t^2$; sim**
- d) Calcule a distância percorrida por esse objeto após 10 s em queda livre. **490 m**
- e) De acordo com a situação apresentada, na função f , o tempo t pode assumir qualquer valor real positivo? Justifique. **Não, após determinado tempo, o objeto deixa de estar em queda livre, pois atingirá uma superfície.**

11. b) Com esse aumento, a rampa passa a ter 1,40 m de largura, o que a deixa “admissível” em relação à norma, mas abaixo do recomendado.

11. c) $g(x) = x^2 + 9,9x + 8,1$

11. d) $g(0,6) = 14,4$. Esse resultado indica que, aumentando 0,6 m no comprimento e na largura dessa rampa, sua área será de 14,4 m².

- 11.** Leia uma das normas estabelecidas pela Associação Brasileira de Normas Técnicas (ABNT), para acessibilidade em rampas.

[...] A largura das rampas (L) deve ser estabelecida de acordo com o fluxo de pessoas. A largura livre mínima recomendável para as rampas em rotas acessíveis é de 1,50 m, sendo o mínimo admissível 1,20 m.

ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. **ABNT NBR 9050:** acessibilidade a edificações, mobiliário, espaços e equipamentos urbanos. 4. ed. Rio de Janeiro: ABNT, 2020. p. 58. Disponível em: https://www.causc.gov.br/wp-content/uploads/2020/09/ABNT-NBR-9050-15-Acessibilidade-emenda-1_-03-08-2020.pdf. Acesso em: 8 fev. 2024.



RUBENS CHAVES/PULSAR IMAGENS

- Detalhe da fachada do Museu Histórico de Mato Grosso com rampa de acesso, em Cuiabá (MT). Fotografia de 2014.

Certo escritório tem uma rampa de formato retangular, com 0,90 m de largura e 9 m de comprimento. Em uma reforma, pretende-se adequar essa rampa de acordo com a norma descrita, aumentando sua largura e comprimento em uma mesma medida x , em metro.

- Determine a área atual dessa rampa. **8,1 m²**
 - Caso a medida que se aumentar na largura e no comprimento dessa rampa for de 50 cm, suas medidas estarão de acordo com a norma descrita?
 - Escreva a lei de formação de uma função g que descreva a área da rampa após a reforma, de acordo com a medida x .
 - De acordo com a lei de formação da função g que você escreveu no item **c**, calcule $g(0,6)$ e explique o que o resultado obtido indica.
- e)** Com um colega, pesquisem uma rampa de acesso em algum prédio público do bairro ou do município onde vocês moram. Depois, meçam a largura dela e analisem se ela foi construída de acordo com a norma apresentada. Por fim, registrem essas informações.

Pesquisa do estudante.

- 12.** Leia o texto a seguir e, depois, faça o que se pede.

MATEMÁTICA NA HISTÓRIA

O alemão Johann Friedrich Carl Gauss (1777-1855) é considerado um dos principais matemáticos do século XIX. Conta-se que, quando Gauss tinha por volta de 10 anos, seu professor propôs à turma que adicionasse os números naturais de 1 até 100, ou seja, que calculasse:

$$1 + 2 + 3 + \dots + 98 + 99 + 100$$

Pouco tempo depois, Gauss teria apresentado a resposta correta: 5 050. Acredita-se que ele tenha observado que:

- | | |
|-------------------|-------------------|
| • $1 + 100 = 101$ | • $98 + 3 = 101$ |
| • $2 + 99 = 101$ | • $99 + 2 = 101$ |
| • $3 + 98 = 101$ | • $100 + 1 = 101$ |
| ⋮ | |

ou seja, bastava adicionar o primeiro e o último número dessa sequência de números naturais, multiplicar o resultado pela quantidade de números e dividir esse produto por 2.

$$\frac{(1 + 100) \cdot 100}{2} = \frac{101 \cdot 100}{2} = 5\,050$$

Fonte dos dados: EVES, Howard. **Introdução à história da matemática**. Tradução: Hygino Hugueros Domingues. 4. ed. Campinas: Editora da Unicamp, 2007. p. 519.

- Com suas palavras, explique por que, na suposta estratégia utilizada por Gauss para determinar a soma dos termos da sequência dos 100 primeiros números naturais positivos, dividiu-se por 2 o produto obtido da soma do primeiro e do último termos pela quantidade total de termos.
- De maneira análoga a Gauss, determine a soma dos 20 primeiros números naturais positivos. Depois, confira o resultado obtido em uma calculadora. **210**
- Escreva a lei de formação de uma função s para expressar a soma dos n primeiros números naturais positivos.
- Qual é a soma dos 130 primeiros números naturais positivos? E dos 801 primeiros números naturais positivos? **8 515; 321 201**

12. a) Resposta esperada: Porque, ao adicionar os termos extremos dessa sequência, obtêm-se 100 adições, e cada adição foi contada duas vezes. Assim, é preciso dividir por 2 para obter a soma correta.

12. c) $s(n) = \frac{n(1+n)}{2}$ ou $s(n) = \frac{n^2}{2} + \frac{n}{2}$

Zeros de uma função quadrática

NUTTAPONG PUNNA/SHUTTERSTOCK

MATERIAL PARA DIVULGAÇÃO DA EDITORA FTD
REPRODUÇÃO PROIBIDA



- Médica-veterinária trabalhando em um laboratório.



DICA

Considere que o modelo matemático seja válido para o período da aplicação do medicamento até o momento em que se identificou nula sua concentração na corrente sanguínea do animal.

Leia a situação descrita a seguir.

Para investigar a concentração de um medicamento na corrente sanguínea de determinada espécie animal, uma médica-veterinária realizou coletas do sangue de um animal a cada uma hora e, com os dados obtidos, construiu um modelo matemático representado pela função quadrática c dada por $c(t) = -\frac{1}{5}t^2 + 6t$, em que $y = c(t)$ indica, em miligrama por litro (mg/L), a concentração desse medicamento na corrente sanguínea após t horas da aplicação.

De acordo com o estudo realizado, quanto tempo após a aplicação identificou-se nula a concentração do medicamento na corrente sanguínea desse animal?

Para resolver a situação apresentada, temos de determinar os valores de t para os quais $c(t) = 0$, ou seja, temos de obter os zeros dessa função quadrática.

Dada uma função quadrática $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, definida por $f(x) = ax^2 + bx + c$, temos que $x \in \mathbb{R}$ é **zero da função** f se $ax^2 + bx + c = 0$.

Desse modo, para determinar os zeros da função f dada por $f(x) = ax^2 + bx + c$, é preciso obter as raízes da equação $ax^2 + bx + c = 0$.

Assim, em relação à situação apresentada, temos:

PARA PENSAR

Nesta situação, o que representa $t = 0$?

$$c(t) = 0 \Rightarrow -\frac{1}{5}t^2 + 6t = 0 \Rightarrow t \cdot \left(-\frac{1}{5}t + 6\right) = 0 \Rightarrow \begin{cases} t = 0 \\ \text{ou} \\ -\frac{1}{5}t + 6 = 0 \Rightarrow t = 30 \end{cases}$$

Representa o momento em que o medicamento foi aplicado no animal pela primeira vez.

Portanto, de acordo com o modelo matemático obtido, a concentração do medicamento na corrente sanguínea desse animal ficou novamente nula 30 horas após a primeira aplicação.

NO MUNDO

DO TRABALHO

Médico-veterinário

O trabalho de um médico-veterinário não se restringe apenas à área de saúde e bem-estar de animais em atendimentos em clínicas veterinárias. Esse profissional pode exercer, ainda, diferentes atividades ligadas, por exemplo, a consultoria; pesquisa; controle e diagnóstico de doenças transmissíveis ao ser humano pelo animal; docência; perícia criminal, judicial ou administrativa; produção de alimentos saudáveis; e produção de vacinas e medicamentos de uso animal.

Acesse o vídeo indicado a seguir, que contém informações sobre as áreas de atuação do médico-veterinário.

- DIA do médico-veterinário. [S. l.: s. n.], 2020. 1 vídeo (2 min). Publicado pelo canal TV CRMV-SP. Disponível em: <https://www.youtube.com/watch?v=3LKd0oCsUxc>. Acesso em: 18 jul. 2024.

ATIVIDADES RESOLVIDAS

R3. Em cada item, calcule os zeros da função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, definida por:

a) $f(x) = 5x^2$;

c) $f(x) = x^2 + 4x$;

e) $f(x) = x^2 + 6x + 5$.

b) $f(x) = 2x^2 - 8$;

d) $f(x) = 4x^2 - 20x + 25$;

Resolução

Para resolver esses itens, podemos utilizar técnicas de fatoração de polinômios, assunto que você possivelmente estudou em anos anteriores.

a) $f(x) = 0 \Rightarrow 5x^2 = 0 \Rightarrow x^2 = 0 \Rightarrow x = 0$

Portanto, o zero da função f é 0.

b) $f(x) = 0 \Rightarrow 2x^2 - 8 = 0 \Rightarrow 2x^2 = 8 \Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow \begin{cases} x = \sqrt{4} = 2 \\ \text{ou} \\ x = -\sqrt{4} = -2 \end{cases}$

Portanto, os zeros da função f são 2 e -2.

c) $f(x) = 0 \Rightarrow x^2 + 4x = 0 \Rightarrow x \cdot (x + 4) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ \text{ou} \\ x + 4 = 0 \Rightarrow x = -4 \end{cases}$

Portanto, os zeros da função f são 0 e -4.

d) Fazendo $f(x) = 0$, temos $4x^2 - 20x + 25 = 0$. Como o 1º membro dessa equação corresponde a um trinômio quadrado perfeito, podemos escrevê-lo como um produto notável.

$$4x^2 - 20x + 25 = 0 \Rightarrow (2x)^2 - 2 \cdot 2x \cdot 5 + 5^2 = 0 \Rightarrow (2x - 5)^2 = 0$$

Assim, segue que:

$$(2x - 5)^2 = 0 \Rightarrow 2x - 5 = 0 \Rightarrow x = \frac{5}{2}$$

Portanto, o zero da função f é $\frac{5}{2}$.

e) Fazendo $f(x) = 0$, temos $x^2 + 6x + 5 = 0$. Podemos utilizar o método de completar quadrados para resolver a equação. Para isso, adicionamos 4 em cada membro da equação e obtemos um trinômio quadrado perfeito no 1º membro.

$$x^2 + 6x + 5 + 4 = 0 + 4 \Rightarrow x^2 + 2 \cdot x \cdot 3 + 3^2 = 4 \Rightarrow (x + 3)^2 = 4$$

Assim, segue que:

$$(x + 3)^2 = 4 \Rightarrow \begin{cases} (x + 3) = \sqrt{4} \Rightarrow x + 3 = 2 \Rightarrow x = -1 \\ \text{ou} \\ (x + 3) = -\sqrt{4} \Rightarrow x + 3 = -2 \Rightarrow x = -5 \end{cases}$$

Portanto, os zeros da função f são -1 e -5.

R4. Os zeros da função quadrática $f(x) = x^2 + bx + c$, em que b e c são números reais, são 3 e -5. Quais são os valores dos coeficientes b e c dessa função?

Resolução

Como 3 e -5 são os zeros da função quadrática $f(x) = x^2 + bx + c$, temos $f(3) = 0$ e $f(-5) = 0$.

▪ $f(3) = 0 \Rightarrow 3^2 + b \cdot 3 + c = 0 \Rightarrow 3b + c = -9$

▪ $f(-5) = 0 \Rightarrow (-5)^2 + b \cdot (-5) + c = 0 \Rightarrow -5b + c = -25$

Assim, podemos escrever e resolver, pelo método da adição, o seguinte sistema linear de duas equações do 1º grau com duas incógnitas:

$$\begin{cases} 3b + c = -9 \\ -5b + c = -25 \cdot (-1) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3b + c = -9 \\ 5b - c = 25 \end{cases} +$$

$$8b + 0c = 16 \Rightarrow b = 2$$

Substituindo $b = 2$ em $3b + c = -9$, temos:

$$3 \cdot 2 + c = -9 \Rightarrow c = -15$$

Portanto, $b = 2$ e $c = -15$.

PARA PENSAR

Explique como podemos verificar se estão corretas as respostas dos itens apresentados nesta atividade resolvida.

Resposta esperada:
Verificando, em cada item, se $f(x) = 0$ para cada valor de x obtido como zero da função f .

● A fórmula resolutiva

Além das técnicas de fatoração para resolução de equações do 2º grau abordadas nas atividades resolvidas anteriores, é possível utilizar a **fórmula resolutiva** para resolver esse tipo de equação. Acompanhe a seguir.

MATEMÁTICA NA HISTÓRIA

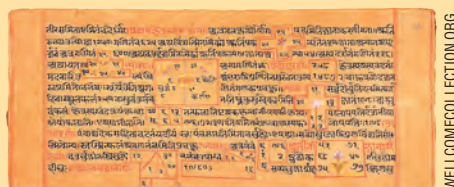
As ideias gerais da fórmula resolutiva foram utilizadas há centenas de anos pelos babilônios e gregos. No entanto, essas ideias foram difundidas com mais expressividade apenas alguns anos depois, sobretudo na obra **Lilavati**, de Bhaskara (c. 1114-1185).

Bhaskara nasceu em Vijayapura (Índia) e tem o seu nome, até os dias de hoje, associado à fórmula resolutiva de uma equação do 2º grau, a qual é comumente denominada **fórmula de Bhaskara**.

Fonte dos dados: BOYER, Carl Benjamin. **História da matemática**.

Tradução: Elza Furtado Gomide. 3. ed. São Paulo: Edgard Blücher, 2010. p. 152.

- LILAVATI. c1150. Manuscrito persa. Universidade de Columbia (EUA). Detalhe de uma das páginas da obra escrita por Bhaskara.



WELLCOMECOLLECTION.ORG

Podemos deduzir a fórmula resolutiva de uma equação do 2º grau na forma $ax^2 + bx + c = 0$, em que a , b , c são números reais e $a \neq 0$. Acompanhe.

$$ax^2 + bx + c = 0$$

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0 \quad \leftarrow \text{Como } a \neq 0, \text{ podemos dividir ambos os membros da equação por } a.$$

$$x^2 + \frac{b}{a}x = -\frac{c}{a} \quad \leftarrow \text{Subtraímos } \frac{c}{a} \text{ de ambos os membros da equação.}$$

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2} = -\frac{c}{a} + \frac{b^2}{4a^2} \quad \leftarrow \begin{array}{l} \text{Utilizamos o método de completar quadrados.} \\ \text{Para isso, adicionamos } \frac{b^2}{4a^2} \text{ a ambos os} \\ \text{membros da equação.} \end{array}$$

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} \quad \leftarrow \text{Escrevemos o primeiro membro da equação como um produto notável.}$$

$$x + \frac{b}{2a} = \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad \leftarrow \text{Calculamos a raiz quadrada de ambos os membros da equação.}$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad \leftarrow \text{Subtraímos } \frac{b}{2a} \text{ de ambos os membros da equação.}$$



DICA

Nesta dedução, para expressar as raízes da equação utilizando o método de completar quadrados, busca-se determinar um trinômio quadrado perfeito no 1º membro da igualdade.

Na fórmula em destaque, denominamos $b^2 - 4ac$ de **discriminante**. A letra maiúscula grega **delta** é comumente utilizada para representar o discriminante. Assim, $\Delta = b^2 - 4ac$.

PARA AMPLIAR

- Assista a este vídeo para saber mais sobre as ideias históricas relacionadas à resolução de equações do 2º grau.
- ESSE tal de Bhaskara. [S. l.: s. n.], 2012. 1 vídeo (12 min). Publicado pelo canal M3 Matemática Multimídia. Disponível em: <https://www.youtube.com/watch?v=pozKHQxvFSo>. Acesso em: 18 jul. 2024.

É possível estudar as raízes reais de uma equação do 2º grau com base no valor do discriminante $\Delta = b^2 - 4ac$. Acompanhe.

$$\text{Se } \Delta > 0, \text{ então } \sqrt{\Delta} \in \mathbb{R}. \text{ Assim: } x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \\ \text{ou} \\ x = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \end{cases}$$

Nesse caso, a equação tem duas raízes reais distintas.

$$\text{Se } \Delta = 0, \text{ então } \sqrt{\Delta} = 0. \text{ Assim: } x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-b \pm 0}{2a} = \frac{-b}{2a}$$

Nesse caso, a equação tem duas raízes reais e iguais.

Se $\Delta < 0$, então $\sqrt{\Delta} \notin \mathbb{R}$.

Nesse caso, a equação não tem raiz real.

Com isso, podemos concluir:

Seja uma função quadrática $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, definida por $f(x) = ax^2 + bx + c$, temos que f :

- tem dois zeros reais distintos quando $b^2 - 4ac > 0$;
- tem dois zeros reais e iguais quando $b^2 - 4ac = 0$;
- não tem zero real quando $b^2 - 4ac < 0$.

Dada uma função quadrática f , elaborar o seguinte algoritmo em etapas para determinar os zeros de f : 1ª) Escrever a equação do 2º grau $f(x) = 0$; 2ª) Identificar os coeficientes a , b e c da equação obtida; 3ª) Calcular o discriminante $\Delta = b^2 - 4ac$; 4ª) Se $\Delta < 0$, a função f não tem zero real; se $\Delta \geq 0$, calcular os zeros da função por meio da fórmula resolvente $x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2 \cdot a}$.
A função g tem dois zeros reais e iguais a $\frac{2}{3}$, e a função h não tem zero real.

ATIVIDADES RESOLVIDAS

R5. Determine os zeros da função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, definida por $f(x) = 4x^2 + 16x - 20$.

Resolução

Para resolver esta questão, podemos elaborar um algoritmo, que consiste em etapas com instruções descritas e ordenadas. Acompanhe.

1ª) Fazemos $f(x) = 0$, obtendo a equação $4x^2 + 16x - 20 = 0$.

2ª) Identificamos os valores dos coeficientes da equação:
 $a = 4$, $b = 16$ e $c = -20$.

3ª) Calculamos o valor do discriminante:
 $\Delta = 16^2 - 4 \cdot 4 \cdot (-20) = 256 + 320 = 576$.

4ª) Utilizamos a fórmula resolvente para obter os zeros da função f .

$$x = \frac{-16 \pm \sqrt{576}}{2 \cdot 4} = \frac{-16 \pm 24}{8} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{-16 + 24}{8} = \frac{8}{8} = 1 \\ \text{ou} \\ x = \frac{-16 - 24}{8} = \frac{-40}{8} = -5 \end{cases}$$

Portanto, f tem dois zeros reais distintos: 1 e -5.

PARA PENSAR

Esse **algoritmo** pode ser adaptado para resolver outras questões com estruturas parecidas. No caderno, ajuste o algoritmo apresentado de maneira que ele possa ser utilizado para determinar os zeros de qualquer função quadrática. Depois, utilize-o para determinar os zeros das funções definidas por $g(x) = 9x^2 - 12x + 4$ e $h(x) = x^2 - 4x + 10$.

- R6.** Dada a função quadrática $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, definida por $f(x) = 3x^2 + 6x + k + 1$, determine para quais valores reais de k é possível afirmar que f :
- a) tem dois zeros reais distintos;
 - b) tem dois zeros reais e iguais;
 - c) não tem zero real.

Resolução

Inicialmente, calculamos o discriminante Δ :

$$\Delta = 6^2 - 4 \cdot 3 \cdot (k + 1) = 36 - 12k - 12 = 24 - 12k$$

- a) Para f ter dois zeros reais distintos, devemos ter $\Delta > 0$:

$$24 - 12k > 0 \Rightarrow -12k > -24 \Rightarrow k < 2$$

Portanto, f terá dois zeros reais distintos se $k < 2$.

- b) Para f ter dois zeros reais e iguais, devemos ter $\Delta = 0$:

$$24 - 12k = 0 \Rightarrow -12k = -24 \Rightarrow k = 2$$

Portanto, f terá dois zeros reais e iguais se $k = 2$.

- c) Para f não ter zero real, devemos ter $\Delta < 0$:

$$24 - 12k < 0 \Rightarrow -12k < -24 \Rightarrow k > 2$$

Portanto, f não terá zero real se $k > 2$.

- R7.** Em uma indústria de cerâmica, o custo c de produção, em reais, de acordo com a quantidade q de vasos produzidos para uma encomenda, pode ser determinado por $c(q) = 0,01q^2 - 2q + 110$. É possível produzir uma encomenda de certa quantidade desse vaso, de maneira que o custo por unidade seja zero?

Resolução

Para que o custo por vaso produzido seja zero, devemos ter:

$$c(q) = 0 \Rightarrow 0,01q^2 - 2q + 110 = 0$$

Calculando o discriminante da equação obtida, temos:

$$\Delta = (-2)^2 - 4 \cdot 0,01 \cdot 110 = 4 - 4,4 = -0,4$$

Como $\Delta < 0$, a equação $0,01q^2 - 2q + 110 = 0$ não tem raiz real.

Portanto, não é possível produzir nessa indústria uma encomenda com certa quantidade de vasos de maneira que o custo por unidade seja zero.

- R8.** Determine os valores inteiros que o número real m pode assumir, de maneira que a função dada por $f(x) = x^2 - 2x + m$ não tenha zero real e a função dada por $g(x) = -mx^2 + 20x - 25$ tenha dois zeros reais distintos.

Resolução

Para que f não tenha zero real, é necessário que:

$$\Delta < 0 \Rightarrow (-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot m < 0 \Rightarrow 4 - 4m < 0 \Rightarrow -4m < -4 \Rightarrow m > 1$$

Para que g tenha dois zeros reais distintos, é necessário que:

$$\Delta > 0 \Rightarrow 20^2 - 4 \cdot (-m) \cdot (-25) > 0 \Rightarrow 400 - 100m > 0 \Rightarrow -100m > -400 \Rightarrow m < 4$$

Para satisfazer ambas as condições, temos $1 < m < 4$.

Portanto, os valores inteiros que o número real m pode assumir são 2 e 3.

ATIVIDADES

Não escreva no livro.

13. Determine os zeros da função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, definida por:

- a) $f(x) = 5x^2 + 3$ *f não tem zero real.*
 b) $f(x) = 8x - 2x^2$ *0 e 4*
 c) $f(x) = x^2 - 10x + 25$ *5*
 d) $f(x) = -2x^2 + 3x - 5$ *f não tem zero real.*
 e) $f(x) = 3x^2 + 8x + 4$ *-2 e -2/3*
 f) $f(x) = -2x^2 + 2x + 24$ *-3 e 4*

14. Retome a atividade 13 e confira as respostas usando uma estratégia diferente da que você usou. Podem ser empregadas técnicas de fatoração ou fórmula resolutive. *Resposta pessoal.*

15. Seja $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função quadrática, definida por $g(x) = (2m - 3)x^2 + 2x + 2$. Calcule para quais valores reais de m a função g :

- a) tem dois zeros reais distintos; $m < \frac{7}{4}$
 b) tem dois zeros reais e iguais; $m = \frac{7}{4}$
 c) não tem zero real. $m > \frac{7}{4}$

16. O gestor de uma microempresa do ramo moveleiro, que produz e vende móveis planejados, elaborou um modelo matemático para descrever o lucro $y = s(x)$, em reais, obtido com a venda de cada unidade de cadeira produzida pela empresa, de acordo com a quantidade x de unidades vendidas na semana. Com base em dados registrados e utilizando um programa de computador, ele concluiu que $s(x) = -0,01x^2 + 1,2x - 11$.

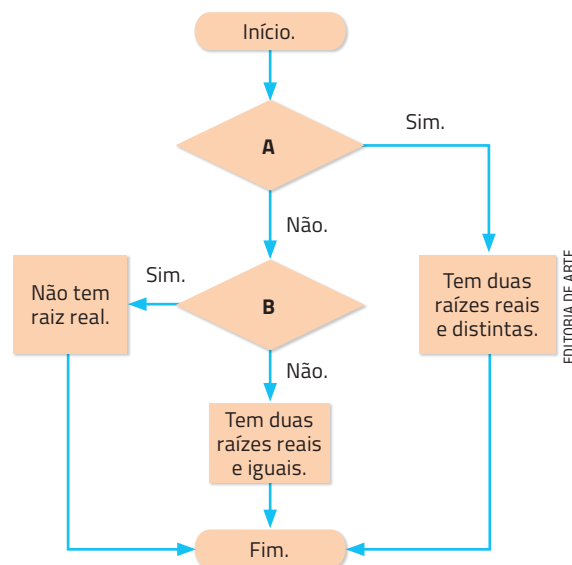
- a) Calcule $s(20)$. O que esse resultado representa?
 b) Ao vender em certa semana 80 cadeiras, quantos reais, ao todo, essa microempresa terá de lucro com esse produto? *R\$ 1.680,00*
 c) Para que o lucro por unidade seja nulo, quantas cadeiras devem ser vendidas em uma semana? *10 cadeiras ou 110 cadeiras*

17. Em uma comunidade foi construída uma cisterna para armazenamento de água da chuva. Em uma visita técnica, foi constatado um vazamento por causa de uma rachadura na estrutura dessa cisterna. Com isso, identificou-se

que a cada hora o volume v de água na cisterna, em metro cúbico, diminuía de acordo com a função v dada por $v(t) = -\frac{1}{12}t^2 + 48$, após t horas do início do vazamento e considerando-a inicialmente cheia.

- a) Qual é a capacidade de armazenamento de água dessa cisterna? *48 metros cúbicos*
 b) Qual é o volume de água da cisterna 6 h após o início do vazamento? *45 metros cúbicos*
 c) Considerando que a cisterna precisa estar completamente vazia para que seja feito o reparo da rachadura, quantas horas após o início do vazamento poderá ser realizado esse reparo? *24 h*

18. O fluxograma a seguir representa um algoritmo que descreve características das raízes de uma equação do 2º grau de acordo com o valor do discriminante Δ . Nele, duas perguntas foram substituídas pelas letras **A** e **B** destacadas.



Associe cada uma das letras **A** e **B** destacadas no fluxograma a uma das questões indicadas a seguir. **A:** $\Delta > 0$? **B:** $\Delta < 0$?

 $\Delta = 0$? $\Delta < 0$? $\Delta > 0$?

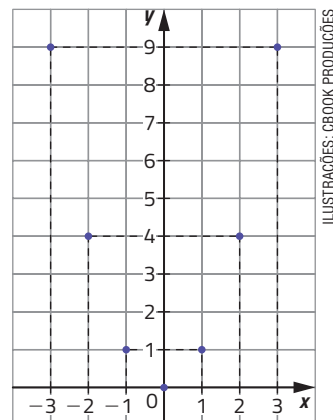
19. Junte-se a um colega e, utilizando a fórmula resolutive, mostrem que, sendo x_1 e x_2 zeros da função quadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$, temos que $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$ e $x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$. *Resposta nas Orientações para o professor.*

16. a) $s(20) = 9$. Representa que, se forem vendidas 20 cadeiras na semana, a microempresa terá um lucro de R\$ 9,00 por cadeira.

Gráfico de uma função quadrática

Para esboçar o gráfico da função quadrática $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, definida por $f(x) = x^2$, podemos atribuir alguns valores arbitrários para x , obter pares ordenados (x, y) e representá-los no plano cartesiano. Acompanhe.

x	$f(x) = x^2$	(x, y)
-3	$f(-3) = (-3)^2 = 9$	$(-3, 9)$
-2	$f(-2) = (-2)^2 = 4$	$(-2, 4)$
-1	$f(-1) = (-1)^2 = 1$	$(-1, 1)$
0	$f(0) = 0^2 = 0$	$(0, 0)$
1	$f(1) = 1^2 = 1$	$(1, 1)$
2	$f(2) = 2^2 = 4$	$(2, 4)$
3	$f(3) = 3^2 = 9$	$(3, 9)$

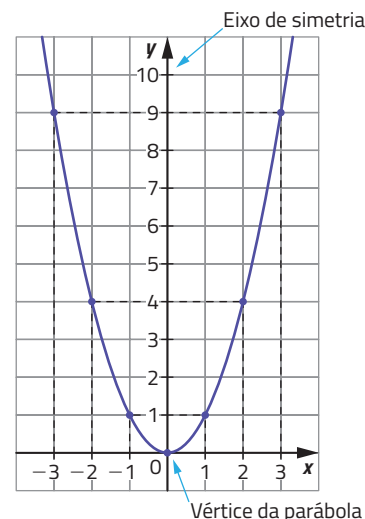


ILUSTRAÇÕES: CBOOK PRODUÇÕES

Como $D(f) = \mathbb{R}$, é possível obter, por meio da lei de formação, infinitos pares ordenados (x, y) correspondentes a pontos do gráfico de f . Esse gráfico corresponde a uma parábola. Observe o gráfico de f , em que foi destacado o eixo de simetria da parábola, que a intersecta em um único ponto, denominado vértice da parábola.

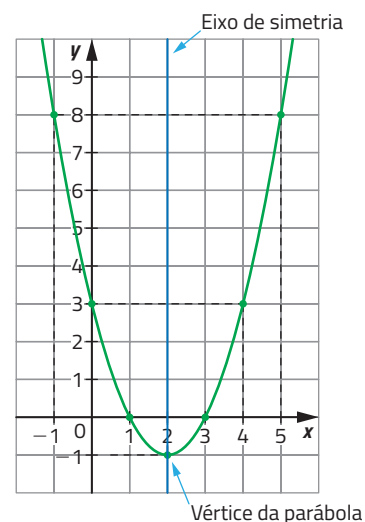
DICA
É possível demonstrar que o gráfico de qualquer função quadrática $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é uma parábola.

Para quaisquer dois pontos simétricos do gráfico de uma função quadrática $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, têm-se que esses pontos têm a mesma ordenada.



Agora, observe o esboço do gráfico da função $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, definida por $g(x) = x^2 - 4x + 3$.

x	$g(x) = x^2 - 4x + 3$	(x, y)
-1	$g(-1) = (-1)^2 - 4 \cdot (-1) + 3 = 8$	$(-1, 8)$
0	$g(0) = 0^2 - 4 \cdot 0 + 3 = 3$	$(0, 3)$
1	$g(1) = 1^2 - 4 \cdot 1 + 3 = 0$	$(1, 0)$
2	$g(2) = 2^2 - 4 \cdot 2 + 3 = -1$	$(2, -1)$
3	$g(3) = 3^2 - 4 \cdot 3 + 3 = 0$	$(3, 0)$
4	$g(4) = 4^2 - 4 \cdot 4 + 3 = 3$	$(4, 3)$
5	$g(5) = 5^2 - 4 \cdot 5 + 3 = 8$	$(5, 8)$



• Interseção do gráfico de uma função quadrática com os eixos cartesianos

Para esboçar o gráfico de uma função quadrática $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, definida por $f(x) = ax^2 + bx + c$, podemos determinar seus pontos de interseção com os eixos cartesianos.

Os pontos de interseção do gráfico de f com o eixo x , quando existem, são aqueles de coordenadas $(x, 0)$. Assim, a abscissa x de cada um desses pontos corresponde a um zero real da função, pois é obtida quando $f(x) = 0$.

O ponto de interseção do gráfico de f com o eixo y é aquele de coordenadas $(0, y)$. Assim, a ordenada y desse ponto corresponde a $y = f(0)$.

Como $f(0) = a \cdot 0^2 + b \cdot 0 + c \Rightarrow f(0) = c$, então $y = c$.

Portanto, o gráfico de f intersecta o eixo y no ponto de coordenadas $(0, c)$.

ATIVIDADES RESOLVIDAS

R9. Determine a lei de formação da função quadrática $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ cujo gráfico está representado na figura.

Resolução

Temos que a função f é definida por $f(x) = ax^2 + bx + c$.

Como o gráfico intersecta o eixo y no ponto de coordenadas $(0, 6)$, segue que $c = 6$.

Já o eixo x é intersectado pelo gráfico nos pontos de coordenadas $(4, 0)$ e $(12, 0)$, ou seja, 4 e 12 são os zeros de f . Assim:

- $f(4) = 0 \Rightarrow a \cdot 4^2 + b \cdot 4 + 6 = 0 \Rightarrow 16a + 4b + 6 = 0$
- $f(12) = 0 \Rightarrow a \cdot 12^2 + b \cdot 12 + 6 = 0 \Rightarrow 144a + 12b + 6 = 0$

Para obter os valores de a e b , resolvemos o seguinte sistema de equações:

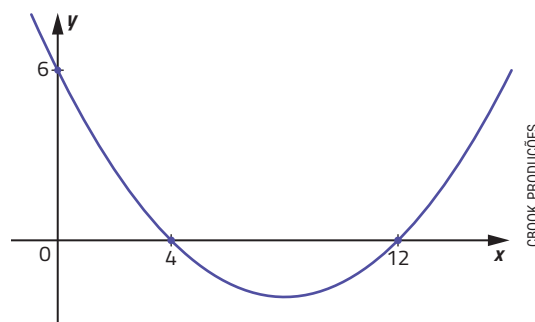
$$\begin{cases} 16a + 4b + 6 = 0 & \cdot (-3) \\ 144a + 12b + 6 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -48a - 12b - 18 = 0 \\ 144a + 12b + 6 = 0 \end{cases} +$$

$$96a + 0b - 12 = 0 \Rightarrow a = \frac{1}{8}$$

Substituindo $a = \frac{1}{8}$ na primeira equação desse sistema, temos:

$$16 \cdot \frac{1}{8} + 4b + 6 = 0 \Rightarrow 2 + 4b + 6 = 0 \Rightarrow 4b = -8 \Rightarrow b = -2.$$

Logo, $f(x) = \frac{x^2}{8} - 2x + 6$.



CBOOK PRODUÇÕES

R10. Determine as coordenadas dos pontos de interseção entre os eixos cartesianos e o gráfico da função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, definida por:

a) $f(x) = \frac{x^2}{4} - 1$;

b) $f(x) = -x^2 + 4x - 4$;

c) $f(x) = -x^2 - 2x + 3$;

d) $f(x) = 3x^2 - 7x + 6$.

Resolução

a) Interseção com o eixo x :

$$f(x) = 0 \Rightarrow \frac{x^2}{4} - 1 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow \begin{cases} x = \sqrt{4} = 2 \\ \text{ou} \\ x = -\sqrt{4} = -2 \end{cases}$$

Interseção com o eixo y :

$$f(0) = \frac{0^2}{4} - 1 = -1$$

Portanto, o gráfico de f intersecta o eixo x nos pontos de coordenadas $(-2, 0)$ e $(2, 0)$ e o eixo y no ponto de coordenadas $(0, -1)$.

b) Interseção com o eixo x :

$$f(x) = 0 \Rightarrow -x^2 + 4x - 4 = 0$$

$$a = -1; b = 4; c = -4$$

$$\Delta = 4^2 - 4 \cdot (-1) \cdot (-4) = 0$$

$$x = \frac{-4 \pm \sqrt{0}}{2 \cdot (-1)} = \frac{-4}{-2} = 2$$

Interseção com o eixo y :

$$f(0) = -0^2 + 4 \cdot 0 - 4 = -4$$

Portanto, o gráfico de f intersecta o eixo x apenas no ponto de coordenadas $(2, 0)$ e o eixo y no ponto de coordenadas $(0, -4)$.

c) Interseção com o eixo x :

$$f(x) = 0 \Rightarrow -x^2 - 2x + 3 = 0$$

$$a = -1; b = -2; c = 3$$

$$\Delta = (-2)^2 - 4 \cdot (-1) \cdot 3 = 16$$

$$x = \frac{-(-2) \pm \sqrt{16}}{2 \cdot (-1)} = \frac{2 \pm 4}{-2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = \frac{2 + 4}{-2} = -3 \\ \text{ou} \\ x = \frac{2 - 4}{-2} = 1 \end{cases}$$

Interseção com o eixo y :

$$f(0) = -0^2 - 2 \cdot 0 + 3 = 3$$

Portanto, o gráfico de f intersecta o eixo x nos pontos de coordenadas $(-3, 0)$ e $(1, 0)$ e o eixo y no ponto de coordenadas $(0, 3)$.

d) Interseção com o eixo x :

$$f(x) = 0 \Rightarrow 3x^2 - 7x + 6 = 0$$

$$a = 3; b = -7; c = 6$$

$$\Delta = (-7)^2 - 4 \cdot 3 \cdot 6 = -23$$

Como $\Delta < 0$, a equação $f(x) = 0$ não tem raiz real.

Interseção com o eixo y :

$$f(0) = 3 \cdot 0^2 - 7 \cdot 0 + 6 = 6$$

Portanto, o gráfico de f intersecta o eixo y no ponto de coordenadas $(0, 6)$ e não intersecta o eixo x .

R11. Analise a atividade resolvida **R10** e explique em quais casos o gráfico de uma função quadrática $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, definida por $f(x) = ax^2 + bx + c$:

a) intersecta o eixo x em dois pontos distintos;

b) intersecta o eixo x em um único ponto;

c) não intersecta o eixo x .

Resolução

Ao reconhecer padrões entre a quantidade de raízes reais distintas de uma função ou o valor do discriminante e a quantidade de vezes que o gráfico dessa função intersecta o eixo x , é possível propor a seguinte generalização.

a) O gráfico de f intersecta o eixo x em dois pontos distintos quando $ax^2 + bx + c = 0$ tem duas raízes reais distintas, ou seja, quando $\Delta > 0$.

b) O gráfico de f intersecta o eixo x em um único ponto quando $ax^2 + bx + c = 0$ tem duas raízes reais e iguais, ou seja, quando $\Delta = 0$.

c) O gráfico de f não intersecta o eixo x quando $ax^2 + bx + c = 0$ não tem raiz real, ou seja, quando $\Delta < 0$. Nesse caso, o gráfico fica todo acima ou todo abaixo do eixo x .

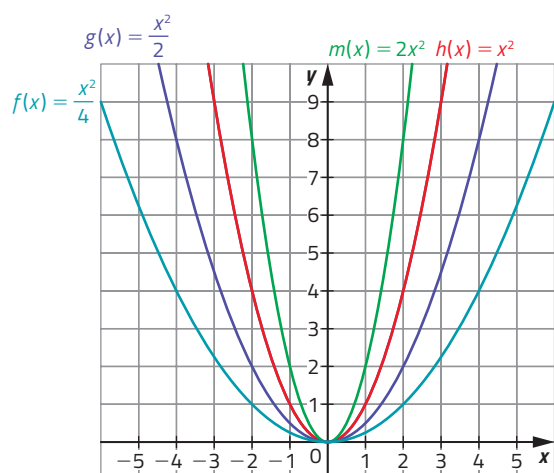
● A parábola e os coeficientes de uma função quadrática

Estudaremos, agora, relações entre os coeficientes de uma função quadrática $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, definida por $f(x) = ax^2 + bx + c$, e a parábola correspondente ao seu gráfico.

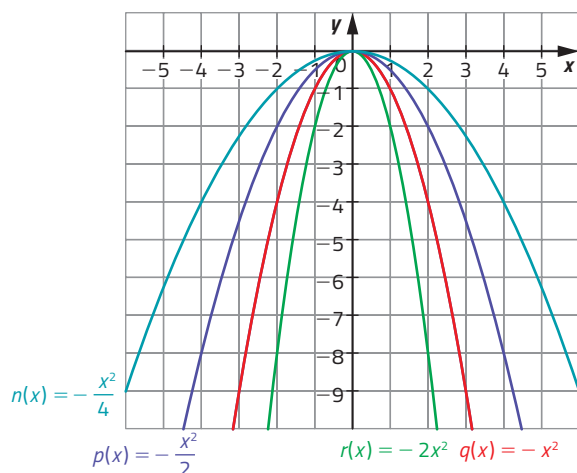
Coeficiente a

Observe a representação do gráfico de diversas funções quadráticas definidas por $y = ax^2 + bx + c$ alterando apenas o valor do coeficiente a .

Para $a > 0$



Para $a < 0$



ILUSTRAÇÕES: CBOOK PRODUÇÕES

PARA PENSAR

Note que, no par de funções $f(x) = \frac{x^2}{4}$ e $n(x) = -\frac{x^2}{4}$, os valores absolutos do coeficiente a são iguais, ou seja, $\left|\frac{1}{4}\right| = \left|-\frac{1}{4}\right| = \frac{1}{4}$. Identifique, entre as funções apresentadas, outros pares de funções cujos valores absolutos do coeficiente a sejam iguais. Depois, analise e responda: o que você pode observar nos gráficos desses pares de funções, com relação à abertura das parábolas? Observando as parábolas de cada plano cartesiano, o que elas têm em comum?

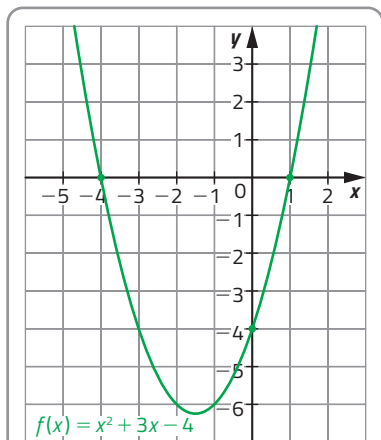
g e p, h e q, m e r. Resposta esperada: As parábolas têm a mesma abertura. Resposta esperada: Todas as parábolas do plano cartesiano da esquerda têm a concavidade voltada para cima, e todas as parábolas do plano cartesiano da direita têm a concavidade voltada para baixo.

Dada uma função quadrática $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, definida por $f(x) = ax^2 + bx + c$, temos que:

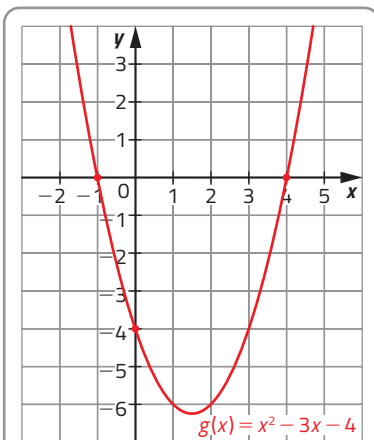
- a **concavidade da parábola** correspondente ao gráfico de f é voltada para cima, se $a > 0$, e para baixo, se $a < 0$.
- quanto maior é o valor absoluto do coeficiente a , menor é a **abertura da parábola** correspondente.

Coeficientes b e c

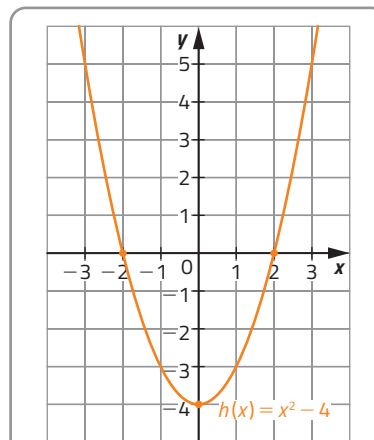
Observe, a seguir, os gráficos das funções quadráticas f , g e h .



Temos que $b > 0$ e $c = -4$. Nesse caso, a parábola intersecta o eixo y no ramo crescente, no ponto de ordenada -4 .



Temos que $b < 0$ e $c = -4$. Nesse caso, a parábola intersecta o eixo y no ramo decrescente, no ponto de ordenada -4 .



Temos que $b = 0$ e $c = -4$. Nesse caso, a parábola intersecta o eixo y em seu vértice, no ponto de ordenada -4 .

ILUSTRAÇÕES: CBOOK PRODUÇÕES

O ramo crescente e o ramo decrescente se referem às partes do gráfico cujos pontos da função quadrática correspondem aos intervalos do domínio em que essa função é crescente ou decrescente, respectivamente.

PARA PENSAR

No gráfico de uma função quadrática, em que $a > 0$, o ramo crescente é localizado à esquerda ou à direita do vértice da parábola correspondente a esse gráfico? Explique como você pensou para responder a essa questão.

À direita. Resposta esperada: Analisando a concavidade da parábola no caso de $a > 0$.

A parábola correspondente ao gráfico de uma função quadrática $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, definida por $f(x) = ax^2 + bx + c$, intersecta o eixo y no ponto de ordenada c e:

- no ramo crescente, quando $b > 0$;
- no ramo decrescente, quando $b < 0$;
- em seu vértice, quando $b = 0$.

ATIVIDADES

Não escreva no livro.

20. Esboce o gráfico da função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, definida por: Respostas nas Orientações para o professor.

- $f(x) = x^2 - 5$;
- $f(x) = -2x^2 + 4x + 1$;
- $f(x) = \frac{x^2}{2} - 2x + 3$;
- $f(x) = -x^2 - 6x - 2$.

21. a) eixo x : $(-\frac{3}{2}, 0)$ e $(2, 0)$; eixo y : $(0, -12)$

21. b) eixo x : $(-1, 0)$ e $(\frac{7}{3}, 0)$; eixo y : $(0, 7)$

21. Determine as coordenadas dos pontos do gráfico da função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, definida em cada item a seguir, que intersectam os eixos cartesianos.

a) $f(x) = 4x^2 - 2x - 12$

b) $f(x) = -3x^2 + 4x + 7$

c) $f(x) = \frac{x^2}{5} - 3x + 10$

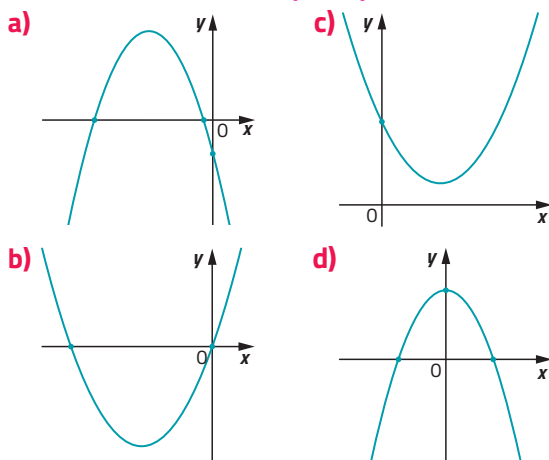
d) $f(x) = -2x^2 + 8x - 8$

21. c) eixo x : $(5, 0)$ e $(10, 0)$; eixo y : $(0, 10)$

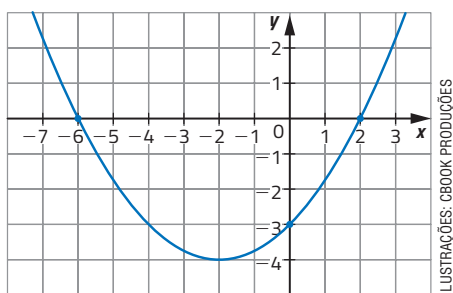
21. d) eixo x : $(2, 0)$; eixo y : $(0, -8)$

23. $f(x) = \frac{x^2}{4} + x - 3$. Elaboração do estudante.

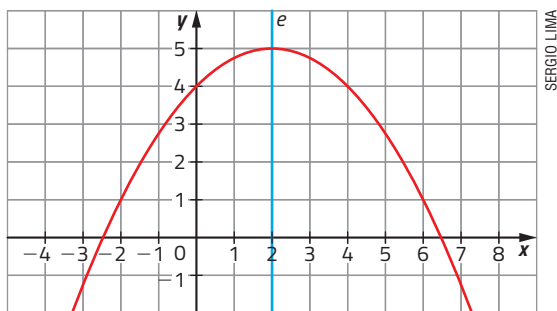
22. Os gráficos a seguir representam funções quadráticas $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, definidas por $f(x) = ax^2 + bx + c$. Em cada item, identifique se os coeficientes a , b e c são: maiores, menores ou iguais a zero. Justifique as respostas. **Respostas nas Orientações para o professor.**



23. Determine a lei de formação da função quadrática $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ representada pelo gráfico a seguir e explique o procedimento que você usou.



24. Observe, a seguir, o gráfico da função quadrática $f(x) = -\frac{x^2}{4} + x + 4$ com eixo de simetria e .



- a) Com base nesse gráfico, escreva as coordenadas do vértice V e de dois pares de pontos simétricos em relação ao eixo de simetria e .
b) Que padrão você pode observar em relação às abscissas de quaisquer dois pontos simétricos que você indicou no item a e a abscissa do vértice da parábola?

24. a) $V(2, 5)$; Respostas possíveis: $(0, 4)$ e $(4, 4)$; $(-2, 1)$ e $(6, 1)$.

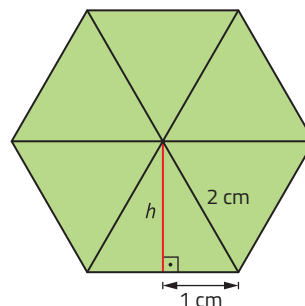
24. b) Resposta esperada: Quando dois pontos quaisquer do gráfico de uma função quadrática são simétricos em relação ao eixo de simetria, a média aritmética das abscissas desses pontos corresponde à abscissa do vértice da parábola.

25. a) Resposta nas **Orientações para o professor.**

25. d) f : função afim e função linear; g : função quadrática

25. g) Resposta nas **Orientações para o professor.**

25. Para calcular a área de um polígono regular, podemos decompô-lo em triângulos congruentes e determinar a área de cada um deles. Observe, por exemplo, o cálculo da área A de um hexágono regular de lados medindo 2 cm.



$$2^2 = 1^2 + h^2 \Rightarrow h = \sqrt{3}$$

$$A = 6 \cdot \left(\frac{2 \cdot \sqrt{3}}{2} \right) = 6\sqrt{3} \rightarrow 6\sqrt{3} \text{ cm}^2$$

Agora, considerando um hexágono regular de lados medindo x centímetros, com $x > 0$, resolva os itens a seguir.

- a) Justifique os cálculos realizados no exemplo em que foi determinada a área do hexágono regular de lado medindo 2 cm.
b) Escreva a lei de formação de uma função f para expressar o perímetro desse hexágono regular de acordo com a medida x . $f(x) = 6x$
c) Escreva a lei de formação de uma função g para expressar a área desse hexágono regular de acordo com a medida x . $g(x) = \frac{3\sqrt{3}}{2}x^2$
d) Classifique f e g em: função afim, função linear, função modular ou função quadrática.
e) Quais são o perímetro e a área de um hexágono com 4 cm de lado? E com 8 cm de lado?
f) Em um mesmo plano cartesiano, represente os gráficos de f e g . Você pode esboçar esses gráficos em uma malha quadriculada ou utilizando um programa de computador.
g) Leia as afirmativas verdadeiras a seguir e justifique a validade delas.

I) O perímetro de um hexágono regular é diretamente proporcional à medida de seu lado.

II) A área de um hexágono regular é diretamente proporcional ao quadrado da medida de seu lado.

25. e) Perímetro: 24 cm; área: $24\sqrt{3} \text{ cm}^2$.
Perímetro: 48 cm; área: $96\sqrt{3} \text{ cm}^2$.

25. f) Resposta nas **Orientações para o professor.**

26. c) $f: a > 0, b = 0 \text{ e } c = 0$; $g: a < 0, b = 0 \text{ e } c = 0$; $h: a > 0, b = 0 \text{ e } c = 0$

27. Resposta esperada: $f(x) = ax^2 + bx + c$, com $a < 0$ e $b < 0$ e c um número real qualquer. Respostas possíveis:

$f(x) = -2x^2 - 3x$; $f(x) = -x^2 - x + 3$.

26. A seguir, estão relacionadas as coordenadas de alguns pontos dos gráficos das funções quadráticas f , g e h .

x	$y = f(x)$	x	$y = g(x)$	x	$y = h(x)$
-2	A	-2	-8	-2	2
-1	1	-1	-2	-1	C
0	0	0	0	0	0
1	1	1	B	1	$\frac{1}{2}$
2	4	2	-8	2	2

Agora, com um colega, resolvam os itens a seguir.

26. b) Resposta nas **Orientações para o professor**.

- Determinem os valores correspondentes às letras A, B e C. A: 4; B: -2; C: $\frac{1}{2}$
- Utilizando um plano cartesiano para cada função, representem os gráficos de f , g e h .
- Os coeficientes de cada função são maiores, menores ou iguais a zero?
- Escrevam a lei de formação das funções f , g e h . Em seguida, descrevam o que elas têm em comum.

27. Escreva a lei de formação de uma função quadrática f cujo gráfico corresponda a uma parábola com concavidade voltada para baixo e que intersecta o eixo das ordenadas no seu ramo decrescente.

28. Atualmente, existem diferentes robôs que podem ser utilizados em treinamentos de diversas modalidades esportivas. Por exemplo, robôs lançadores de bolas de tênis, que possibilitam ao atleta



► Máquina lançadora de bolas de tênis.

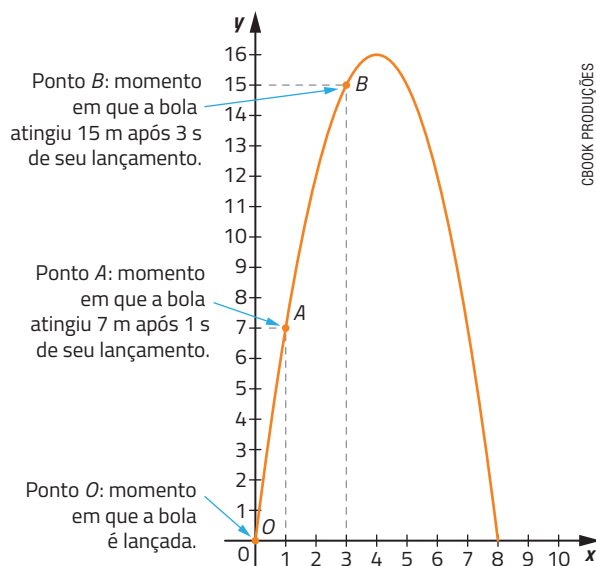
Em um experimento ao ar livre, utilizando um robô instalado em um piso plano, uma bola de tênis foi lançada do chão de maneira que sua trajetória pode ser descrita pela função $f: [0, 8] \rightarrow \mathbb{R}$, definida por $f(x) = -x^2 + 8x$, em que $y = f(x)$ corresponde à altura dessa bola, em metro, após x segundos do momento em que ela foi lançada.

26. d) $f(x) = x^2$; $g(x) = -2x^2$; $h(x) = \frac{x^2}{2}$. Resposta esperada: As três funções quadráticas

são definidas por uma lei de formação do tipo $y = ax^2$, com $a \neq 0$, e o vértice da parábola correspondente ao gráfico de cada uma delas coincide com a origem O dos eixos cartesianos.

28. 5; Resposta esperada: Esse resultado indica que, no intervalo de tempo de 0 s até 3 s após o momento em que a bola foi lançada, sua altura variou, em média, 5 m a cada segundo.

Acompanhe, a seguir, o gráfico dessa função, com alguns pontos destacados.



Para analisar quanto variou, em média, a altura da bola durante parte dessa trajetória, podemos calcular a taxa de variação média de f para x variando de x_1 até x_2 , com $x_1 \neq x_2$, dada por $\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$. Por exemplo, a taxa de variação média de f no intervalo de tempo de 1 s até 3 s é dada por:

$$\frac{f(3) - f(1)}{3 - 1} = \frac{15 - 7}{2} = 4$$

Portanto, podemos dizer que, no intervalo de tempo de 1 s até 3 s após o momento em que a bola foi lançada, sua altura variou, em média, 4 m a cada segundo.

Agora, calcule a taxa de variação média dessa função para x variando de $x_1 = 0$ até $x_2 = 3$. Depois, interprete esse resultado de acordo com o contexto apresentado.

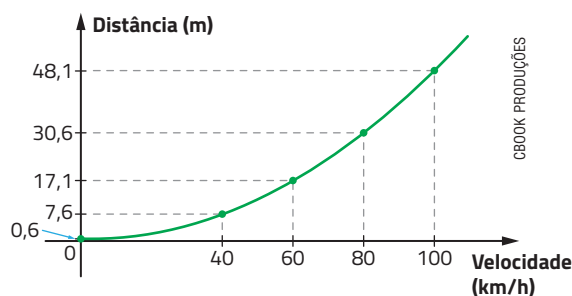
29. Determine a taxa de variação média da função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ em cada caso a seguir.

- $f(x) = 3x^2 + 2x$, para x variando de -4 até 1. -7
- $f(x) = -x^2 - 8x + 5$, para x variando de -3 até 4. -9
- $f(x) = -5x^2 + x - 4$, para x variando de -6 até 0. 31
- $f(x) = \frac{x^2}{6} + 3x + 1$, para x variando de 2 até 10. 5

30. a) Resposta esperada: Maior chance, pois o uso do celular é uma distração para o condutor. • Resposta esperada: Redução do tempo de reação (para realizar uma frenagem ou mesmo para perceber e respeitar os sinais de trânsito), dificuldade de manter corretamente o carro na pista e de manter uma distância segura do veículo da frente.

30. f) Não, pois, de acordo com o modelo matemático, a distância de frenagem será de 11,85 m, ou seja, maior que a distância do automóvel até o obstáculo.

30. Você sabe o que é a distância de frenagem de um automóvel? É a distância que ele percorre do momento em que o motorista pisa no freio até o momento em que o veículo para completamente. Considere que a distância de frenagem d , em metro, de certo automóvel em relação à velocidade v , em quilometro por hora, pode ser modelada de acordo com a função quadrática representada no gráfico a seguir.



- a)** Com base em seus conhecimentos sobre o trânsito, responda aos itens a seguir.
- O motorista que dirige utilizando o celular tem maior ou menor chance de se envolver em um acidente? Justifique.
 - Quais são as consequências do uso do celular ao dirigir?
- b)** Explique o que o ponto de coordenadas (40; 7,6) do gráfico indica em relação à situação apresentada.
- c)** Qual é a distância de frenagem desse automóvel a uma velocidade de 60 km/h? **17,1 m**
- d)** Determine a velocidade desse automóvel para que a distância de frenagem seja igual a 48,1 m. **100 km/h**
- 30. e)** $d(v) = \frac{v^2}{200} - \frac{v}{40} + \frac{3}{5}$
- e)** Escreva a lei de formação da função que relaciona a distância de frenagem d , em metro, percorrida por esse automóvel de acordo com a velocidade v , em quilometro por hora, no momento da frenagem.
- f)** Considere que esse automóvel esteja trafegando a uma velocidade de 50 km/h. O motorista, ao observar um obstáculo à sua frente, aciona o freio quando está a 8 m desse obstáculo e se mantém em linha reta. O motorista vai conseguir evitar a colisão com o obstáculo? Justifique.

31. Observe, a seguir, as recomendações de certo fabricante de aparelhos de ar-condicionado no que se refere à relação entre a medida do lado de uma região quadrada e a quantidade mínima de BTUs (sigla em inglês cujo significado é "Unidade Térmica Britânica") de um ar-condicionado. Nesse caso, está sendo desconsiderada a existência de aparelhos elétricos e de pessoas na região.

Medida do lado (m)	1	2	3	4	5
Quantidade de BTUs	600	2 400	5 400	9 600	15 000

- a)** Em um plano cartesiano, represente a relação indicada. **Resposta nas Orientações para o professor.**
- b)** Divida cada número da segunda linha do quadro por 600 e compare o resultado obtido com o número correspondente da primeira linha. Que relação é possível identificar entre os números da primeira linha e os números correspondentes da segunda linha desse quadro?
- c)** Com base na sua resposta ao item **b**, expresse a quantidade de BTUs de acordo com a medida ℓ do lado de uma região quadrada, em metro. **$600\ell^2$**
- d)** Escreva a lei de formação de uma função que relaciona a quantidade q de BTUs do ar-condicionado à medida do lado ℓ de uma região quadrada, em metro, com $\ell > 0$. Essa função pode ser classificada como função quadrática? **$q(\ell) = 600\ell^2$; sim**
- e)** Calcule quantos BTUs, no mínimo, esse fabricante recomendaria para uma região quadrada cuja medida do lado é igual a:
- 2,5 m; **3 750 BTUs**
 - 6 m; **21 600 BTUs**
 - 10 m. **60 000 BTUs**
- f)** Para utilizar um ar-condicionado de 48 600 BTUs, é necessário que a região quadrada tenha quantos metros de lado, no máximo? **9 m**

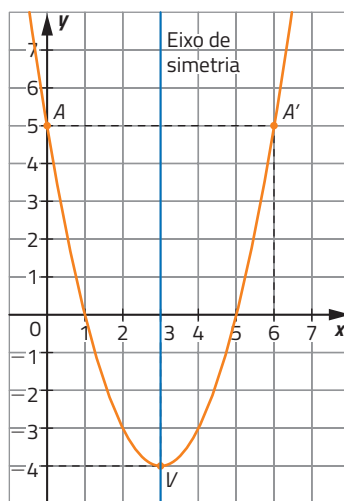
30. b) Resposta esperada: Indica que, ao pisar no freio desse automóvel, quando ele está a uma velocidade de 40 km/h, o veículo percorre uma distância de 7,6 m antes de parar.

31. b) $600 : 600 = 1$ e $1 = 1^2$; $2\,400 : 600 = 4$ e $4 = 2^2$; $5\,400 : 600 = 9$ e $9 = 3^2$; $9\,600 : 600 = 16$ e $16 = 4^2$; $15\,000 : 600 = 25$ e $25 = 5^2$. Resposta esperada: Cada número da segunda linha corresponde ao quadrado do respectivo número da primeira linha, multiplicado por 600.

● Vértice da parábola

Estudamos que o eixo de simetria de uma parábola a intersecta em um único ponto, denominado **vértice da parábola**. Agora, vamos estudar como obter as coordenadas desse ponto.

Considere, por exemplo, a função quadrática $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, definida por $f(x) = x^2 - 6x + 5$, cujo gráfico está representado a seguir. Note que os pontos $A(0, 5)$ e $A'(6, 5)$ são pontos da parábola que têm ordenadas iguais e, portanto, são simétricos em relação ao eixo de simetria da parábola.



Ao calcularmos a média aritmética das abscissas dos pontos A e A' , obtemos a abscissa do vértice da parábola. Acompanhe.

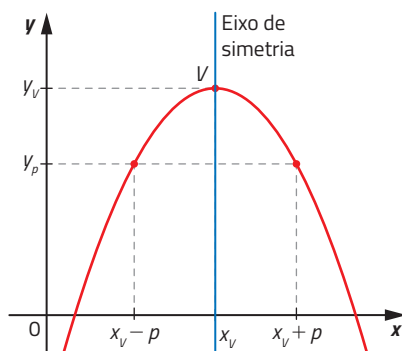
$$\begin{array}{c} \text{Abscissa do ponto } A \rightarrow 0 + 6 \leftarrow \text{Abscissa do ponto } A' \\ \hline 2 = 3 \\ \uparrow \\ \text{Abscissa do vértice da parábola} \end{array}$$

Para obter a ordenada do vértice da parábola, calculamos $f(3)$.

$$f(3) = 3^2 - 6 \cdot 3 + 5 = 9 - 18 + 5 = -4$$

Portanto, as coordenadas do vértice da parábola são $V(3, -4)$.

Podemos obter as coordenadas do vértice $V(x_v, y_v)$ de uma parábola a partir dos coeficientes da função quadrática $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, definida por $f(x) = ax^2 + bx + c$. Para isso, consideramos dois pontos distintos da parábola, simétricos em relação ao eixo de simetria, de coordenadas $(x_v - p, y_p)$ e $(x_v + p, y_p)$, $p > 0$, conforme representado no gráfico a seguir.



ILUSTRAÇÕES: BROOK PRODUÇÕES

Como $f(x_v - p) = y_p$ e $f(x_v + p) = y_p$, temos:

$$\begin{aligned} f(x_v - p) &= f(x_v + p) \Rightarrow a(x_v - p)^2 + b(x_v - p) + c = a(x_v + p)^2 + b(x_v + p) + c \Rightarrow \\ &\Rightarrow a(x_v^2 - 2x_v p + p^2) + b(x_v - p) + c = a(x_v^2 + 2x_v p + p^2) + b(x_v + p) + c \Rightarrow \\ &\Rightarrow \cancel{ax_v^2} - 2ax_v p + \cancel{ap^2} + \cancel{bx_v} - bp + \cancel{c} = \cancel{ax_v^2} + 2ax_v p + \cancel{ap^2} + \cancel{bx_v} + bp + \cancel{c} \Rightarrow \\ &\Rightarrow -2ax_v p - bp = 2ax_v p + bp \Rightarrow -4ax_v p = 2bp \Rightarrow x_v = -\frac{2bp}{4ap} = -\frac{b}{2a} \end{aligned}$$

Para obter $y_v = f(x_v)$:

$$\begin{aligned} y_v &= f\left(-\frac{b}{2a}\right) = a\left(-\frac{b}{2a}\right)^2 + b\left(-\frac{b}{2a}\right) + c = a \cdot \frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2}{2a} + c = \\ &= \frac{b^2 - 2b^2 + 4ac}{4a} = \frac{-b^2 + 4ac}{4a} = -\frac{b^2 - 4ac}{4a} = -\frac{\Delta}{4a} \end{aligned}$$

Dada uma função quadrática $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, definida por $f(x) = ax^2 + bx + c$, e considerando o discriminante $\Delta = b^2 - 4ac$, as coordenadas do vértice da parábola correspondente ao gráfico de f são dadas por:

$$V\left(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a}\right)$$

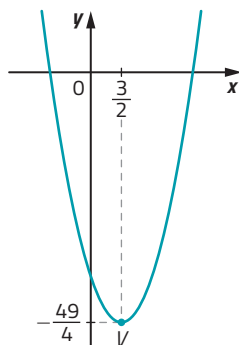
Atividade resolvida

R12. Calcule e represente graficamente as coordenadas do vértice V da parábola correspondente ao gráfico da função quadrática $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, definida por:

a) $f(x) = x^2 - 3x - 10$;

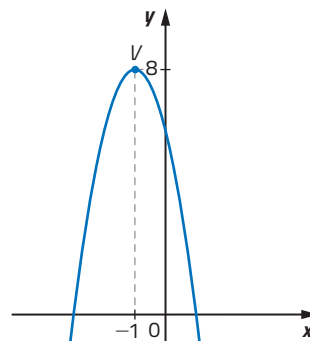
Resolução

a) $x_v = -\frac{b}{2a} = -\frac{-3}{2 \cdot 1} = \frac{3}{2}$
 $y_v = -\frac{\Delta}{4a} = -\frac{(-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-10)}{4 \cdot 1} = -\frac{49}{4}$
 Portanto, $V\left(\frac{3}{2}, -\frac{49}{4}\right)$.



b) $f(x) = -2x^2 - 4x + 6$.

b) $x_v = -\frac{b}{2a} = -\frac{-4}{2 \cdot (-2)} = -1$
 $y_v = -\frac{\Delta}{4a} = -\frac{(-4)^2 - 4 \cdot (-2) \cdot 6}{4 \cdot (-2)} = \frac{64}{8} = 8$
 Portanto, $V(-1, 8)$.



ILUSTRAÇÕES: CBOOK PRODUÇÕES

PARA PENSAR

Defina uma função quadrática cujo gráfico tenha vértice no ponto de coordenadas $(1, 2)$. Depois, defina outra função quadrática cujo gráfico é uma parábola que tem vértice nesse mesmo ponto. Agora, responda: **Respostas pessoais.**

- No que se diferem essas duas funções?
- Quantas funções quadráticas cujos gráficos tenham vértices todos no ponto de coordenadas $(1, 2)$ você acredita que existem?

● Conjunto imagem de uma função quadrática

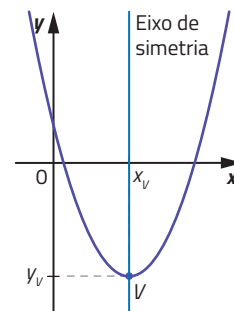
A fim de estudar o conjunto imagem de uma função quadrática $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, definida por $f(x) = ax^2 + bx + c$, podemos, inicialmente, analisar para quais valores de $x \in D(f)$ essa função é crescente e para quais valores ela é decrescente. Assim, consideremos dois casos: $a > 0$ e $a < 0$.

$a > 0$

Para $a > 0$, a concavidade da parábola é voltada para cima. Nesse caso, é possível verificar que:

- f é decrescente para $x < x_v$ e crescente para $x > x_v$;
- para qualquer $x \in D(f)$, temos $y = f(x) \geq y_v$.

Portanto, o conjunto imagem de f é dado por:
 $\text{Im}(f) = \{y \in \mathbb{R} \mid y \geq y_v\}$.

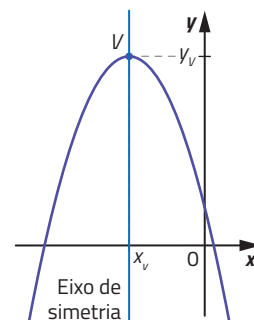


$a < 0$

Para $a < 0$, a concavidade da parábola é voltada para baixo. Nesse caso, é possível verificar que:

- f é crescente para $x < x_v$ e decrescente para $x > x_v$;
- para qualquer $x \in D(f)$, temos $y = f(x) \leq y_v$.

Portanto, o conjunto imagem de f é dado por:
 $\text{Im}(f) = \{y \in \mathbb{R} \mid y \leq y_v\}$.



ILUSTRAÇÕES: CBOOK PRODUÇÕES

ATIVIDADES RESOLVIDAS

R13. Em cada item, determine para quais valores de $x \in D(f)$ a função quadrática $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é crescente e para quais é decrescente.

a) $f(x) = 2x^2 - 8x + 10$

b) $f(x) = -\frac{x^2}{2} - 3x - 4$

Resolução

a) Calculando x_v , temos:

$$x_v = -\frac{-8}{2 \cdot 2} = 2$$

Como $a > 0$, então f é decrescente para $x < 2$ e crescente para $x > 2$.

b) Calculando x_v , temos:

$$x_v = -\frac{-3}{2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)} = -3$$

Como $a < 0$, então f é crescente para $x < -3$ e decrescente para $x > -3$.

R14. Determine o conjunto imagem da função quadrática $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, definida por:

a) $f(x) = \frac{x^2}{3} - 2x + 2$;

b) $f(x) = -x^2 + 6x - 5$.

Resolução

a) Calculando y_v , temos:

$$y_v = -\frac{(-2)^2 - 4 \cdot \frac{1}{3} \cdot 2}{4 \cdot \frac{1}{3}} = -\frac{\frac{4}{3}}{\frac{4}{3}} = -1$$

Como $a > 0$, então $\text{Im}(f) = \{y \in \mathbb{R} \mid y \geq -1\}$.

b) Calculando y_v , temos:

$$y_v = -\frac{6^2 - 4 \cdot (-1) \cdot (-5)}{4 \cdot (-1)} = \frac{16}{4} = 4$$

Como $a < 0$, então $\text{Im}(f) = \{y \in \mathbb{R} \mid y \leq 4\}$.

ATIVIDADES

Não escreva no livro.

32. Calcule as coordenadas do vértice da parábola correspondente ao gráfico da função quadrática $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, definida por:

- a) $f(x) = \frac{x^2}{10} - 4x + 2$; $V(20, -38)$
 b) $f(x) = -3x^2 + 6x + 8$; $V(1, 11)$
 c) $f(x) = -0,5x^2 - 2x - 10$; $V(-2, -8)$
 d) $f(x) = 4x^2 + 8x + 6$; $V(-1, 2)$

33. Escreva o conjunto imagem correspondente a cada função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ descrita a seguir.

- a) $f(x) = \frac{2x^2}{3} - 4x + 1$ $\text{Im}(f) = \{y \in \mathbb{R} \mid y \geq -5\}$
 b) $f(x) = -2x^2 + 5x - 7$ $\text{Im}(f) = \left\{y \in \mathbb{R} \mid y \leq -\frac{31}{8}\right\}$
 c) $f(x) = -x^2 - 2x + 9$ $\text{Im}(f) = \{y \in \mathbb{R} \mid y \leq 10\}$
 d) $f(x) = \frac{x^2}{2} + 3x + 7$ $\text{Im}(f) = \left\{y \in \mathbb{R} \mid y \geq \frac{5}{2}\right\}$

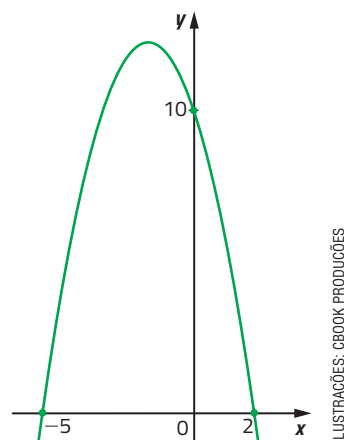
34. Determine os intervalos de crescimento e de decrescimento de cada função quadrática $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ representada a seguir.

- a)  f é decrescente para $x < -3$ e crescente para $x > -3$.

- b)  f é decrescente para $x < -1$ e crescente para $x > -1$.

- c)  f é crescente para $x < 3$ e decrescente para $x > 3$.

35. Observe o gráfico a seguir de uma função quadrática $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.



ILUSTRAÇÕES: CBOOK PRODUÇÕES

- a) Determine para quais valores de $x \in D(f)$ a função f é:

- crescente; $x < -1,5$ ▪ decrescente; $x > -1,5$

- b) Escreva a lei de formação da função f e explique os procedimentos que você realizou para encontrá-la. $f(x) = -x^2 - 3x + 10$.

Resposta pessoal.

- c) Quais são as coordenadas do vértice da parábola? $(-1,5; 12,25)$

- d) Qual é o conjunto imagem de f ? $\text{Im}(f) = \{y \in \mathbb{R} \mid y \leq 12,25\}$

36. (Enem/MEC) A Igreja de São Francisco de Assis, obra arquitetônica modernista de Oscar Niemeyer, localizada na Lagoa da Pampulha, em Belo Horizonte, possui abóbadas parabólicas. A seta na Figura 1 ilustra uma das abóbadas na entrada principal da capela. A Figura 2 fornece uma vista frontal desta abóbada, com medidas hipotéticas para simplificar os cálculos.



Figura 1

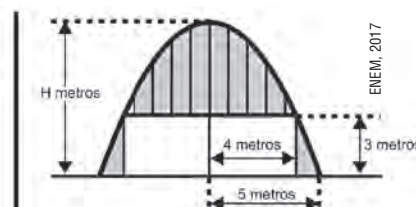


Figura 2

Qual a medida da altura H , em metro, indicada na Figura 2? alternativa d

- a) $\frac{16}{3}$ b) $\frac{31}{5}$ c) $\frac{25}{4}$ d) $\frac{25}{3}$ e) $\frac{75}{2}$

Valor máximo ou valor mínimo da função quadrática

Leia as situações descritas a seguir.

Em uma indústria, um *designer* pode analisar o formato de uma embalagem que acondicione o produto e tenha o menor custo de produção.



Em uma propriedade rural, um agrônomo pode avaliar a dosagem de fertilizante que possibilita a maior produtividade da cultura plantada. Nesse caso, o estudo deve restringir-se às quantidades mínima e máxima de fertilizante permitidas por lei.



O treinador de um atleta de lançamento de disco pode investigar a altura máxima atingida pelo disco em cada tentativa.



Um motorista de táxi ou de transporte por aplicativo pode estudar a velocidade com a qual deve conduzir seu automóvel para que o consumo de combustível seja o menor possível. Nesse caso, o estudo deve restringir-se às velocidades mínima e máxima da via a ser utilizada.



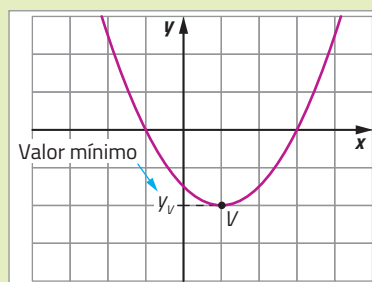
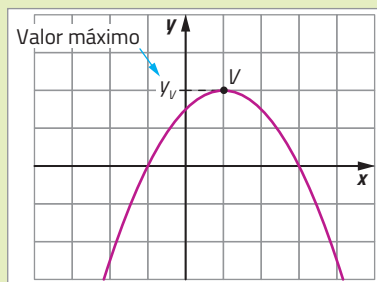
ILUSTRAÇÕES: BENTINHO

Situações como essas são exemplos em que profissionais precisaram inovar para obter resultados mais efetivos, tendo de usar a criatividade e pensar em maneiras de otimizar determinado processo ou serviço. Algumas dessas situações podem ser descritas por funções. Nesses casos, é possível realizar o estudo do valor máximo ou do valor mínimo da função, no domínio ou em um intervalo específico.

Dada uma função quadrática $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, definida por $f(x) = ax^2 + bx + c$, denotamos a ordenada do vértice y_v :

• **valor máximo** de f , quando $a < 0$;

• **valor mínimo** de f , quando $a > 0$.



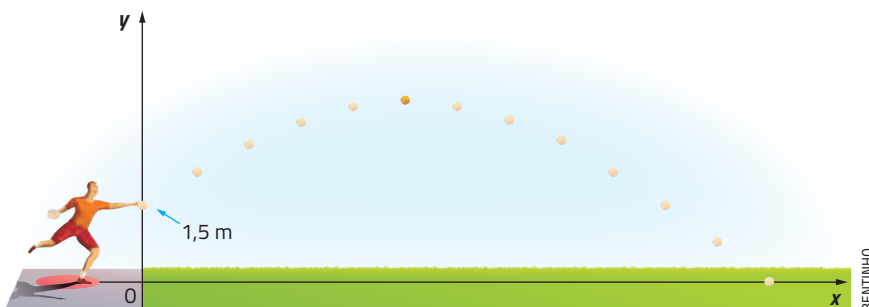
ILUSTRAÇÕES: SÉRGIO LIMA

Agora, considere a situação descrita a seguir.

Para obter mais informações sobre o desempenho de um atleta de lançamento de disco, os treinos passaram a ser acompanhados por alguns técnicos, que estudaram a trajetória do disco em cada lançamento. Em certo lançamento, por exemplo, a altura do disco $y = h(x)$, em metro, de acordo com a distância horizontal x percorrida, em metro, foi modelada computacionalmente pela função quadrática $h(x) = -0,02x^2 + x + 1,5$.

DICA

Note que, na lei de formação da função h , temos $a = -0,02 < 0$, ou seja, h tem valor máximo.



► Imagem ilustrativa. Sem escala, cores-fantasia.

BENTINHO

Para determinar a altura máxima atingida pelo disco nesse lançamento, podemos calcular o valor máximo dessa função:

$$y_v = -\frac{1^2 - 4 \cdot (-0,02) \cdot 1,5}{4 \cdot (-0,02)} = -\frac{1 + 0,12}{-0,08} = 14$$

Portanto, de acordo com esse modelo matemático, a altura máxima atingida pelo disco nesse lançamento foi de 14 m.

NO MUNDO

DO TRABALHO Inovação e criatividade

Em geral, ser criativo e inovador são fatores essenciais para resolver problemas de maneira eficiente. Um profissional com essas capacidades analisa as próprias práticas, identifica oportunidades e propõe e desenvolve novas soluções. Atualmente, existem algumas estratégias e abordagens que têm essas capacidades como um de seus pilares e que buscam contribuir para a efetividade e a rentabilidade de certa ação, por exemplo, o *design thinking*, uma metodologia cujo objetivo é entender e atender às demandas de pessoas.

Acesse o vídeo indicado a seguir, que contém informações sobre *design thinking*.

- PROCESSO criativo: *design thinking*. [S. l.: s. n.], 2015. 1 vídeo (7 min). Publicado pelo canal Sebrae Minas. Disponível em: <https://www.youtube.com/watch?v=Bwjwb5alcZ8>. Acesso em: 18 jul. 2024.

ATIVIDADES RESOLVIDAS

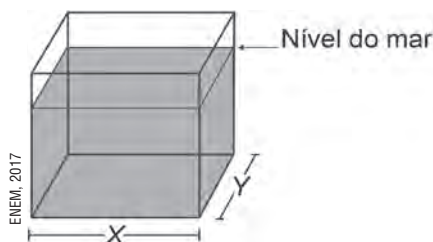
- R15.** (Enem/MEC) Viveiros de lagostas são construídos, por cooperativas locais de pescadores, em formato de prismas reto-retangulares, fixados ao solo e com telas flexíveis de mesma altura, capazes de suportar a corrosão marinha. Para cada viveiro a ser construído, a cooperativa utiliza integralmente 100 metros lineares dessa tela, que é usada apenas nas laterais.

Quais devem ser os valores de X e de Y , em metro, para que a área da base do viveiro seja máxima?

- a) 1 e 49 b) 1 e 99 c) 10 e 10 d) 25 e 25 e) 50 e 50

Resolução

Para resolver essa atividade, podemos realizar as seguintes etapas.



1ª COMPREENDER O ENUNCIADO

De acordo com o enunciado, os viveiros têm formato de prisma cuja base corresponde a um retângulo de lados medindo X e Y e nas laterais de cada viveiro são utilizados 100 m lineares de tela. Temos de determinar os valores de X e Y para que a área da base do viveiro seja a máxima possível.

2ª ELABORAR UM PLANO

Como nas laterais do viveiro são utilizados 100 m lineares de tela e o perímetro de sua base é dado por $2X + 2Y$, temos que $2X + 2Y = 100$. Além disso, podemos expressar a área da base desse viveiro por $X \cdot Y$. Com essas informações, podemos determinar uma função quadrática S que descreve a área da base de acordo com a medida X . Em seguida, podemos analisar o valor máximo dessa função e, assim, obter os valores de X e Y que tornam máxima a área da base do viveiro.

3ª EXECUTAR O PLANO

Isolando Y na equação $2X + 2Y = 100$, temos:

$$2X + 2Y = 100 \Rightarrow X + Y = 50 \Rightarrow Y = 50 - X$$

Escrevendo a lei de formação da função S , temos:

$$S(X) = X \cdot \underbrace{(50 - X)}_Y \Rightarrow S(X) = -X^2 + 50X$$

Como na lei de formação da função S o coeficiente $a = -1 < 0$, temos que a abscissa do vértice corresponde ao valor de X com o qual a área da base do viveiro é máxima. Assim, segue que:

$$X = -\frac{50}{2 \cdot (-1)} = 25, \text{ ou seja, } 25 \text{ m.}$$

Substituindo $X = 25$ em $Y = 50 - X$, obtemos o valor de Y com o qual a área da base do viveiro é máxima.

$$Y = 50 - X \Rightarrow Y = 50 - 25 \Rightarrow Y = 25, \text{ ou seja, } 25 \text{ m.}$$

4ª VERIFICAR OS RESULTADOS

Temos que a ordenada do vértice da função S corresponde à área máxima da base do viveiro, que é dada por:

$$-\frac{50^2 - 4 \cdot (-1) \cdot 0}{4 \cdot (-1)} = 625, \text{ ou seja, } 625 \text{ m}^2.$$

Calculando a área da base do viveiro de acordo com a expressão $X \cdot Y$ e considerando $X = 25$ e $Y = 25$, temos:

$$X \cdot Y = 25 \cdot 25 = 625, \text{ ou seja, } 625 \text{ m}^2.$$

Portanto, a alternativa **d** é a correta, pois a área, em metro, da base do viveiro é máxima para $X = 25$ e $Y = 25$.

- R16.** Certa transportadora, para determinar o preço do frete de um caminhão com 30 t de capacidade, na realização do trajeto entre um posto de abastecimento e um porto, calcula para cada tonelada de carga transportada R\$ 120,00 mais R\$ 8,00 por tonelada ociosa da capacidade do caminhão.

Qual é o maior valor que a transportadora pode receber por um frete seguindo esses critérios?

Resolução

Para resolver esta atividade, podemos fazer a decomposição dela em questões menores, como estas a seguir, a fim de auxiliar a compreensão e a resolução.

- 1ª) Quantos reais essa transportadora cobra para transportar uma carga de 25 t?
- 2ª) Que lei de formação de uma função quadrática dada por $p(x) = ax^2 + bx + c$ determina o valor cobrado para ser transportada uma carga de x toneladas?
- 3ª) Qual é o valor máximo da função cuja lei de formação foi determinada na questão anterior?

Agora, podemos resolver cada questão e utilizar a resposta na resolução da questão seguinte. Acompanhe.

- 1ª) Quando são transportadas 25 t de carga, temos que a capacidade ociosa do caminhão é de 5 t ($30 - 25 = 5$). Assim, segue que:

Massa da carga transportada (t)		Quantia cobrada por tonelada de carga transportada (R\$/t)
25	$\cdot (120 + 8 \cdot 5)$	$= 3000 + 1000 = 4000$

Assim, a transportadora cobra R\$ 4.000,00 para transportar uma carga de 25 t.

2ª) Dos dados apresentados na atividade, temos que:

$$p(x) = x \cdot [120 + 8 \cdot (30 - x)] \Rightarrow p(x) = -8x^2 + 360x$$

3ª) Considerando a função obtida na 2ª questão, temos:

$$y_v = -\frac{360^2 - 4 \cdot (-8) \cdot 0}{4 \cdot (-8)} = -\frac{129600 - 0}{-32} = 4050$$

Portanto, o valor máximo da função p , ou seja, o maior valor que a transportadora pode receber é R\$ 4.050,00.

PARA PENSAR

Na situação apresentada, quantas toneladas da capacidade do caminhão devem estar ociosas para que o valor do frete seja o maior possível? **22,5 t**

ATIVIDADES

Não escreva no livro.

37. Dadas as funções $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, definidas a seguir, identifique aquelas que apresentam valor máximo e as que apresentam valor mínimo. Em seguida, determine o valor máximo ou o valor mínimo de cada função.

a) $f(x) = -2x^2 + 3x - 8$ valor máximo; **-6,875**

b) $f(x) = 7x^2 - 2x$ valor mínimo; aproximadamente **-0,14**

c) $f(x) = 0,1x^2$ valor mínimo; **0**

d) $f(x) = -9x^2 - 18x + 27$ valor máximo; **36**

38. (IFBA) Jorge planta tomates em uma área de sua fazenda, e resolveu diminuir a quantidade Q (em mil litros) de agrotóxicos em suas plantações, usando a lei $Q(t) = 7 + t^2 - 5t$, onde t representa o tempo, em meses, contado a partir de $t = 0$. Deste modo, é correto afirmar que a quantidade mínima de agrotóxicos usada foi atingida em: **alternativa d**

a) 15 dias. d) 2 meses e

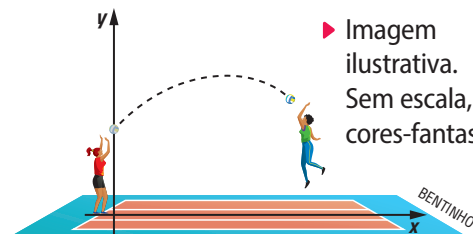
b) 1 mês e 15 dias. 15 dias.

c) 2 meses e 10 dias. e) 3 meses e 12 dias.

39. A comissão técnica de uma equipe de vôlei está analisando os toques realizados entre os jogadores de uma mesma equipe, em uma partida. A altura h , em metro, atingida pela bola em certo toque, por exemplo, foi modelada pela função $h(t) = -0,8t^2 + 2t + 1,9$, em que $0 \leq t \leq 2$ corresponde ao tempo, em segundo, entre o passe e a finalização da jogada.

39. a) 1,9 m; 2,7 m

39. c) 0,4. Resposta esperada: Indica que, em média, a altura da bola variou 0,4 m a cada segundo nesse toque.



► Imagem ilustrativa. Sem escala, cores-fantasia.

a) De que altura a bola parte nesse toque? E a que altura ela termina sua trajetória?

b) Qual é a altura máxima, em metro, atingida pela bola nesse toque? Em que instante isso ocorreu? **3,15 m; 1,25 s**

c) Determine a taxa de variação média da função h para t variando de 0 até 2. O que esse resultado indica?

40. Em certo município, a Secretaria de Educação realizou uma campanha incentivando as escolas a utilizar hortaliças plantadas na própria escola para o preparo da merenda dos estudantes. Para aderir a essa campanha, uma escola separou 112 m lineares de alambrado para cercar uma região retangular para ser utilizada como horta. Quais devem ser as medidas das dimensões dessa horta para que ela tenha a maior área possível? **28 m de comprimento e 28 m de largura**

41. A posição S de uma partícula, em metro, em função do tempo t , em segundo, pode ser representada pela função cuja lei de formação é dada por $S(t) = 1,2t^2 - 6t + 8$, com $t \geq 0$.

Em que posição o deslocamento dessa partícula muda de sentido? Qual é o tempo, em segundo, em que isso ocorre? **0,5 m; 2,5 s**

- 42.** Lucas tem 38 anos e pratica corrida. Para isso, ele faz uso de diferentes produtos e serviços relacionados à prática desse esporte, como academia, aplicativos de celular, acompanhamento com nutricionista e, também, com um treinador, que elaborou um plano de treinamento para ele. Nesse plano, sua frequência cardíaca máxima (FCM) foi calculada em 180 batimentos cardíacos por minuto (BPM), e foram estabelecidos quatro níveis de treinamento, cada um indicando um limite máximo de BPM, conforme segue.

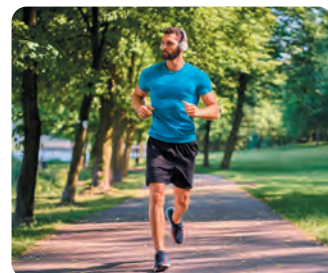
Nível	Limite máximo de BPM	Descrição da corrida
1	60% da FCM	Ritmo fácil, respiração tranquila. Início do treino aeróbico.
2	70% da FCM	Ritmo confortável com respiração mais profunda. Treino aeróbico básico.
3	80% da FCM	Ritmo moderado com maior esforço respiratório. Treino aeróbico ideal.
4	90% da FCM	Ritmo rápido com esforço respiratório intenso. Treino aeróbico intenso.

Em um dos treinos, realizado em nível **2** e com duração de 38 min, o treinador modelou o número de batimentos cardíacos por minuto de Lucas pela função descrita a seguir, em que t corresponde ao tempo de treino, em minuto.

$$f(t) = -0,32t^2 + 12,8t + 70$$

Com base nas informações apresentadas, resolva as questões a seguir.

- a)** Quantos eram os batimentos cardíacos por minuto no início do treino? E com 5 min de treino? **70 BPM; 126 BPM**
- b)** Qual foi o número máximo de batimentos cardíacos por minuto nesse treino? Isso ocorreu quantos minutos após o início do treino? **198 BPM; 20 min**
- c)** De acordo com o plano elaborado, em que intervalo de tempo do treino o número de batimentos cardíacos por minuto esteve acima do limite máximo para esse nível? **entre 5 min e 35 min do treino**



► Homem praticando corrida.

BARANO/SHUTTERSTOCK

- 43.** (Enem/MEC) Um estudante está pesquisando o desenvolvimento de certo tipo de bactéria. Para essa pesquisa, ele utiliza uma estufa para armazenar as bactérias. A temperatura no interior dessa estufa, em graus Celsius, é dada pela expressão $T(h) = -h^2 + 22h - 85$, em que h representa as horas do dia. Sabe-se que o número de bactérias é o maior possível quando a estufa atinge sua temperatura máxima e, nesse momento, ele deve retirá-las da estufa. A tabela associa intervalos de temperatura em graus Celsius, com as classificações: muito baixa, baixa, média, alta e muito alta.

Intervalos de temperatura (°C)	Classificação
$T < 0$	Muito baixa
$0 \leq T \leq 17$	Baixa
$17 < T < 30$	Média
$30 \leq T \leq 43$	Alta
$T > 43$	Muito alta

Quando o estudante obtém o maior número possível de bactérias, a temperatura no interior da estufa está classificada como: **alternativa d**

- a)** muito baixa. **c)** média. **e)** muito alta.
b) baixa. **d)** alta.

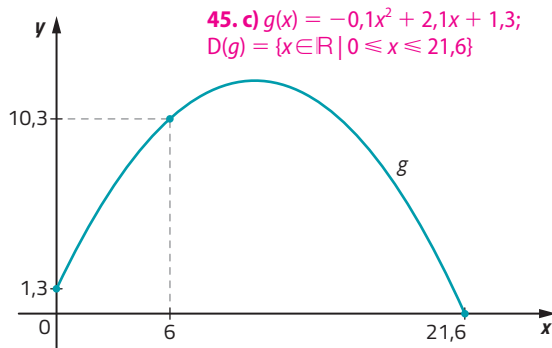
44. b) É mais vantajoso que compareçam 400 convidados, pois o gasto com a locação será de R\$ 6.400,00, uma vez que, no caso de comparecerem 250 convidados, o gasto será de R\$ 7.750,00.

44. A comissão de formatura dos estudantes do 3º ano do Ensino Médio está fazendo alguns orçamentos para a realização de uma festa para 480 convidados. Por exemplo, para a locação do salão de festas, eles receberam o seguinte orçamento:

Cada convidado presente na festa deve pagar R\$ 8,00 acrescidos de R\$ 0,10 por convidado ausente.

- a) Quantos reais cada convidado presente na festa deve pagar, caso compareçam à festa apenas 200 convidados? Nesse caso, quanto custará ao todo a locação desse salão de festas? **R\$ 36,00; R\$ 7.200,00**
- b) Para que se gaste menos com a locação desse salão, é mais vantajoso que compareçam à festa 250 convidados ou 400 convidados? Justifique.
- c) Qual é o maior valor possível que se pode pagar pela locação desse salão? Nesse caso, quantos são os convidados que comparecerão à festa? **R\$ 7.840,00; 280 convidados**

45. O gráfico a seguir corresponde a uma função quadrática g que expressa a altura, em metro, de um projétil de acordo com o tempo x , em segundo, decorrido após o seu lançamento.

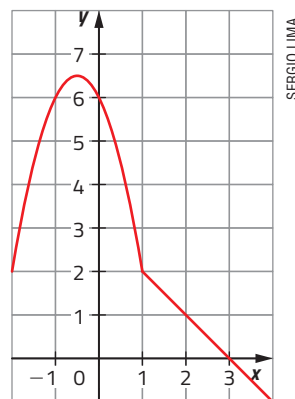


- a) A que altura esse projétil foi lançado? **1,3 m**
- b) O projétil tocou o solo quanto tempo após o seu lançamento? **21,6 s**
- c) Escreva a lei de formação da função g . Qual é o domínio dessa função? Se necessário, utilize uma calculadora.
- d) Qual é a altura máxima atingida pelo projétil nesse lançamento? **12,325 m** $Im(g) = [0; 12,325]$
- e) Determine o conjunto imagem da função g .

46. Elaboração do estudante.

46. Escreva dois problemas que envolvam o cálculo do valor máximo ou do valor mínimo de uma função. Depois, troque os problemas com um colega para que um resolva os do outro. Ao final, confiram juntos as resoluções.

47. O gráfico a seguir representa uma função f definida por mais de uma sentença. Para os valores de x do domínio, tais que $x < 1$, a função é quadrática; para $x \geq 1$, a função é afim.

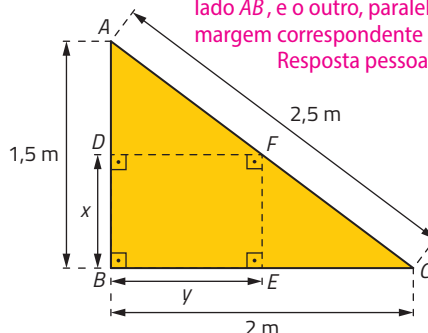


- a) Escreva a lei de formação da função f .
- b) Qual é o valor máximo dessa função? **6,5**

48. Em uma marcenaria, uma peça de madeira tem o formato de triângulo retângulo, com lados medindo 1,5 m, 2 m e 2,5 m. O marceneiro quer utilizar essa peça para obter um painel retangular com o mínimo de desperdício de madeira, realizando apenas dois cortes paralelos às margens perpendiculares dessa peça.

Resposta esperada: Um corte deve ser realizado paralelo a 1 m da margem correspondente ao lado \overline{AB} , e o outro, paralelo a 0,75 m da margem correspondente ao lado \overline{BC} .

Resposta pessoal.



ILUSTRAÇÕES: CBOOK PRODUÇÕES

Em dupla, escrevam um texto explicando as posições em que o marceneiro deve realizar os dois cortes nessa peça de madeira. Descrevam também como vocês pensaram para chegar a essa conclusão.

47. a) $f(x) = \begin{cases} -2x^2 - 2x + 6, & \text{se } x < 1 \\ -x + 3, & \text{se } x \geq 1 \end{cases}$

VOCÊ CONECTADO

Determinando as coordenadas do vértice de uma função quadrática

Leia o problema a seguir.

(Ifal) Em uma partida de futebol, um dos jogadores lança a bola e sua trajetória passa a obedecer à função $h(t) = 8t - 2t^2$, onde h é a altura da bola em relação ao solo medida em metros e t é o intervalo de tempo, em segundos, decorrido desde o instante em que o jogador chuta a bola. Nessas condições, podemos dizer que a altura máxima atingida pela bola é

- a) 2 m. b) 4 m. c) 6 m. d) 8 m. e) 10 m.



PARA PENSAR

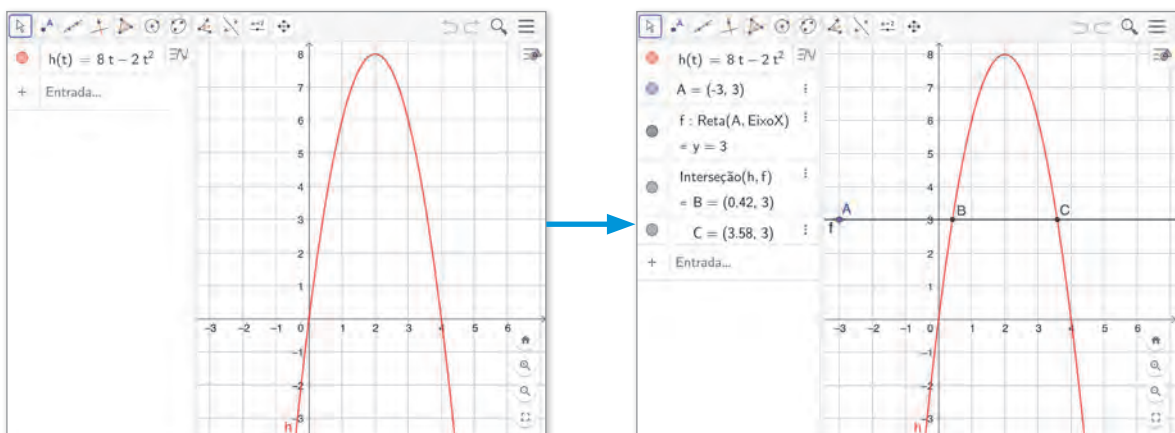
alternativa **d**. Resposta esperada: função quadrática, vértice da parábola, máximo da função quadrática.




Com um colega, resolvam o problema anterior. Depois, elenquem os conteúdos estudados que foram utilizados na resolução.

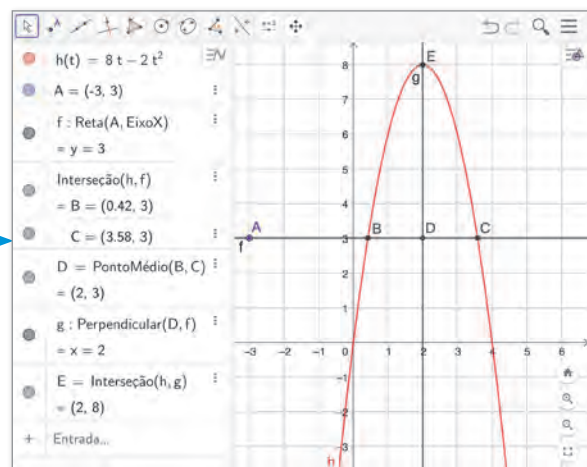
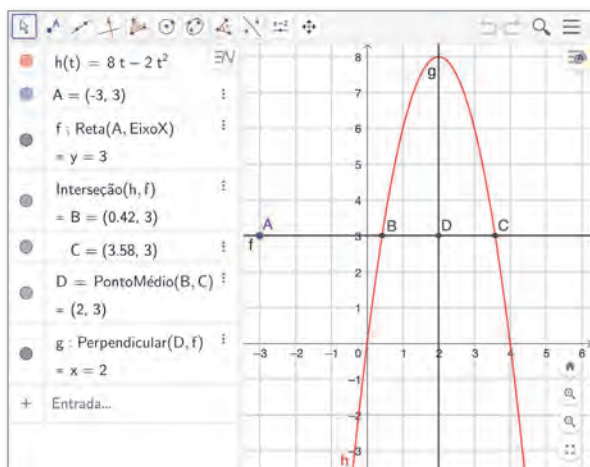
Note que esse problema envolve uma função quadrática e as coordenadas de algum de seus pontos. Para resolvê-lo, é necessário obter o valor máximo da função apresentada. Além da resolução manual, podemos utilizar o *software* de geometria dinâmica **GeoGebra**, disponível para acesso *on-line* e *download* em: <https://www.geogebra.org/download> (acesso em: 18 jul. 2024).

Observe como proceder.


- A** Para construir o gráfico da função h , clicamos em **Entrada**, digitamos $h(t) = 8t - 2t^2$ e pressionamos a tecla **Enter**. Em seguida, vamos obter dois pontos simétricos no gráfico de h , em relação ao eixo de simetria da parábola. Para isso, com a opção  (Reta paralela) selecionada, clicamos no eixo x e em um ponto A qualquer da **Janela de visualização**, de maneira que a reta f obtida, paralela ao eixo x , corte o gráfico de h em dois pontos distintos. Por fim, com a opção  (Interseção de dois objetos) selecionada, clicamos no gráfico de h e na reta f , obtendo os pontos simétricos B e C da parábola.



- B** Agora, vamos construir a reta g e o ponto E , correspondentes ao eixo de simetria e ao vértice da parábola, respectivamente. Para isso, com a opção  (Ponto médio ou centro) selecionada, clicamos nos pontos B e C , obtendo D , ponto médio de \overline{BC} . Em seguida, com a opção  (Reta perpendicular) selecionada, clicamos na reta f e no ponto D , obtendo a reta g . Por fim, selecionamos a opção  (Interseção de dois objetos) e clicamos sobre a reta g e o gráfico de h , determinando o ponto E , cujas coordenadas podem ser observadas na **Janela de Álgebra**.



IMAGENS: REPRODUÇÃO/GEOTREBA

- 1. b)** Resposta esperada: Selecionamos a opção  e clicamos sobre o eixo x e o gráfico de h , determinando os pontos em que o gráfico intersecta o eixo x , cujas abscissas que podem ser observadas na **Janela de Álgebra** correspondem aos zeros da função h .

MÃOS À OBRA

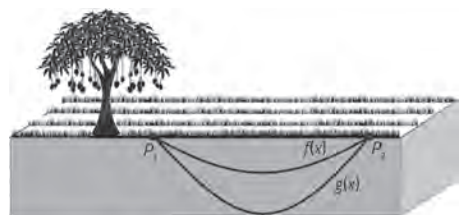
Não escreva no livro.

- Observando o exemplo apresentado e sem realizar cálculos, responda.
 - Quais são as coordenadas do vértice dessa parábola? Qual é a alternativa correta do problema apresentado? **$E(2, 8)$; alternativa d**
 - Utilizando as opções do **GeoGebra**, explique como é possível determinar geometricamente os zeros da função h .
- Uma empresa de materiais eletrônicos produz certo produto com lucro que pode ser modelado por uma função L , definida por $L(x) = -2x^2 + 400x - 3000$, com o lucro L dado em reais e sendo x a quantidade de unidades produzidas e vendidas. Utilizando o **GeoGebra**, determine a quantidade de unidades que devem ser produzidas e vendidas para que o lucro seja máximo e o valor desse lucro máximo, em reais. **2. 100 unidades; R\$ 17.000,00**
- Utilizando o **GeoGebra**, resolva geometricamente o problema apresentado a seguir.

(Cefet-MG) Meu avô quer construir, ao lado da mangueira de seu sítio, um lago para criar peixes. A figura a seguir mostra o projeto do engenheiro ambiental no qual a lagoa, vista por um corte horizontal do terreno, é representada por uma parábola, com raízes P_1 e P_2 distantes 8 metros. O projeto inicial previa a parábola $g(x) = x^2 - 8x$. Para conter gastos, essa parábola foi substituída pela parábola $f(x) = \frac{x^2}{4} - 2x$.

Com essa mudança, a maior profundidade da lagoa, em metros, diminuiu **alternativa c**

- 4.
- 8.
- 12.
- 16.



CEFET-MG, 2018

DICA

No enunciado desta questão, P_1 e P_2 correspondem aos zeros da função quadrática f .

Estudando relações entre grandezas por meio de modelos correspondentes a funções quadráticas

Podemos utilizar a planilha eletrônica **LibreOffice Calc**, disponível para *download* em <https://pt-br.libreoffice.org/baixe-ja/libreoffice-novo/> (acesso em: 25 jun. 2024), para estudar o comportamento de duas grandezas que se relacionam, construindo modelos correspondentes a funções quadráticas e representações de parábolas no plano cartesiano. Para isso, considere a situação a seguir.

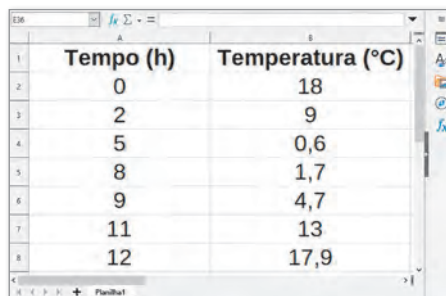
Em um modelo de câmara fria, o refrigerador tem funcionamento automático e mantém a temperatura interna entre 0 °C e 18 °C. Esse refrigerador liga quando o interior da câmara fria atinge a temperatura máxima e desliga quando atinge a mínima. Durante um teste de funcionamento, a temperatura no interior dessa câmara fria foi aferida em alguns momentos, a partir do instante em que o refrigerador ligou automaticamente.

No quadro apresentado, estão indicados o tempo, após o refrigerador ligar, e a temperatura aferida nesse teste.

Tempo (h)	Temperatura (°C)
0	18
2	9
5	0,6
8	1,7
9	4,7
11	13
12	17,9

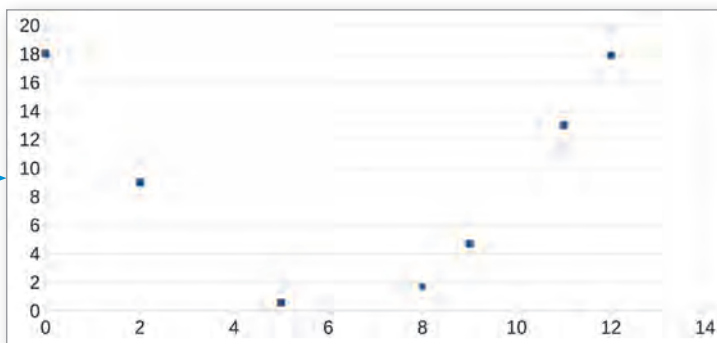
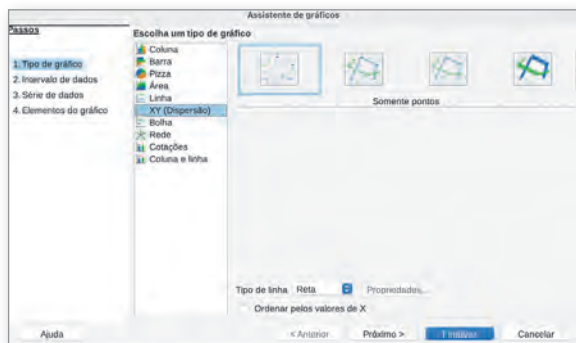
A fim de estimar a temperatura no interior dessa câmara fria em outros momentos durante esse teste, sabendo que a situação pode ser modelada por uma função quadrática, podemos obter na planilha eletrônica **LibreOffice Calc** a representação da parábola e a função que melhor descrevem a relação entre o tempo, contado a partir do momento em que o refrigerador liga, e a temperatura interna da câmara fria. Acompanhe as etapas.

- A** Organizamos os dados do quadro na planilha eletrônica.

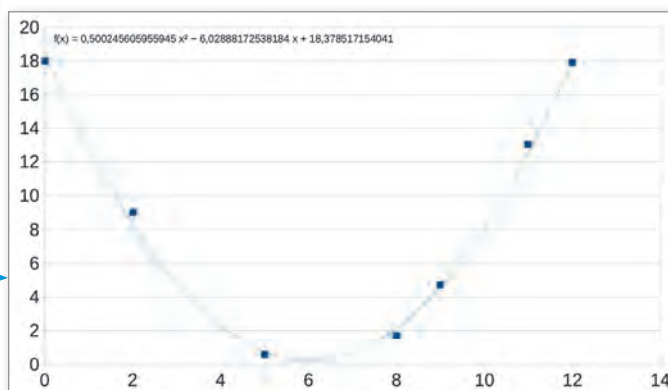
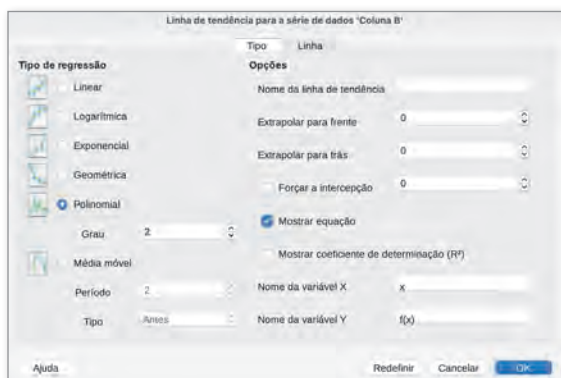


	Tempo (h)	Temperatura (°C)
1	0	18
2	2	9
3	5	0,6
4	8	1,7
5	9	4,7
6	11	13
7	12	17,9

- B** Seleccionamos as células **A2:B8** e clicamos na opção **Inserir gráfico** do *menu*. Em seguida, ao abrir a caixa de diálogo **Assistente de gráficos**, na opção **1. Tipo de gráfico**, seleccionamos as opções **XY (Dispersão)** e **Somente pontos**. Por fim, clicamos em **Finalizar** e obtemos os pontos de coordenadas (x, y), que indicam o tempo x , em hora, contado a partir do início do funcionamento do refrigerador, e a temperatura y , em grau Celsius, correspondente ao interior da câmara fria.



- C** Para determinar a parábola e a função quadrática que melhor descrevem a relação entre essas grandezas, clicamos sobre um dos pontos plotados para selecioná-lo. Depois, clicamos nas opções **Inserir** e **Linha de tendência...** do *menu*. Ao abrir a caixa de diálogo **Linha de tendência para série de dados 'Coluna B'**, na opção **Tipo de regressão**, selecionamos a opção **Polinomial** e, em **Grau**, indicamos 2. Em seguida, em **Opções**, marcamos **Mostrar equação**. Por fim, clicamos em **OK**.



IMAGENS: REPRODUÇÃO/LIBREOFFICE

MÃOS À OBRA

Não escreva no livro.

- De acordo com a situação apresentada no exemplo, resolva os itens a seguir. Para isso, aproxime cada coeficiente da lei de formação da função f ao décimo mais próximo e faça os cálculos necessários na planilha eletrônica.
 - Calcule, em valor absoluto, a diferença entre cada temperatura da câmara fria indicada e a temperatura correspondente determinada pela função f . tempo 0: 0,4 °C; tempo 2: 0,6 °C; tempo 5: 0,3 °C; tempo 8: 0,7 °C; tempo 9: 0,2 °C; tempo 11: 0,1 °C; tempo 12: 0,5 °C
 - Utilizando a função f , estime a temperatura mínima aproximada dessa câmara fria. 0,4 °C
- Utilizando os mesmos procedimentos apresentados no exemplo anterior, represente os dados a seguir em uma planilha eletrônica e obtenha a representação da parábola e da função quadrática que melhor descrevem a relação entre a altura do disco e o tempo após o seu lançamento.

Construção do estudante.

Tempo (s)	Altura do disco (m)
1	5,6
2	8,9
3	10
4	9
5	5,5
6	0



- Com base nas informações do quadro e da construção que você realizou na planilha eletrônica, elabore um problema relacionado ao conteúdo de função quadrática. Em seguida, troque o problema com um colega para que um resolva o do outro. Ao final, confirmem juntos as resoluções.

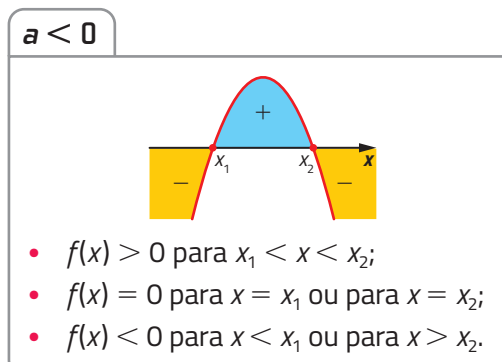
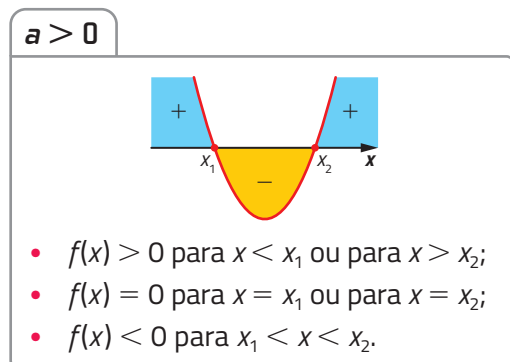
Elaboração do estudante.

Estudo do sinal de uma função quadrática

Como estudamos anteriormente, o estudo do sinal de uma função f consiste em analisar os valores do domínio para os quais f é positiva, negativa ou se anula. Em particular, para estudar o sinal de uma função quadrática $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, definida por $f(x) = ax^2 + bx + c$, podemos analisar os valores do discriminante Δ da equação $ax^2 + bx + c = 0$ e o coeficiente a da função f . Acompanhe.

$\Delta > 0$

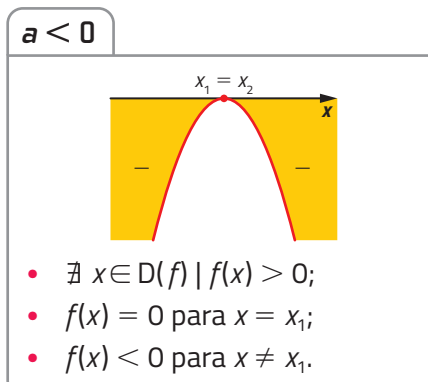
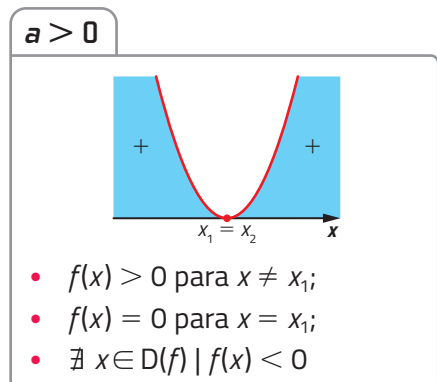
Nesse caso, o gráfico de f intersecta o eixo x em dois pontos distintos, ou seja, f tem dois zeros reais distintos: x_1 e x_2 , com $x_1 < x_2$.



ILUSTRAÇÕES: CBOOK PRODUÇÕES

$\Delta = 0$

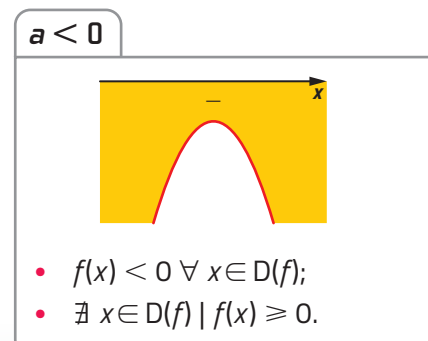
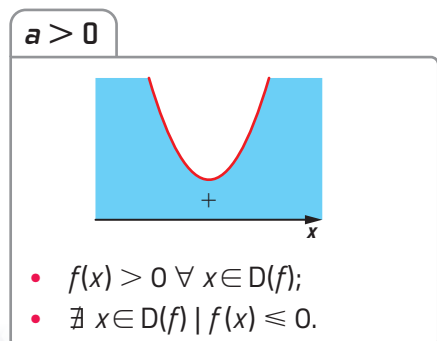
Nesse caso, o gráfico de f intersecta o eixo x em um único ponto, ou seja, f tem dois zeros reais e iguais: $x_1 = x_2$.



DICA
 $\nexists \rightarrow$ Lê-se: não existe.

$\Delta < 0$

Nesse caso, o gráfico de f não intersecta o eixo x , ou seja, f não tem zero real.



DICA
 $\forall \rightarrow$ Lê-se: para todo.

ROBERT KIESCHKE/SHUTTERSTOCK.COM

ATIVIDADES RESOLVIDAS

R17. Realize o estudo do sinal da função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, definida por:

a) $f(x) = x^2 + 2x - 3$;

b) $f(x) = -2x^2 + 8x - 8$;

c) $f(x) = x^2 - 4x + 5$.

Resolução

a) Inicialmente, calculamos os zeros de f .

$$f(x) = 0 \Rightarrow x^2 + 2x - 3 = 0$$

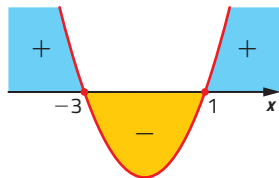
$$a = 1; b = 2; c = -3$$

$$\Delta = 2^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-3) = 16$$

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{16}}{2 \cdot 1} = \frac{-2 \pm 4}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = \frac{-2 + 4}{2} = 1 \\ \text{ou} \\ x = \frac{-2 - 4}{2} = -3 \end{cases}$$

Como $a > 0$ e $\Delta > 0$, temos que:



- $f(x) > 0$ para $x < -3$ ou para $x > 1$;
- $f(x) = 0$ para $x = -3$ ou para $x = 1$;
- $f(x) < 0$ para $-3 < x < 1$.

b) Inicialmente, calculamos os zeros de f .

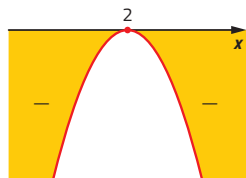
$$f(x) = 0 \Rightarrow -2x^2 + 8x - 8 = 0$$

$$a = -2; b = 8; c = -8$$

$$\Delta = 8^2 - 4 \cdot (-2) \cdot (-8) = 0$$

$$x = \frac{-8 \pm \sqrt{0}}{2 \cdot (-2)} = \frac{-8}{-4} = 2$$

Como $a < 0$ e $\Delta = 0$, temos que:



- $\nexists x \in D(f) \mid f(x) > 0$;
- $f(x) = 0$ para $x = 2$;
- $f(x) < 0$ para $x \neq 2$.

c) Inicialmente, calculamos os zeros de f .

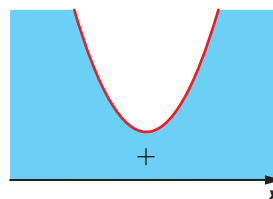
$$f(x) = 0 \Rightarrow x^2 - 4x + 5 = 0$$

$$a = 1; b = -4; c = 5$$

$$\Delta = (-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 5 = -4$$

A função não tem zeros reais, pois $\Delta < 0$.

Como $a > 0$, temos que:



- $f(x) > 0$ para todo $x \in D(f)$;
- $\nexists x \in D(f) \mid f(x) \leq 0$.

R18. Resolva em \mathbb{R} a inequação $x^2 \geq x + 2$.

Resolução

$$x^2 \geq x + 2 \Rightarrow -x^2 + x + 2 \leq 0$$

Podemos resolver essa inequação fazendo o estudo do sinal da função f , definida por $f(x) = -x^2 + x + 2$.

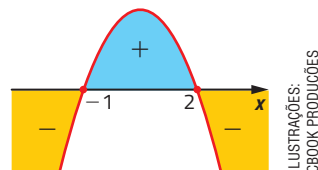
Para isso, inicialmente, calculamos os zeros de f .

$$f(x) = 0 \Rightarrow -x^2 + x + 2 = 0$$

$$\Delta = 1^2 - 4 \cdot (-1) \cdot 2 = 9$$

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{9}}{2 \cdot (-1)} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{-1 + 3}{-2} = -1 \\ \text{ou} \\ x = \frac{-1 - 3}{-2} = 2 \end{cases}$$

Como $a < 0$ e $\Delta > 0$, temos que:



ILUSTRAÇÕES:
CBOOK PRODUÇÕES

- $f(x) > 0$ para $-1 < x < 2$;
- $f(x) = 0$ para $x = -1$ ou para $x = 2$;
- $f(x) < 0$ para $x < -1$ ou para $x > 2$.

Portanto, o conjunto solução S da inequação $x^2 \geq x + 2$ corresponde a todos os valores reais de x para os quais $f(x) \leq 0$, ou seja, $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq -1 \text{ ou } x \geq 2\}$.

R19. Certa empresa de turismo freta ônibus com 40 lugares para excursões a um parque aquático e oferece dois planos, conforme segue.

- 1º plano: Taxa fixa de R\$ 250,00 mais R\$ 40,00 por passageiro.
- 2º plano: Cada passageiro paga R\$ 20,00 fixos mais uma taxa de R\$ 2,00 por lugar vago.

Em quais circunstâncias o 1º plano é mais vantajoso que o 2º plano para os clientes dessa empresa de turismo?

Resolução

Podemos expressar, por meio de funções, a quantia total a pagar, em reais, em cada um dos planos de uma excursão ofertados, de acordo com a quantidade x de passageiros.

- 1º plano: $f(x) = 250 + 40x$
- 2º plano: $g(x) = x \cdot [20 + 2 \cdot (40 - x)] \Rightarrow g(x) = 100x - 2x^2$

Para saber a quantidade x de passageiros para a qual o 1º plano é mais vantajoso que o 2º plano, fazemos:

$$f(x) < g(x) \Rightarrow 250 + 40x < 100x - 2x^2 \Rightarrow -2x^2 + 60x - 250 > 0$$

Para resolver a inequação obtida, podemos estudar o sinal da função $h(x) = -2x^2 + 60x - 250$.

Para isso, inicialmente, calculamos os zeros de h .

$$h(x) = 0 \Rightarrow -2x^2 + 60x - 250 = 0$$

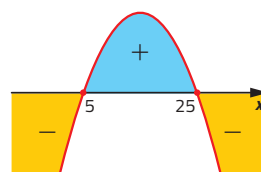
$$a = -2; b = 60; c = -250$$

$$\Delta = 60^2 - 4 \cdot (-2) \cdot (-250) = 1600$$

$$x = \frac{-60 \pm \sqrt{1600}}{2 \cdot (-2)} = \frac{-60 \pm 40}{-4} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = \frac{-60 + 40}{-4} = 5 \\ \text{ou} \\ x = \frac{-60 - 40}{-4} = 25 \end{cases}$$

Como $a < 0$ e $\Delta > 0$, temos que:



- $h(x) > 0$ para $5 < x < 25$;
- $h(x) = 0$ para $x = 5$ ou para $x = 25$;
- $h(x) < 0$ para $x < 5$ ou para $x > 25$.

Assim, $S = \{x \in \mathbb{R} \mid 5 < x < 25\}$ é o conjunto solução da inequação $-2x^2 + 60x - 250 > 0$. Portanto, para grupos entre 5 e 25 passageiros, o 1º plano é mais vantajoso para os clientes da excursão ao parque aquático que o 2º plano.

Resposta esperada: A função m representa a diferença, em reais, entre a quantia total a pagar no 1º e no 2º plano, respectivamente, de acordo com a quantidade x de passageiros.

PARA PENSAR

Considere a função definida por $m(x) = f(x) - g(x)$.

- O que essa função representa no contexto apresentado?

- Realize o estudo do sinal da função m .

$$m(x) < 0 \text{ para } 5 < x < 25; m(x) = 0 \text{ para } x = 5 \text{ ou para } x = 25;$$

$$m(x) > 0 \text{ para } x < 5 \text{ ou para } x > 25$$

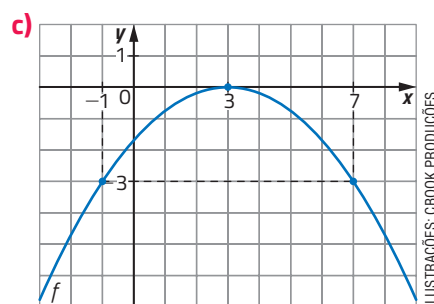
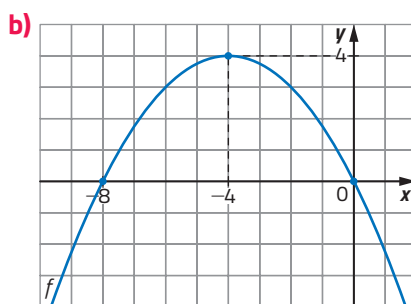
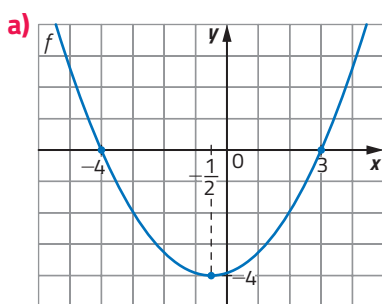
49. a) $f(x) > 0$ para $x < -4$ ou $x > 3$; $f(x) = 0$ para $x = -4$ ou $x = 3$; $f(x) < 0$ para $-4 < x < 3$

Atividades

Não escreva no livro.

49. b) $f(x) > 0$ para $-8 < x < 0$; $f(x) = 0$ para $x = -8$ ou $x = 0$; $f(x) < 0$ para $x < -8$ ou $x > 0$

49. Observe cada gráfico a seguir e faça o estudo do sinal da função quadrática $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ correspondente.



49. c) $\nexists x \in D(f)$ tal que $f(x) > 0$; $f(x) = 0$ para $x = 3$; $f(x) < 0$ para $x \neq 3$


50. b) $f(x) > 0$ para $0,5 < x < 3$; $f(x) = 0$ para $x = 0,5$ ou $x = 3$; $f(x) < 0$ para $x < 0,5$ ou $x > 3$
 50. c) $\nexists x \in D(f) \mid f(x) > 0$; $f(x) = 0$ para $x = -3$; $f(x) < 0$ para $x \neq -3$
 50. d) $f(x) > 0$ para $x < -2$ ou $x > 4$; $f(x) = 0$ para $x = -2$ ou $x = 4$; $f(x) < 0$ para $-2 < x < 4$
 50. e) $f(x) > 0$ para $x \neq 2,5$; $f(x) = 0$ para $x = 2,5$; $\nexists x \in D(f) \mid f(x) < 0$

50. Realize o estudo do sinal da função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, definida por:

- a) $f(x) = 4x^2 + 5x + 2$; $f(x) > 0$ para todo $x \in D(f)$; $\nexists x \in D(f) \mid f(x) \leq 0$
 b) $f(x) = -2x^2 + 7x - 3$;
 c) $f(x) = -x^2 - 6x - 9$;
 d) $f(x) = \frac{x^2}{2} - x - 4$;
 e) $f(x) = 0,4x^2 - 2x + 2,5$;
 f) $f(x) = -\frac{x^2}{4} + 3x - 10$.
 $\nexists x \in D(f) \mid f(x) \geq 0$; $f(x) < 0$ para todo $x \in D(f)$

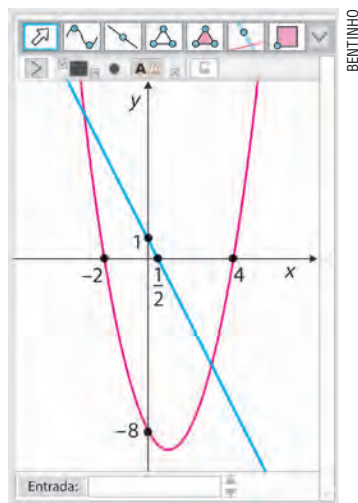
51. Resolva em \mathbb{R} as inequações a seguir.

- a) $4x^2 - 16x + 12 > 0$ $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 1 \text{ ou } x > 3\}$
 b) $x^2 + 15 \leq 0,9x^2 - 2x + 45$ $S = \{x \in \mathbb{R} \mid -30 \leq x \leq 10\}$
 c) $x^2 - 10x - \frac{25}{2} < 3x^2 + 10x + 13$ $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x < -8,5 \text{ ou } x > -1,5\}$
 d) $x^2 - 5x \leq \frac{x^2}{2} - 15$ $S = \emptyset$

52. No **GeoGebra**, represente os gráficos das funções $f(x) = 250 + 40x$ e $g(x) = 100x - 2x^2$, apresentadas na resolução da atividade resolvida **R19** da página anterior. Em seguida, com a ferramenta  (Interseção de dois objetos) selecionada, determine os pontos de interseção entre os gráficos dessas funções. Por fim, verifique as coordenadas desses pontos na **Janela de Álgebra** e determine qual é a relação destes com a resolução da atividade.

53. Dada a função quadrática $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, definida por $f(x) = (k - 2)x^2 + 4x - 3$, determine para quais valores reais de k temos $f(x) < 0$ para todo x real. $k < \frac{2}{3}$

54. Utilizando um programa de computador, Bruno construiu, em um mesmo plano cartesiano, os gráficos de uma função quadrática $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ e de uma função afim $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Observe.



52. Resposta esperada: As abscissas desses pontos determinam que:
 para $x < 5$ e $x > 25 \Rightarrow f(x) > g(x)$;
 para $x = 5$ e $x = 25 \Rightarrow f(x) = g(x)$;
 para $5 < x < 25 \Rightarrow f(x) < g(x)$.

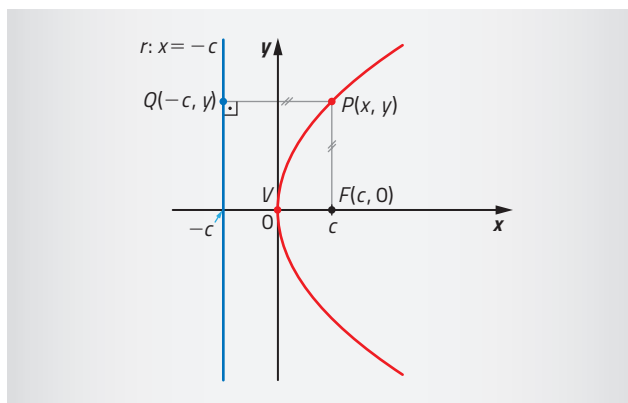
- a) Escreva a lei de formação da função f e da função g . $f(x) = x^2 - 2x - 8$; $g(x) = -2x + 1$
 b) Para quais valores reais de x temos:
 ■ $f(x) < g(x)$? $-3 < x < 3$ ■ $f(x) > g(x)$? $x < -3$ ou $x > 3$ ■ $f(x) = g(x)$? $x = -3$ ou $x = 3$

55. Em certo laboratório, uma câmara climática é utilizada para analisar o comportamento de bactérias de acordo com a variação da temperatura. Em um dos experimentos realizados, a temperatura T no interior dessa câmara climática, em grau Celsius, varia em relação ao tempo x , em minuto, decorrido do início do experimento, de acordo com a função dada por $T(x) = -0,02x^2 + 5x - 48$, para $0 \leq x \leq 250$.

- a) Entre quais intervalos de tempo a temperatura nessa câmara climática era:
 ■ positiva? entre 10 min e 240 min ■ negativa? entre 0 min e 10 min e entre 240 min e 250 min
 b) Qual é a maior temperatura obtida nessa câmara climática durante esse experimento? Essa temperatura foi registrada quantos minutos após o início do experimento? $264,5^\circ\text{C}$; 125 min

Equação da parábola

Anteriormente, nesta Unidade, estudamos alguns elementos da parábola e, em seguida, constatamos que os gráficos das funções quadráticas são parábolas. Agora, retomaremos a abordagem algébrica inicial para realizar o estudo da equação de uma parábola. Para isso, vamos considerar, inicialmente, o caso em que a diretriz r é paralela ao eixo das ordenadas, o vértice $V(0, 0)$ corresponde à origem do sistema de eixos cartesianos e está localizado à direita da diretriz e $F(c, 0)$ corresponde ao foco. Nessa parábola, indicamos um ponto qualquer $P(x, y)$. Observe a figura.



De acordo com a definição da parábola, a distância de P a F é igual à distância de P a r . Como a distância de P a r corresponde a PQ , temos:

$$\begin{aligned} PF = PQ &\Rightarrow \sqrt{(x - c)^2 + (y - 0)^2} = \sqrt{(x + c)^2 + (y - y)^2} \Rightarrow \\ &\Rightarrow (x - c)^2 + (y - 0)^2 = (x + c)^2 + (y - y)^2 \Rightarrow \\ &\Rightarrow x^2 - 2cx + c^2 + y^2 = x^2 + 2cx + c^2 \Rightarrow \boxed{y^2 = 4cx} \end{aligned}$$

 **DICA**

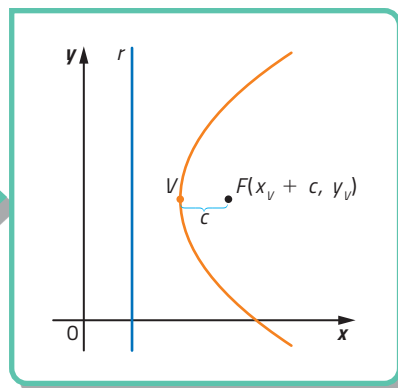
A distância entre os pontos $A(x_A, y_A)$ e $B(x_B, y_B)$ no plano cartesiano pode ser expressa por $AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$.

Essa é a **equação da parábola** quando a diretriz é paralela ao eixo das ordenadas e o vértice corresponde à origem do plano cartesiano e está à direita da diretriz.

De maneira análoga, podemos representar a equação da parábola quando a reta diretriz e o vértice estão em outras posições. Acompanhe a seguir.

Diretriz paralela ao eixo das ordenadas e vértice $V(x_V, y_V)$ qualquer à direita da diretriz:

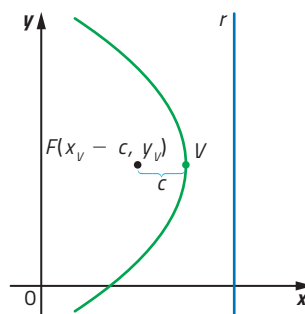
$$(y - y_V)^2 = 4c(x - x_V)$$



ILUSTRAÇÕES: CBOOK PRODUÇÕES

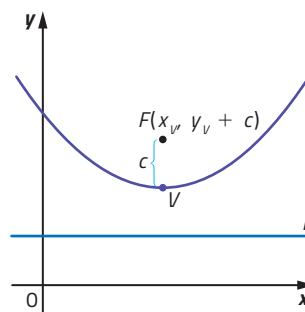
Diretriz paralela ao eixo das ordenadas e vértice $V(x_v, y_v)$ qualquer à esquerda da diretriz:

$$(y - y_v)^2 = -4c(x - x_v)$$



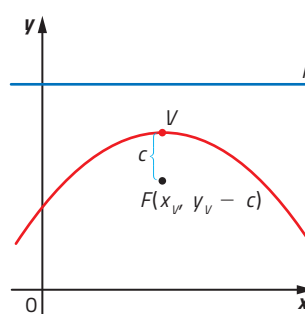
Diretriz paralela ao eixo das abscissas e vértice $V(x_v, y_v)$ qualquer acima da diretriz:

$$(x - x_v)^2 = 4c(y - y_v)$$



Diretriz paralela ao eixo das abscissas e vértice $V(x_v, y_v)$ qualquer abaixo da diretriz:

$$(x - x_v)^2 = -4c(y - y_v)$$



ILUSTRAÇÕES: CBOOK PRODUÇÕES

**DICA**

O gráfico que representa a função quadrática é uma parábola com diretriz paralela ou coincidente com o eixo das abscissas. Os demais casos de parábolas não correspondem a gráficos de funções.

Equação da parábola e função quadrática

Anteriormente nesta Unidade, estudamos que o gráfico de uma função quadrática é uma parábola. Mas como relacionar a lei de formação de uma função quadrática à equação de uma parábola?

Para compreender essa relação, considere uma parábola cuja equação é $(x - 1)^2 = (y - 2)$. Com base na equação, podemos afirmar que:

- a equação da parábola é do tipo $(x - x_v)^2 = 4c(y - y_v) \rightarrow (x - 1)^2 = 4c(y - 2)$;
- o vértice $V(x_v, y_v)$ está localizado acima da diretriz e tem coordenadas $V(1, 2)$;
- $4c = 1$, ou seja, $c = \frac{1}{4}$;
- a diretriz é paralela ao eixo das abscissas e é dada por $y = y_v - c$, ou seja, $y = 2 - \frac{1}{4} = \frac{7}{4}$.

Portanto, essa equação é de uma parábola com diretriz paralela aos eixos das abscissas e vértice qualquer acima da diretriz.

Desenvolvendo o produto notável da equação e isolando a variável y no primeiro membro, temos:

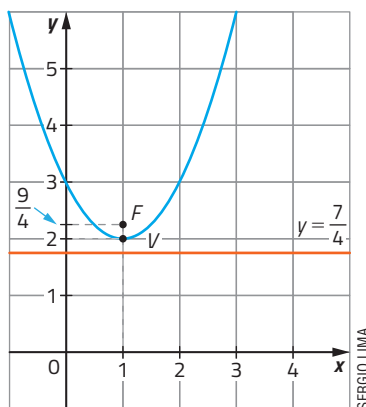
$$\begin{aligned}(x - 1)^2 &= (y - 2) \\ x^2 - 2x + 1 &= y - 2 \\ x^2 - 2x + 1 + 2 &= y \\ y &= x^2 - 2x + 3\end{aligned}$$

Note que, tomando $y = f(x)$, a equação obtida é a lei de formação de uma função quadrática $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, definida por $f(x) = x^2 - 2x + 3$, com $a = 1$, $b = -2$ e $c = 3$. Como nessa função $a = 1 > 0$, essa parábola tem concavidade voltada para cima.

Portanto, o gráfico da função quadrática $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, definida por $f(x) = x^2 - 2x + 3$, corresponde à parábola de equação $(x - 1)^2 = 4 \cdot \frac{1}{4}(y - 2)$, em que:

- o vértice tem coordenadas $V(1, 2)$;
- o foco tem coordenadas $F(x_v, y_v + c) \rightarrow F\left(1, \frac{9}{4}\right)$;
- a reta diretriz tem equação $y = y_v - c \rightarrow y = \frac{7}{4}$.

Observe, a seguir, a representação dessa parábola no plano cartesiano.



Uma parábola com diretriz paralela ao eixo das abscissas e vértice abaixo da diretriz também corresponde ao gráfico de uma função quadrática, mas com a concavidade para baixo. As parábolas com diretriz paralela ao eixo das ordenadas não representam gráficos de funções quadráticas.

PARA PENSAR

Por que uma parábola com diretriz paralela ao eixo das ordenadas não corresponde ao gráfico de uma função quadrática?

Resposta esperada: Uma parábola com diretriz paralela ao eixo das ordenadas não representa uma função, uma vez que nela é possível identificar pares de pontos em que são associadas diferentes ordenadas a uma mesma abscissa.

ATIVIDADES RESOLVIDAS

R20. Esboce no plano cartesiano a parábola indicada pela equação:

a) $x^2 + 8y = 0$;

b) $y^2 - 8y + 12x = -4$.

Resolução

a) Para esboçar uma parábola a partir de sua equação, é necessário determinar as coordenadas do vértice e o valor de c , que indica a posição da reta diretriz.

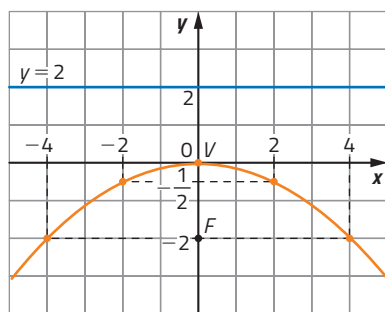
$$x^2 + 8y = 0 \Rightarrow x^2 = -4 \cdot 2 \cdot y \Rightarrow (x - 0)^2 = -4 \cdot 2 \cdot (y - 0)$$

Assim, comparando a equação obtida com as equações apresentadas anteriormente, conclui-se que $c = 2$ e a parábola tem diretriz paralela ao eixo das abscissas, com vértice $V(0, 0)$ abaixo da diretriz. Em relação a essa parábola, temos:

- foco: $F(x_v, y_v - c) \Rightarrow F(0, -2)$;
- diretriz: $y = y_v + c \Rightarrow y = 2$.

A partir da equação da parábola, também podemos obter pares ordenados correspondentes a alguns pontos dessa parábola, como $(-4, -2)$, $(-2, -\frac{1}{2})$, $(2, -\frac{1}{2})$ e $(4, -2)$.

Representando a parábola no plano cartesiano, temos:



b) Utilizando o método de completar quadrados, temos:

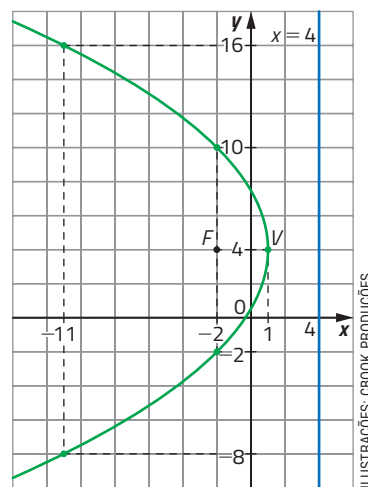
$$y^2 - 8y + 12x = -4 \Rightarrow y^2 - 8y + 16 = -12x - 4 + 16 \Rightarrow (y - 4)^2 = -4 \cdot 3(x - 1)$$

Assim, a parábola tem diretriz paralela ao eixo das ordenadas, com vértice $V(1, 4)$ à esquerda da diretriz e $c = 3$. Em relação a essa parábola, temos:

- foco: $F(x_v - c, y_v) \Rightarrow F(-2, 4)$;
- diretriz: $x = x_v + c \Rightarrow x = 4$.

A partir da equação da parábola, também podemos obter pares ordenados correspondentes a alguns pontos dessa parábola, como $(-11, -8)$, $(-11, 16)$, $(-2, -2)$ e $(-2, 10)$.

Representando a parábola no plano cartesiano, temos:



R21. Escreva a lei de formação de uma função f cujo gráfico corresponda a uma parábola em que as coordenadas do vértice e do foco são dadas por $V(3; -1,5)$ e $F(3, 1)$, respectivamente.

Resolução

De acordo com as informações apresentadas, temos que a parábola tem diretriz paralela ao eixo das abscissas, vértice $V(3; -1,5)$ acima da diretriz e $F(3, 1)$. Assim, a equação da parábola é da forma $(x - x_v)^2 = 4c(y - y_v)$.

$$\text{Calculando o valor de } c, \text{ temos: } c = FV = \sqrt{(3 - 3)^2 + [1 - (-1,5)]^2} = \sqrt{(2,5)^2} = 2,5$$

A equação da parábola é dada por:

$$(x - 3)^2 = 4 \cdot 2,5 \cdot (y + 1,5) \Rightarrow x^2 - 6x + 9 = 10y + 15 \Rightarrow y = \frac{1}{10}x^2 - \frac{3}{5}x - \frac{3}{5}$$

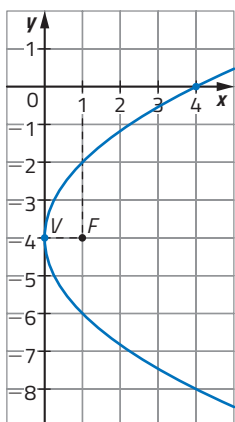
$$\text{Portanto, } f(x) = \frac{1}{10}x^2 - \frac{3}{5}x - \frac{3}{5}.$$

56. Esboce no plano cartesiano a parábola indicada pela equação em cada item. *Respostas nas Orientações para o professor.*

- a) $x^2 - 8y = 0$
 b) $x^2 - 10x + 4y = -45$
 c) $y^2 - 4y + 16x = 28$
 d) $y^2 + 8y - 10x = 29$

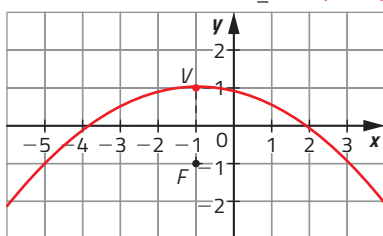
57. Escreva a equação de cada parábola representada a seguir e explique, com suas palavras, o procedimento adotado em cada caso.

- a) $y^2 - 4x + 8y = -16$.
Resposta pessoal.

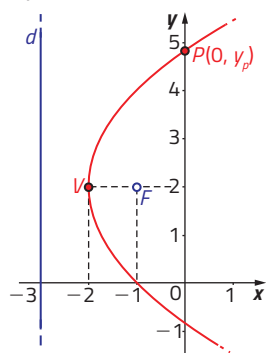


ILUSTRAÇÕES: CBOOK PRODUÇÕES

- b) $x^2 + 2x + 8y = 7$.
Resposta pessoal.



58. (Unesp) Em um plano cartesiano ortogonal são dadas uma reta d , de equação $x = -3$, e um ponto F , de coordenadas $(-1, 2)$. Nesse plano, o conjunto dos pontos que estão à mesma distância do ponto F e da reta d forma uma parábola. Na figura, estão nomeados dois pontos dessa parábola: o vértice V , de coordenadas $(-2, 2)$, e o ponto P , de coordenadas $(0, y_p)$.



Determine as coordenadas de dois pontos quaisquer dessa parábola que sejam diferentes de V e de P . Em seguida, calcule y_p .

58. algumas possíveis respostas: $(-1, 0)$, $(-1, 4)$, $(2, -2)$, $(2, 6)$, $(7, -4)$, $(7, 8)$; $y_p = 2(\sqrt{2} + 1) \approx 4,83$

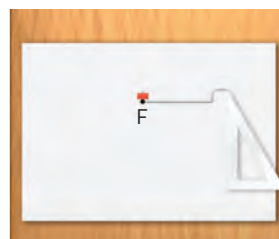
59. $x^2 - 4x - 8y = 12$

60. a) *Resposta pessoal.*

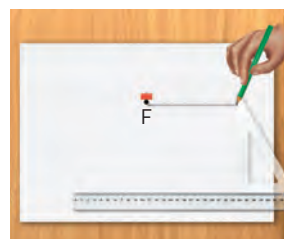
59. Qual é a equação da parábola que passa pelos pontos $A(0; -1,5)$, $B(-2, 0)$ e $C(2, -2)$ e tem eixo de simetria paralelo ao eixo das ordenadas?

60. Observe as etapas que podemos realizar para representar uma parábola usando papel, lápis, régua, um esquadro de 60° , fita adesiva e um pedaço de barbante.

- 1ª Em uma folha de papel, marcamos o ponto F , foco da parábola. Em seguida, cortamos um pedaço de barbante cujo comprimento deve ser igual ao do maior cateto do esquadro, fixamos uma extremidade do barbante em F e a outra no vértice do esquadro formado pela hipotenusa e pelo maior cateto.



- 2ª Posicionamos a régua na folha e apoiamos o cateto menor do esquadro sobre ela. Depois, esticamos o barbante apoiando a ponta do lápis no cateto maior do esquadro.



- 3ª Deslizamos o esquadro sobre a régua fixa, mantendo o barbante esticado, traçando a parábola com o lápis.



LUCAS FARALU

Agora, com um colega, resolvam os itens.

- a) Em uma folha de papel, representem uma parábola com as etapas apresentadas.
 b) O que é possível afirmar em relação à distância de F à ponta do lápis e à distância da ponta do lápis à régua? Justifique.

60. b) As distâncias são iguais, pois a ponta do lápis corresponde a um ponto da parábola, F corresponde ao foco da parábola, e a régua corresponde à reta diretriz.

INTEGRANDO COM...

CIÊNCIAS DA NATUREZA E SUAS TECNOLOGIAS

Antena parabólica

As antenas parabólicas começaram a ser comercializadas, no Brasil, em meados da década de 1980 e, atualmente, fazem parte da paisagem urbana e rural de muitos municípios. Elas permitem captar com maior qualidade sinais de televisão, de rádio, telefonia móvel, internet etc. emitidos via satélite, mesmo em locais mais afastados dos centros urbanos, como zonas rurais e comunidades quilombolas e indígenas.

Programas governamentais de inclusão digital e social buscam promover ações voltadas às pessoas que moram em áreas mais remotas e com menos infraestrutura de acesso às tecnologias da informação e da comunicação. O objetivo disso é que essas pessoas também sejam inseridas digitalmente e tenham outras oportunidades de aprendizado, entretenimento e interação. Por meio de iniciativas desse tipo, algumas comunidades e escolas indígenas, por exemplo, receberam antenas parabólicas, conexão à internet, computadores, entre outros.

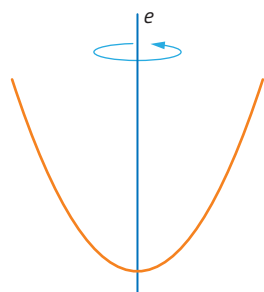


► Antena parabólica na Aldeia Bom Jardim, do povo xerente, em Tocantína (TO). Fotografia de 2022.

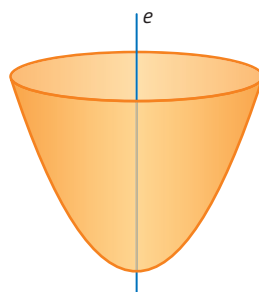
CESAR DINIZ/PULSAR IMAGENS

HOME061/SHUTTERSTOCK.COM

A antena parabólica tem um formato que lembra uma parabolóide de revolução, que é a figura geométrica obtida ao rotacionarmos uma parábola em torno de seu eixo de simetria.



► Parábola e eixo de simetria e .



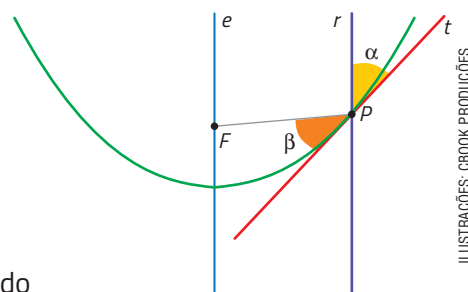
► Parabolóide de revolução.

Você sabe por que esse tipo de antena tem o formato parabólico?

Para essa compreensão, temos de estudar uma importante propriedade geométrica da parábola. Para isso, consideremos:

- um ponto P qualquer dessa parábola;
- uma reta r que passa por P e é paralela ao eixo e de simetria;
- uma reta t tangente à parábola em P .

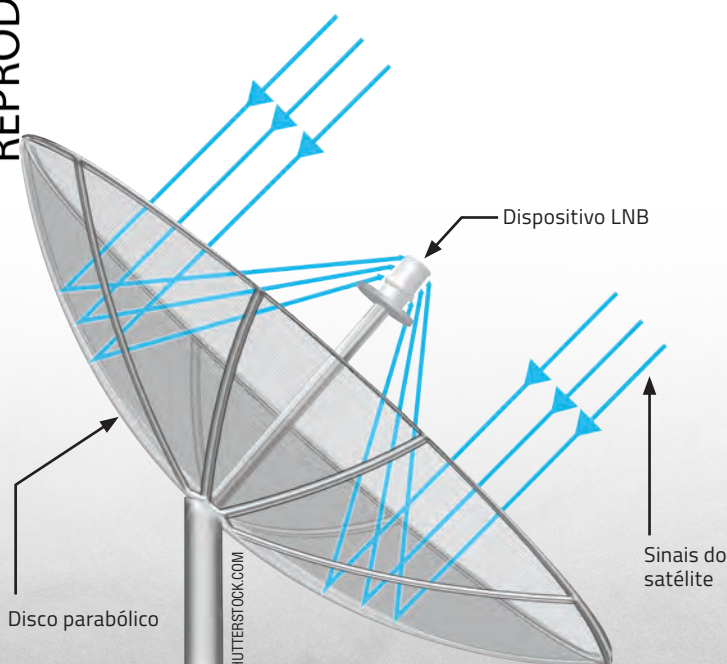
Com isso, é possível mostrar que o ângulo α formado entre r e t é congruente ao ângulo β formado entre \overline{FP} e t .



ILUSTRAÇÕES: CBOOK PRODUÇÕES

Essa propriedade é o que fundamenta a escolha do formato parabólico da antena, pois permite que esta seja posicionada de maneira que os sinais emitidos pelo satélite sejam recebidos no disco da antena, praticamente paralelos ao seu eixo de simetria. Com isso, esses sinais são irradiados e convergem para um único ponto – o foco –, no qual é instalado o dispositivo “conversor de baixo ruído” (conhecido como LNB), equipamento que converte os sinais recebidos em som e vídeo.

Fonte dos dados: LIMA, Elon Lages *et al.*
A matemática do ensino médio. 6. ed.
Rio de Janeiro: SBM, 2006. (Coleção do
Professor de Matemática, v. 1, p. 135-141).



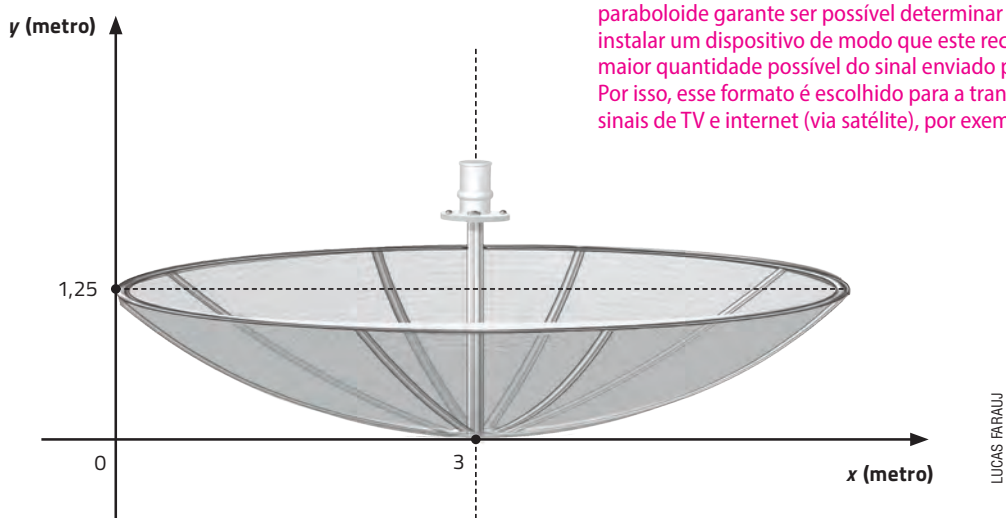
► Representação esquemática de uma antena parabólica e os sinais recebidos por ela (imagem sem escala; cores-fantasia).

PENSANDO NO ASSUNTO

Não escreva no livro.

1. Resposta esperada: Para que essas pessoas também sejam inseridas digitalmente e tenham outras oportunidades de aprendizado, entretenimento e interação.

1. De acordo com o texto, qual é a importância de se oferecer acesso às tecnologias da informação e da comunicação para as pessoas que vivem em áreas mais remotas?
2. Com base nas informações dadas no texto, apresente um argumento para justificar a escolha do formato da antena parabólica.
3. Observe, a seguir, a representação de uma antena parabólica.



2. Resposta esperada: A propriedade geométrica do parabolóide garante ser possível determinar um local para instalar um dispositivo de modo que este recepcione a maior quantidade possível do sinal enviado pelo satélite. Por isso, esse formato é escolhido para a transmissão de sinais de TV e internet (via satélite), por exemplo.

Sabendo que o disco parabólico dessa antena corresponde a um parabolóide, determine a equação de uma parábola que gera esse parabolóide ao ser rotacionada em torno de seu eixo de simetria, que é paralelo ao eixo das ordenadas do plano cartesiano. $5x^2 - 30x - 36y + 45 = 0$

4. Junte-se a três colegas para resolver esta questão.



Leiam o trecho de uma reportagem sobre a inclusão digital de um povo indígena brasileiro.

A importância do acesso à internet para os povos do Alto Rio Negro, segundo eles, consiste em permitir o acesso à informação e a consulta a serviços disponíveis aos cidadãos. Serve também à divulgação de notícias e diversas informações regionais graças a sites e blogs, como os que eles mesmos mantêm, preenchendo a ausência de veículos de comunicação cobrindo a região. [...]

[...]

[...] os projetos de comunicação também incidem sobre a organização política dos grupos. Isto porque as posições de chefia ou liderança estão sendo questionadas e reavaliadas neste processo. Não raro, as questões colocadas pela chegada da internet na comunidade reconfiguram esses papéis.

KLEIN, Tatiane; RENESSE, Nicodème de. **O que dizem (e pensam) os indígenas sobre as políticas de inclusão digital?** [S. l.]: Povos Indígenas no Brasil: ISA, 2023. Disponível em: [https://pib.socioambiental.org/pt/O_que_dizem_\(e_pensam\)_os_%C3%ADndios_sobre_as_pol%C3%ADticas_de_inclus%C3%A3o_digital%3F](https://pib.socioambiental.org/pt/O_que_dizem_(e_pensam)_os_%C3%ADndios_sobre_as_pol%C3%ADticas_de_inclus%C3%A3o_digital%3F). Acesso em: 18 jul. 2024.

Discutam o trecho apresentado e elaborem um texto expressando suas opiniões e possíveis impactos da inserção da tecnologia em comunidades indígenas, avaliando, por exemplo, aspectos culturais, econômicos e sociais. Se necessário, façam pesquisas complementares, incluindo comunidades indígenas localizadas na região em que vocês moram. **Resposta pessoal.**

O QUE ESTUDEI

Não escreva no livro.

1. Leia com atenção cada frase a seguir e faça uma reflexão sobre seu comportamento durante o estudo desta Unidade. Depois, responda se você **concorda**, **concorda parcialmente** ou **não concorda** com cada uma das afirmações. *Respostas pessoais.*

- | | | |
|--|---|--|
| a) Ouvi com atenção as explicações do professor. | d) Participei das discussões propostas à turma. | g) Respeitei os colegas nas atividades em grupo. |
| b) Quando precisei, pedi ajuda ao professor. | e) Fiz as atividades propostas na sala de aula. | h) Auxiliei os colegas quando eles tiveram dúvidas. |
| c) Auxiliei o professor quando ele me pediu. | f) Fiz as atividades escolares propostas para casa. | i) Levei para a sala de aula os materiais necessários. |

2. Nas fichas a seguir, estão indicados os principais conteúdos que estudamos nesta Unidade. Reflita sobre cada um deles e verifique se você precisa retomar algum para melhor compreendê-lo. *Resposta pessoal.*

Função quadrática

Gráfico de uma função quadrática

Valor máximo ou valor mínimo da função quadrática

Zeros de uma função quadrática

Conjunto imagem de uma função quadrática

Estudo do sinal de uma função quadrática

Fórmula resolutiva de uma equação do 2º grau

Vértice da parábola

Equação da parábola

3. Agora, para retomar de maneira colaborativa o estudo de um conteúdo desta Unidade, junte-se a dois colegas, e sigam as etapas. *Respostas pessoais*

1 SELECIONAR

Consultem os conteúdos indicados na atividade anterior e escolham um deles. Deem preferência a um conteúdo em que foi constatada necessidade de retomada de estudo.

2 REVISAR

Juntos, façam uma revisão do estudo desse conteúdo. É importante a participação de todos os integrantes nessa revisão.

4 APRESENTAR

Na apresentação, é importante usar uma linguagem adequada, simples e objetiva. É necessário oportunizar um momento para que cada integrante do grupo possa contribuir com as explicações. Ao final, vocês podem disponibilizar os materiais produzidos aos demais colegas da turma.

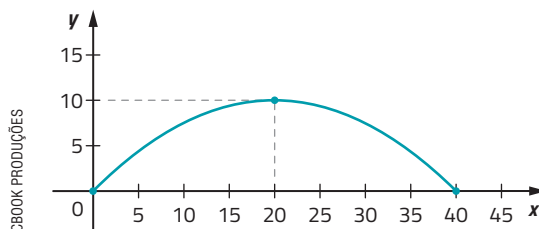
3 PREPARAR

Elaborem uma apresentação sobre esse conteúdo, o que pode ser realizado por meio de *slides*, cartazes, vídeo, entre outros recursos. Na apresentação, podem ser incluídos exemplos e atividades resolvidas. Também podem ser propostas atividades para que os demais colegas da turma resolvam.

4. Na abertura desta Unidade, foram apresentadas informações sobre o lançamento oblíquo. Agora, considere que, em uma partida de futebol feminino, uma jogadora realizou um chute de maneira que a bola percorreu uma trajetória parabólica. Considere que o gráfico a seguir corresponde a uma função quadrática g que modela a trajetória dessa bola do momento do chute até tocar o solo novamente pela primeira vez, de maneira que y indica a altura que a bola atinge (em metro) e x , a distância horizontal (em metro).

1 cm. Resposta esperada:

Não, uma vez que, nesse contexto, a medida de 1 cm no comprimento e na largura pode ser considerada uma imprecisão relacionada, entre outros motivos, aos instrumentos ou métodos de medição utilizados.



DICA

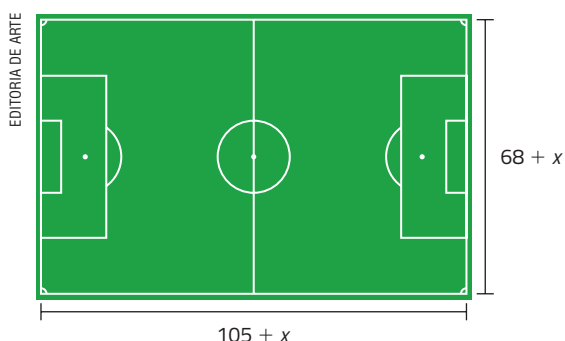
A distância horizontal corresponde à projeção ortogonal da bola na região plana do campo.

Considerando essas informações, resolva os itens a seguir.

- a) Qual é a altura máxima atingida pela bola? **10 m**
- b) A quantos metros do local do chute a bola tocou no campo pela primeira vez? **40 m**
- c) Defina a função g , indicando a lei de formação e o domínio. $g(x) = -\frac{x^2}{40} + x$; $D(g) = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x \leq 40\}$
- d) Agora, considere as informações a seguir.

Em relação às dimensões do campo de futebol, apesar de a Federação Internacional de Futebol (Fifa) determinar que os campos oficiais tenham comprimento entre 90 m e 120 m e largura entre 45 m e 90 m, eles recomendam que, para os principais jogos nacionais e internacionais, o campo tenha dimensões iguais a 105 m e 68 m.

Para sediar jogos da Copa do Mundo em 2014, o Estádio Mané Garrincha, em Brasília (DF), por exemplo, precisou adequar as dimensões do campo que eram um pouco maiores que as recomendadas pela Fifa, conforme representado a seguir.



DICA

Na imagem, as medidas estão indicadas em metro, e x representa a medida do comprimento e da largura do campo do Estádio Mané Garrincha que ultrapassavam as dimensões recomendadas pela Fifa.

Fonte dos dados: BRASIL. Ministério do Esporte. **Guia de recomendações de parâmetros e dimensionamentos para segurança e conforto em estádios de futebol**. Brasília, DF: ME: FGV, [2014]. p. 78. Disponível em: <http://arquivo.esporte.gov.br/arquivos/ascom/publicacoes/Guia%20de%20Recomendaes%20de%20Parmetros%20e%20Dimensionamentos%20para%20Segurana%20e%20Conforto%20em%20Estdios%20de%20Futebol.pdf>. Acesso em: 18 jul. 2024.

Com base nessas informações, resolva as questões.

- Escreva a lei de formação de uma função f para expressar a área A do campo do Estádio Mané Garrincha antes da adequação. $f(x) = x^2 + 173x + 7140$
- Supondo que a área desse campo era de 7 141,7301 m², use a calculadora e determine quantos centímetros eram necessários reduzir do comprimento e da largura para que ele ficasse de acordo com as dimensões recomendadas. Agora, responda: Você acredita que esse campo teve realmente de ser adequado em suas dimensões? Justifique.
- Esboce o gráfico de uma função $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ cuja lei de formação seja a mesma da função f que você indicou no primeiro item. Para isso, você pode utilizar um programa de computador.

Resposta nas **Orientações para o professor**.

PRATICANDO:

ENEM E VESTIBULARES

Não escreva no livro.

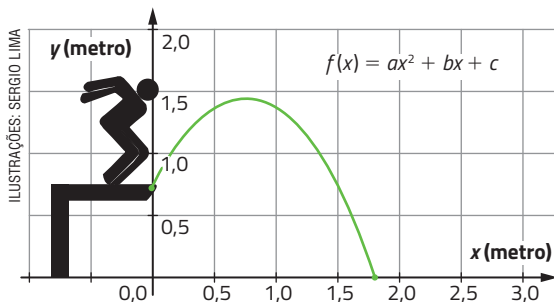
1. (Enem/MEC) Um túnel deve ser lacrado com uma tampa de concreto. A seção transversal do túnel e a tampa de concreto têm contornos de um arco de parábola e mesmas dimensões. Para determinar o custo da obra, um engenheiro deve calcular a área sob o arco parabólico em questão. Usando o eixo horizontal no nível do chão e o eixo de simetria da parábola como eixo vertical, obteve a seguinte equação para a parábola:

$$y = 9 - x^2, \text{ sendo } x \text{ e } y \text{ medidos em metros.}$$

Sabe-se que a área sob uma parábola como esta é igual a $\frac{2}{3}$ da área do retângulo cujas dimensões são, respectivamente, iguais à base e à altura da entrada do túnel. Qual é a área da parte frontal da tampa de concreto, em metro quadrado? **alternativa c**

- a) 18 b) 20 c) 36 d) 45 e) 54

2. (Enem/MEC) A trajetória de uma pessoa que pula de um andaime até o chão é descrita por uma função $y = f(x)$, sendo x e y medidos em metro, conforme mostra a figura.

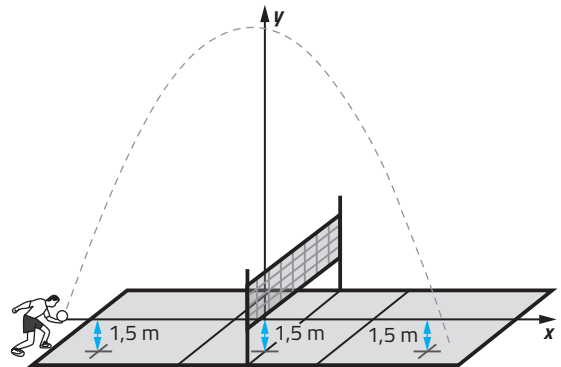


Seja D o domínio da função $f(x)$, como definida na figura. **alternativa b**

Para que a situação representada na figura seja real, o domínio dessa função deve ser igual a

- a) $\{x_2\}$, sendo x_2 a raiz positiva de $f(x)$.
 b) $\{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x \leq x_2\}$, sendo x_2 a raiz positiva de $f(x)$.
 c) $\{x \in \mathbb{R} \mid x_1 \leq x \leq x_2\}$, sendo x_1 e x_2 raízes de $f(x)$, com $x_1 < x_2$.
 d) $\{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\}$.
 e) $x \in \mathbb{R}$.

3. (Enem/MEC) Em jogos de voleibol, um saque é invalidado se a bola atingir o teto do ginásio onde ocorre o jogo. Um jogador de uma equipe tem um saque que atinge uma grande altura. Seu recorde foi quando a batida do saque se iniciou a uma altura de 1,5 m do piso da quadra, e a trajetória da bola foi descrita pela parábola $y = -\frac{x^2}{6} - \frac{7x}{3} + 12$, em que y representa a altura da bola em relação ao eixo x (das abscissas) que está localizado a 1,5 m do piso da quadra, como representado na figura. Suponha que em todas as partidas algum saque desse jogador atinja a mesma altura do seu recorde.



A equipe desse jogador participou de um torneio de voleibol no qual jogou cinco partidas, cada uma delas em um ginásio diferente. As alturas dos tetos desses ginásios, em relação aos pisos das quadras, são:

- ginásio I: 17 m; ▪ ginásio IV: 21 m;
- ginásio II: 18 m; ▪ ginásio V: 40 m.
- ginásio III: 19 m;

O saque desse atleta foi invalidado: **alternativa d**

- a) apenas no ginásio I.
 b) apenas nos ginásios I e II.
 c) apenas nos ginásios I, II e III.
 d) apenas nos ginásios I, II, III e IV.
 e) em todos os ginásios.

4. (UFRGS-RS) Se $p = 10$ e q são as raízes reais da equação $x^2 - Sx + 20 = 0$, então o valor de S é:

- a) 0. b) 2. c) 6. d) 10. e) 12.

alternativa e

5. (Enem/MEC) Ao analisar os dados de uma epidemia em uma cidade, peritos obtiveram um modelo que avalia a quantidade de pessoas infectadas a cada mês, ao longo de um ano. O modelo é dado por $p(t) = -t^2 + 10t + 24$, sendo t um número natural, variando de 1 a 12, que representa os meses do ano, e $p(t)$ a quantidade de pessoas infectadas no mês t do ano. Para tentar diminuir o número de infectados no próximo ano, a Secretaria Municipal de Saúde decidiu intensificar a propaganda oficial sobre os cuidados com a epidemia. Foram apresentadas cinco propostas (I, II, III, IV e V), com diferentes períodos de intensificação das propagandas:

- I) $1 \leq t \leq 2$; IV) $7 \leq t \leq 9$;
 II) $3 \leq t \leq 4$; V) $10 \leq t \leq 12$.
 III) $5 \leq t \leq 6$;

A sugestão dos peritos é que seja escolhida a proposta cujo período de intensificação da propaganda englobe o mês em que, segundo o modelo, há a maior quantidade de infectados. A sugestão foi aceita.

A proposta escolhida foi a: **alternativa c**

- a) I. b) II. c) III. d) IV. e) V.

6. (Enem/MEC) O chocolate é um dos alimentos mais apreciados e desejados do mundo. Uma loja especializada nesse produto oferece uma promoção para os bombons, que custam R\$ 2,00 cada. Cada cliente tem $x\%$ de desconto na compra de x bombons. A promoção é válida para a compra de até 40 bombons, ou seja, 40% é o desconto máximo possível. Queremos escrever uma expressão para V em função de x , com $x \leq 40$.

alternativa d

Qual é a expressão do valor V , em reais, na compra de x bombons da promoção, por cliente?

- a) $V = \frac{1}{50}x^2$ d) $V = x - \frac{1}{100}x^2$
 b) $V = 2 - \frac{1}{50}x$ e) $V = 2x - \frac{1}{100}x$
 c) $V = 2x - \frac{1}{50}x^2$

7. (UEG-GO) A temperatura, em graus Celsius, de um objeto armazenado em um determinado local é modelada pela função $f(x) = -\frac{x^2}{12} + 2x + 10$ com x dado em horas. A temperatura máxima atingida por esse objeto nesse local de armazenamento é de **alternativa d**

- a) 0 °C c) 12 °C e) 24 °C
 b) 10 °C d) 22 °C

8. (UFG-GO) Uma companhia aérea oferece locação de aeronaves, para viagem de ida e volta de São Paulo a Fortaleza, com as seguintes condições: um avião, com lotação para 160 pessoas custa R\$ 800,00 por pessoa e, se o número de desistentes for inferior a 80 pessoas, cada pessoa que permanecer no grupo deverá pagar R\$ 4,00 a mais por cada desistente do pacote de viagem. Se o número de desistentes for superior a 80 pessoas, a viagem será cancelada.

A viagem foi realizada, faturando-se R\$ 125.504,00, então, o número de pessoas que realizou a viagem foi igual a: **alternativa c**

- a) 84. b) 96. c) 148. d) 158.

9. (UEG-GO) Dadas as funções $f(x) = -x^2$ e $g(x) = 2x$, um dos pontos de intersecção entre as funções f e g é **alternativa b**

- a) (0, 2) d) (0, -2)
 b) (-2, -4) e) (-2, 4)
 c) (2, 4)

10. (Ifal) Certo fabricante, segundo levantamentos estatísticos, percebe que seus clientes não têm comprado mais de 100 de seus produtos por compras. Para incentivar as compras em maior quantidade, ele estabelece um preço unitário p por produto dado pela função $p(x) = 400 - x$, onde x é a quantidade de produtos comprados, considerando uma compra de, no máximo, 300 produtos. Sabendo-se que a receita de uma empresa é o valor arrecadado com a venda de uma certa quantidade de produtos, qual a receita máxima que essa empresa pode ter quando fechar uma venda com um determinado cliente, na moeda corrente no Brasil? **alternativa d**

- a) R\$ 200,00. d) R\$ 40.000,00.
 b) R\$ 400,00. e) R\$ 80.000,00.
 c) R\$ 20.000,00.

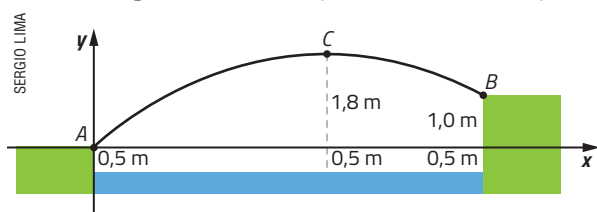
11. (UECE) No plano, com o sistema de coordenadas cartesianas usual, o gráfico da função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^2 + 2mx + 9$ é uma parábola que tangencia o eixo das abscissas, e um de seus pontos com ordenada igual a 9 tem abscissa negativa. Nessas condições, o valor do parâmetro m está entre **alternativa b**

- a) 1,5 e 2,5. c) 3,5 e 4,5.
 b) 2,5 e 3,5. d) 4,5 e 5,5.

- 12.** (UEMG) Considere a parábola de equação $y = ax^2 + bx + c$, com a , b e c reais e $a \neq 0$. Sabe-se que essa parábola intersecta o eixo das ordenadas no ponto $P(0, 5)$, que o ponto $Q(-2, 8)$ pertence à parábola e que a abscissa do vértice é $x_v = 2$. Nessas condições, a ordenada do vértice dessa parábola é dada por

a) $y_v = 2,5$.
b) $y_v = 3$.
c) $y_v = 3,5$.
d) $y_v = 4$.

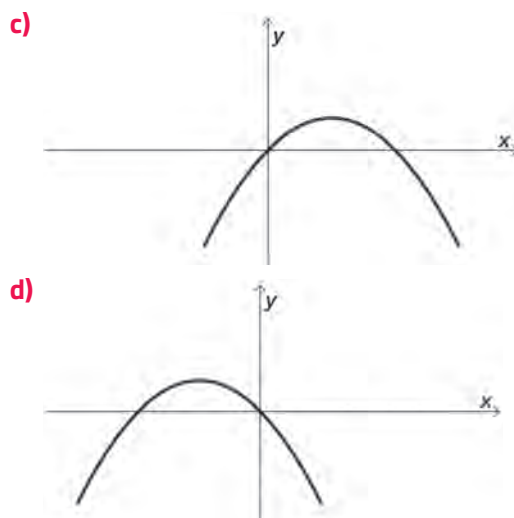
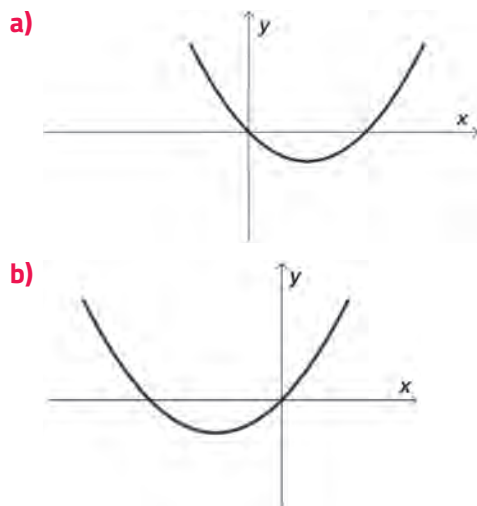
- 13.** (UERJ) Uma ponte com a forma de um arco de parábola foi construída para servir de travessia sobre um rio. O esquema a seguir representa essa ponte em um sistema de coordenadas xy . Nele, os pontos A , B e C correspondem, respectivamente, à margem esquerda, à margem direita e ao ponto mais alto da ponte.



As distâncias dos pontos A , B , e C até a superfície do rio são iguais, respectivamente, a 0,5 m, 1,5 m e 2,3 m.

Sabendo que o ponto C tem, nesse sistema, abscissa igual a 6 m, calcule, em metros, a largura do rio. **10 m**

- 14.** (Unicamp-SP) Sejam a e b números reais positivos. Considere a função quadrática $f(x) = x(ax + b)$, definida para todo número real x . No plano cartesiano, qual figura corresponde ao gráfico de $y = f(x)$? **alternativa b**



ILUSTRAÇÕES: UNICAMP, 2019

- 15.** (Udesc) Uma circunferência tem o seu raio variando de acordo com a imagem da função $f: [2, 6] \rightarrow \mathbb{R}$, onde $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 3x + 4$. A diferença entre o maior e o menor comprimento possível dessa circunferência é de: **alternativa c**

a) π
b) 8π
c) 9π
d) $8,5\pi$
e) 26π

- 16.** (IFRS) Uma farmácia vende em média 1050 remédios por mês. O preço médio dos medicamentos dessa farmácia é de R\$ 80,00. Para aumentar seu faturamento médio, o gerente pretende dar um desconto de R\$ 1,00 no preço médio dos medicamentos. Assim, 105 medicamentos serão vendidos a mais por mês. Nesse caso, qual é o preço médio dos medicamentos, em reais, que vai maximizar o faturamento da farmácia?

a) 80,00
b) 70,00
c) 45,00
d) 40,00
e) 35,00

- 17.** (UFPR) A distância que um automóvel percorre a partir do momento em que um condutor pisa no freio até a parada total do veículo é chamada de distância de frenagem. Suponha que a distância de frenagem d , em metros, possa ser calculada pela fórmula $d(v) = \frac{1}{120}(v^2 + 8v)$, sendo v a velocidade do automóvel, em quilômetros por hora, no momento em que o condutor pisa no freio.

a) Qual é a distância de frenagem de um automóvel que se desloca a uma velocidade de 40 km/h? **16 m**
b) A que velocidade um automóvel deve estar para que sua distância de frenagem seja de 53,2 m? **76 km/h**

RELAÇÕES MÉTRICAS E TRIGONOMETRIA NO TRIÂNGULO

Métodos científicos

Em geral, para determinar a validade de certo fato, pesquisadores utilizam algum método científico, por exemplo, o **método científico indutivo** e o **método científico dedutivo**.

O método indutivo parte de um caso particular para obter um resultado generalizado.

Por sua vez, o método dedutivo parte de uma ou mais premissas gerais, tidas como verdadeiras e amplamente aceitas, para obter conclusões a respeito de um resultado particular. Esse método é mais utilizado em áreas como Física e Matemática, para demonstrar leis e propriedades.



► Cientista analisando experimento em um laboratório.



► Cientista realizando estudo teórico de um experimento.

Não escreva no livro.

Após ler as informações, converse com os colegas e o professor sobre os itens a seguir.

1. Qual é o objetivo dos métodos científicos apresentados?
2. Como é obtida uma conclusão no método indutivo? E no método dedutivo?
3. Pense em algum conceito matemático que possa ser estudado por meio do método dedutivo. Explique com suas palavras como seriam as etapas de desenvolvimento metodológico.

Respostas nas **Orientações para o professor**.

Teorema de Tales

Na abertura desta Unidade, foram apresentadas informações sobre dois métodos científicos, entre eles, o método dedutivo, normalmente utilizado na Matemática. Há indícios de que a característica demonstrativa da Matemática tenha se iniciado com Tales de Mileto (c. 624-620 a.C.-c. 548-545 a.C.). Uma de suas principais contribuições à Matemática é o **teorema de Tales**, que estudaremos a seguir.

Você lembra o que é um feixe de retas paralelas? A partir desse conceito, vamos enunciar o teorema de Tales, um resultado que será bastante utilizado na resolução das atividades. Denominamos **feixe de retas paralelas** um conjunto de retas de um mesmo plano e paralelas entre si.

Teorema de Tales

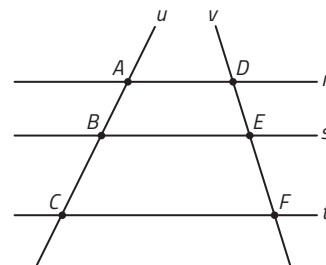
Um feixe de retas paralelas determina, em duas retas transversais, segmentos de reta ordenadamente proporcionais.

De acordo com esse teorema, ao considerar um feixe de retas paralelas r , s e t e duas retas, u e v , transversais a esse feixe, podemos escrever as proporções a seguir.

$$\frac{AB}{BC} = \frac{DE}{EF}$$

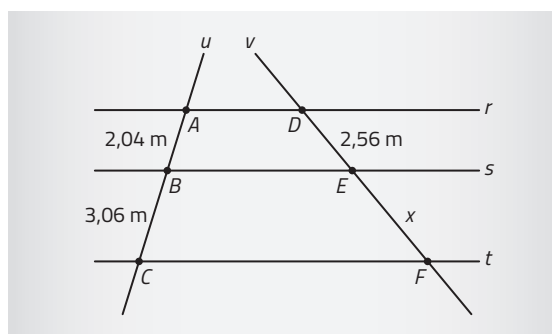
$$\frac{AC}{BC} = \frac{DF}{EF}$$

$$\frac{AC}{AB} = \frac{DF}{DE}$$



ILUSTRAÇÕES: CBOOK PRODUÇÕES

Observe, por exemplo, a representação de um feixe de retas paralelas r , s e t e de duas retas transversais a esse feixe, u e v .



Utilizando o teorema de Tales, podemos determinar a medida x de \overline{EF} .

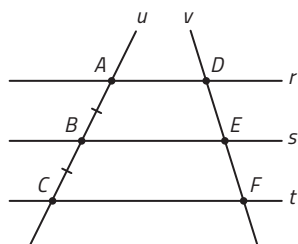
$$\frac{AB}{BC} = \frac{DE}{EF} \Rightarrow \frac{2,04}{3,06} = \frac{2,56}{x} \Rightarrow 2,04x = 7,8336 \Rightarrow x = \frac{7,8336}{2,04} = 3,84$$

Portanto, \overline{EF} mede 3,84 m.

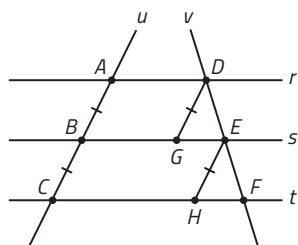
Vamos demonstrar a validade do teorema de Tales por meio do método dedutivo. Para isso, separamos em dois casos distintos: quando um feixe de retas paralelas determina, em uma reta transversal, segmentos de reta congruentes (caso 1); e quando esse feixe determina, nessa reta transversal, segmentos de reta com medidas racionais quaisquer (caso 2). Acompanhe.

Caso 1:

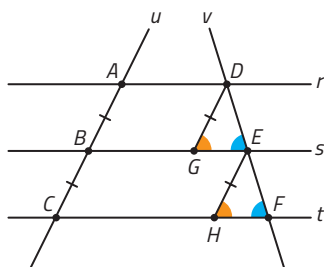
Seja um feixe de retas paralelas r , s e t , que determina na reta transversal u os segmentos de reta congruentes \overline{AB} e \overline{BC} . Uma reta transversal v cruza esse mesmo feixe de retas nos pontos D , E e F .



Traçando dois segmentos de reta \overline{DG} e \overline{EH} , paralelos à reta u , obtemos os paralelogramos $ABGD$ e $BCHE$, nos quais $\overline{AB} \equiv \overline{DG}$ e $\overline{BC} \equiv \overline{EH}$. Assim, $\overline{DG} \equiv \overline{EH}$.



Como os segmentos de reta \overline{DG} e \overline{EH} são paralelos e intersectam as retas paralelas s e t , os ângulos \widehat{DGE} e \widehat{EHF} são congruentes. Note que o par de ângulos $\widehat{GÊD}$ e $\widehat{HÊF}$ também são congruentes, pois são correspondentes.

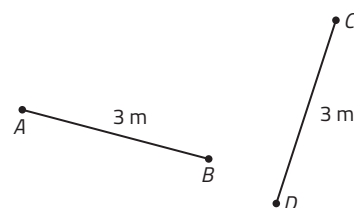


ILUSTRAÇÕES: CBOOK PRODUÇÕES

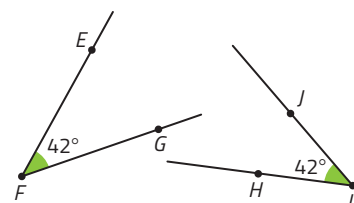
Assim, pelo caso de congruência de triângulos **LAA**, os triângulos DGE e EHF são congruentes. Logo, $\overline{DE} \equiv \overline{EF}$. Além disso, $\frac{AB}{BC} = \frac{DE}{EF} = 1$, ou seja, os segmentos de reta \overline{AB} e \overline{BC} são proporcionais aos segmentos de reta \overline{DE} e \overline{EF} .

DICA

Em Matemática, dizemos que existe congruência entre duas figuras se elas são idênticas no formato e no tamanho. Em particular, dois segmentos de reta são congruentes quando têm medidas iguais. O mesmo ocorre com os ângulos. Analise os exemplos.



- \overline{AB} e \overline{CD} são segmentos de reta congruentes, o que pode ser indicado da seguinte maneira: $\overline{AB} \equiv \overline{CD}$.



- \widehat{EFG} e \widehat{HIJ} são ângulos congruentes, o que pode ser indicado da seguinte maneira: $\widehat{EFG} \equiv \widehat{HIJ}$.

DICA

No caso 2, consideramos $m = 5$ e $n = 4$, ou seja, os segmentos de reta \overline{AB} e \overline{BC} divididos em 5 partes e em 4 partes de medida x , respectivamente. Porém é possível utilizar esses mesmos procedimentos para quaisquer m e n naturais positivos, de modo que x seja uma medida racional.

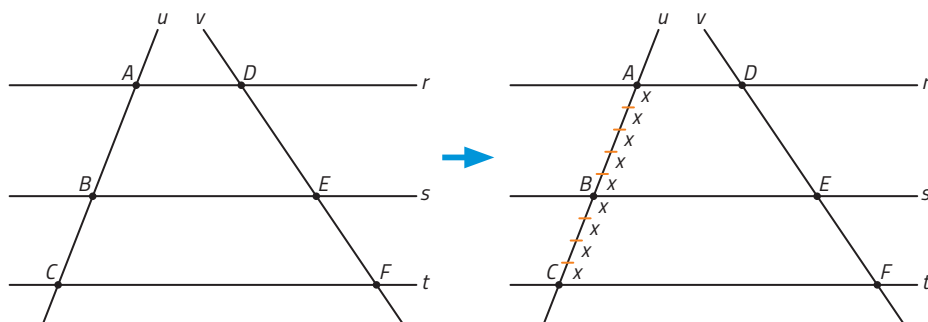
PARA PENSAR

Explique como dois segmentos de reta \overline{GH} e \overline{IJ} , medindo 5 cm e 3,4 cm, respectivamente, podem ser divididos igualmente em partes inteiras.

Uma resposta possível: Podemos considerar um número racional positivo x qualquer e uma unidade de medida de comprimento e dividir os segmentos de reta \overline{GH} e \overline{IJ} em partes iguais correspondentes a essa medida. Por exemplo, ao considerar $x = 0,2$ e a unidade centímetro, dividimos os segmentos de reta \overline{GH} e \overline{IJ} em 25 partes e 17 partes de medida 0,2 cm, respectivamente.

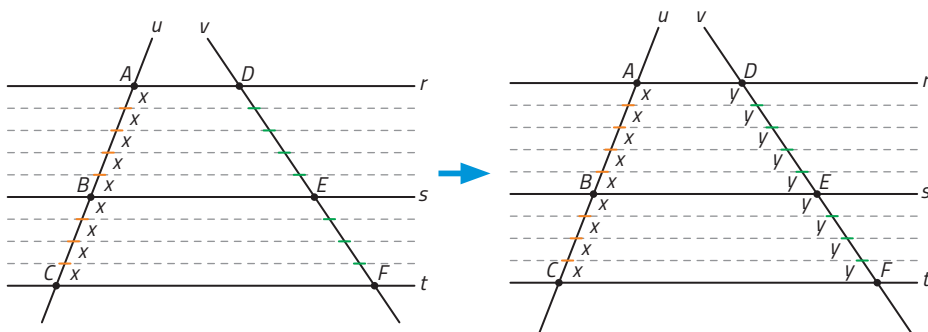
Caso 2:

Seja um feixe de retas paralelas r, s e t que determina, em uma reta transversal u , os segmentos de reta \overline{AB} e \overline{BC} com medidas racionais quaisquer. Dessa maneira, é possível dividir \overline{AB} e \overline{BC} em m e n segmentos de reta de medida x , respectivamente. Isso ocorre porque, nesse caso, pode-se estabelecer um número racional positivo x que divida \overline{AB} e \overline{BC} em quantidades inteiras de partes.



Ao traçar retas paralelas às do feixe, passando pelas extremidades dos segmentos de reta de medida x determinados em \overline{AB} e \overline{BC} , obtemos m segmentos de reta dividindo \overline{DE} e n segmentos de reta dividindo \overline{EF} , respectivamente, na reta transversal v .

Pelo caso 1, como temos um feixe de retas paralelas que determina na reta transversal u segmentos de reta congruentes de medida x , os segmentos de reta determinados em v também são congruentes entre si, de medida y , por exemplo.

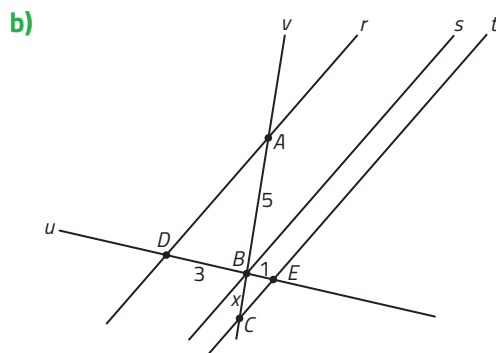
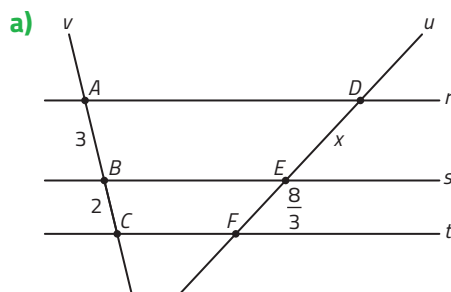


$$\text{Assim, } \frac{AB}{BC} = \frac{mx}{nx} = \frac{m}{n} \text{ e } \frac{DE}{EF} = \frac{my}{ny} = \frac{m}{n}; \text{ ou seja, } \frac{AB}{BC} = \frac{DE}{EF}.$$

Demonstramos, pelo método dedutivo, que o teorema de Tales é válido para os segmentos de reta \overline{AB} e \overline{BC} com medidas racionais. Porém esse teorema também é válido para esses segmentos de reta com medidas irracionais, o que optamos por não explicitar nem demonstrar nesta coleção.

ATIVIDADES RESOLVIDAS

R1. Em cada item, determine o valor de x considerando que as retas r , s e t são paralelas.



ILUSTRAÇÕES: CBOOK PRODUÇÕES

Resolução

a) Como as retas v e u são transversais que intersectam o feixe de retas paralelas r , s e t , podemos utilizar o teorema de Tales para escrever a proporção a seguir.

$$\frac{AB}{BC} = \frac{DE}{EF} \Rightarrow \frac{3}{2} = \frac{x}{\frac{8}{3}} \Rightarrow 2x = 8 \Rightarrow x = 4$$

Portanto, $x = 4$.

b) De maneira análoga ao item anterior, temos:

$$\frac{AB}{BC} = \frac{DB}{BE} \Rightarrow \frac{5}{x} = \frac{3}{1} \Rightarrow 3x = 5 \Rightarrow x = \frac{5}{3}$$

Portanto, $x = \frac{5}{3}$.

DICA

Note que os segmentos de reta \overline{DB} e \overline{BE} estão contidos em u e os segmentos de reta \overline{AB} e \overline{BC} estão contidos em v .

R2. Você sabe o que é tirolesa? Leia o trecho de um texto a seguir.

A tirolesa saiu do montanhismo. É uma técnica para o alpinista transpor obstáculos com abismo. O participante voa, preso a um cabo aéreo conectado a uma roldana.

DUARTE, Orlando. **História dos esportes**. 6. ed. rev. atual. São Paulo: Editora Senac, 2019. p. 39.

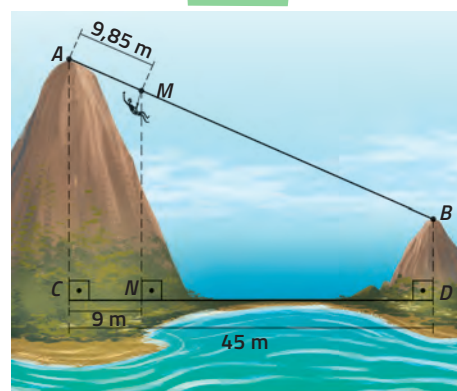
Com o objetivo de praticar tirolesa, um cabo de aço foi completamente esticado, com as extremidades fixadas no topo de dois montes (pontos A e B). Considerando uma pessoa que se encontrava no ponto M dessa tirolesa, conforme representado no esquema, quantos metros essa pessoa ainda deve percorrer para completar o trajeto?

Resolução

Observando o esquema, podemos notar que os segmentos de reta \overline{AC} , \overline{MN} e \overline{BD} são paralelos. Assim, aplicando o teorema de Tales:

$$\frac{CN}{ND} = \frac{AM}{MB} \Rightarrow \frac{9}{45 - 9} = \frac{9,85}{MB} \Rightarrow 9MB = 354,6 \Rightarrow MB = 39,4$$

Portanto, essa pessoa ainda deve percorrer 39,4 m para completar o trajeto da tirolesa.



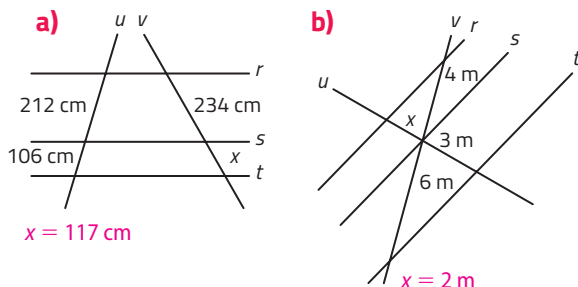
ARTUR FUJITA

2. Não, pois, para que João pudesse aplicar o teorema de Tales da maneira como ele fez, r , s e t deveriam formar um feixe de retas paralelas; no entanto, conforme o enunciado, apenas r e s são retas paralelas na figura construída por Isabella.

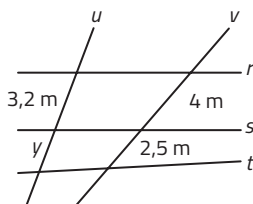
ATIVIDADES

Não escreva no livro.

1. Em cada item, determine o valor de x , sabendo que as retas r , s e t são paralelas.



2. Usando o **GeoGebra**, Isabella construiu a figura a seguir, em que o único par de retas paralelas é r e s . Depois, imprimiu a figura e propôs a um colega, João, que determinasse a medida y .



Aplicando o teorema de Tales, João resolveu a questão da seguinte maneira:

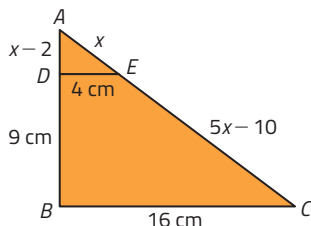
$$\frac{3,2}{y} = \frac{4}{2,5}$$

$$8 = 4y$$

$$y = 2, \text{ ou seja, } 2 \text{ m}$$

Podemos afirmar que a solução apresentada por João à questão proposta por Isabella está correta? Justifique.

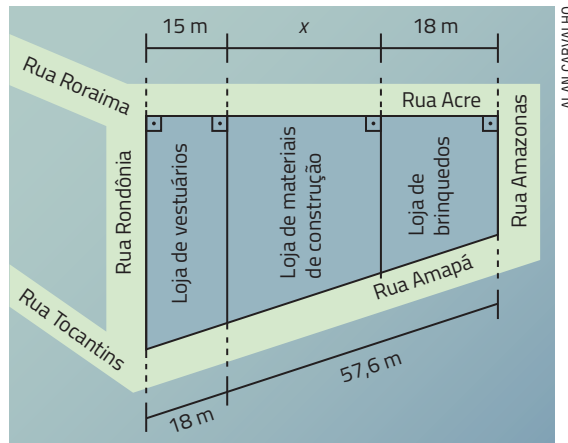
3. Analise a figura a seguir, cujas medidas estão expressas em centímetro.



Sabendo que os segmentos de reta \overline{DE} e \overline{BC} são paralelos, é possível afirmar que o perímetro do triângulo ABC é: **alternativa a**

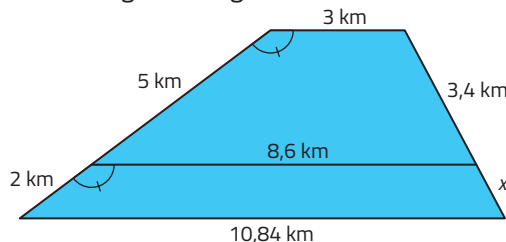
- a) 48 cm b) 46 cm c) 148 cm d) 24 cm
- Para resolver esta atividade, você utilizou todos os dados fornecidos no enunciado? Justifique. **Resposta esperada:** Não, pois a medida 4 cm de \overline{DE} não foi utilizada.

4. Marina é proprietária de uma loja de materiais de construção, situada na Rua Amapá e vizinha a duas lojas: uma de vestuário e outra de brinquedos. Em uma reforma, Marina pretende construir um novo muro no fundo do terreno da loja, que faz frente com a Rua Acre. Observe a representação do quarteirão onde se situam essas lojas.



alternativa b
Qual é o comprimento do muro a ser construído?

- a) 18 m b) 30 m c) 26 m d) 34 m
5. Uma propriedade rural, que tem formato de trapézio, será totalmente cercada. Além disso, será construída uma cerca dividindo essa propriedade em dois lotes menores, conforme mostra a figura a seguir.



Considerando que a cada metro de cerca construída tem-se um custo de R\$ 0,20, calcule o custo total para cercar essa propriedade conforme descrito. **R\$ 6.840,00**

6. Junte-se a um colega, e elaborem um problema em que seja necessário utilizar o teorema de Tales para resolvê-lo. Esse problema pode conter uma ilustração ou um esquema. Em seguida, troquem esse problema com o de outra dupla para que uma resolva o da outra. Juntos, verifiquem se as respostas estão corretas.

Elaboração dos estudantes.

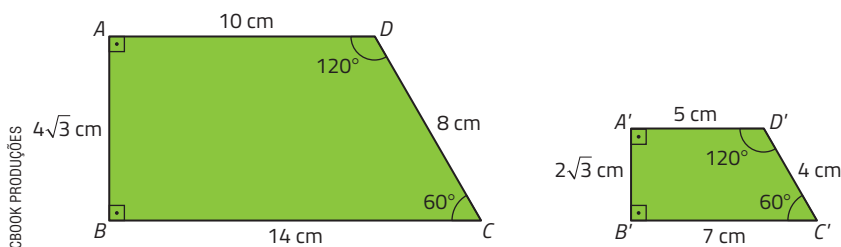
Semelhança de polígonos

Você já assistiu a filmes em que apareciam faixas pretas nas partes superior e inferior ou na lateral da imagem em um televisor? Isso acontece porque há diferentes formatos de vídeos que precisam ser adaptados quando reproduzidos em algumas telas. Essas faixas têm a função de manter a proporção da imagem original do vídeo sem que haja distorções. Um dos formatos de tela mais utilizados atualmente é o *widescreen*, em que as imagens têm formato retangular, cuja razão entre o maior e o menor lado é 16:9. Antigamente, o formato mais comum era o 4:3. Assim, ao assistir a filmes em formato *widescreen* em um televisor antigo, com tela no formato 4:3, a imagem é adaptada com as faixas pretas nas partes superior e inferior.

Note que as imagens em cada televisor têm tamanhos diferentes, mas têm o mesmo formato. A adaptação de uma imagem em diferentes tamanhos, de maneira que seu formato se mantenha sem distorções, pode ser utilizada para compreendermos a ideia de **semelhança de polígonos**.

Dois polígonos são semelhantes quando os ângulos internos correspondentes são congruentes e os lados correspondentes são proporcionais. A razão k entre as medidas de dois lados correspondentes de polígonos semelhantes é chamada de **razão de semelhança**.

Analise, por exemplo, os polígonos representados a seguir.



Podemos afirmar que esses polígonos são semelhantes, pois:

- os ângulos internos correspondentes são congruentes:

$$\hat{A}\hat{B}\hat{C} \equiv \hat{A}'\hat{B}'\hat{C}', \hat{A}\hat{D}\hat{C} \equiv \hat{A}'\hat{D}'\hat{C}', \hat{B}\hat{A}\hat{D} \equiv \hat{B}'\hat{A}'\hat{D}' \text{ e } \hat{B}\hat{C}\hat{D} \equiv \hat{B}'\hat{C}'\hat{D}';$$

- os lados correspondentes são proporcionais:

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{CD}{C'D'} = \frac{AD}{A'D'} \Rightarrow \frac{4\sqrt{3}}{2\sqrt{3}} = \frac{14}{7} = \frac{8}{4} = \frac{10}{5} = 2.$$



► Televisor com tela em formato 4:3 e imagem em formato *widescreen* (16:9) (imagem sem escala).



► Televisor de 32" com tela e imagem em formato *widescreen* (imagem sem escala).

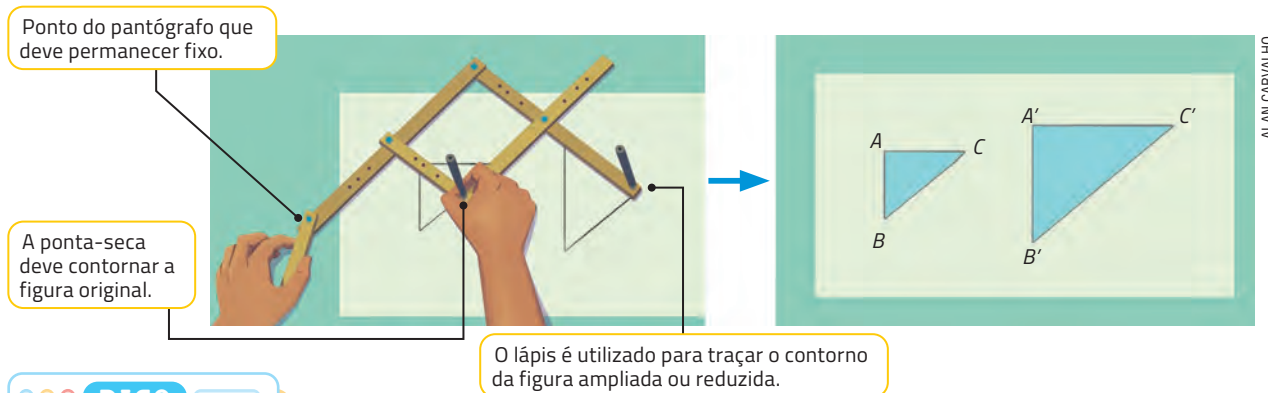
Resposta esperada: Não, pois a razão de semelhança entre os polígonos $A'B'C'D'$ e $ABCD$ é $\frac{1}{2}$, enquanto a razão de semelhança entre os polígonos $ABCD$ e $A'B'C'D'$ é 2.

PARA PENSAR

As razões de semelhança entre os polígonos $A'B'C'D'$ e $ABCD$, nessa ordem, e na ordem contrária, ou seja, $ABCD$ e $A'B'C'D'$, são iguais? Justifique.

● Semelhança de triângulos

Utilizando um instrumento chamado pantógrafo, é possível obter ampliações ou reduções de figuras. Nesse caso, como apenas o tamanho da figura é ajustado, mantendo-se seu formato, a figura original e a figura obtida são semelhantes. Acompanhe como obter a ampliação de um triângulo ABC utilizando um pantógrafo.



DICA

Ao ampliar o triângulo ABC com o pantógrafo, obtém-se o triângulo semelhante $A'B'C'$, pois os ângulos internos correspondentes desses triângulos são congruentes e os lados correspondentes são proporcionais.

Na página 211, estudamos que, para dois polígonos serem semelhantes, é necessário que seus ângulos internos correspondentes sejam congruentes e que seus lados correspondentes sejam proporcionais. Nesse caso, como os triângulos ABC e $A'B'C'$ são semelhantes, temos:

- $\hat{A}BC \equiv \hat{A}'B'C'$, $\hat{A}CB \equiv \hat{A}'C'B'$ e $\hat{B}AC \equiv \hat{B}'A'C'$;
- $\frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'} = \frac{BC}{B'C'}$.

Indicamos que esses triângulos são semelhantes da seguinte maneira:

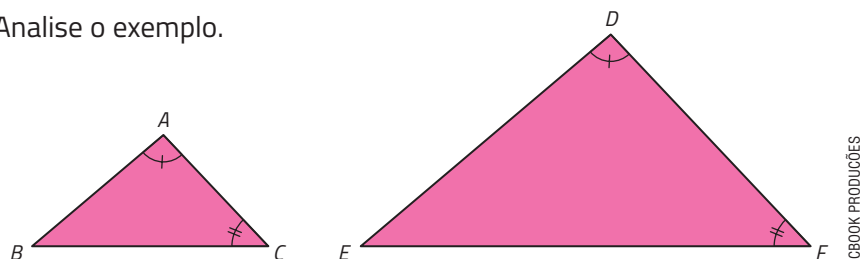
$$\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$$

Agora, estudaremos casos que permitem garantir que dois triângulos são semelhantes sem, necessariamente, conhecer as medidas de todos os seus lados e de todos os seus ângulos internos. Esses casos podem ser demonstrados, o que optamos por não explicitar nesta coleção.

1º caso – Ângulo, ângulo (AA)

Dois triângulos são semelhantes se tiverem dois ângulos internos correspondentes congruentes.

Analise o exemplo.

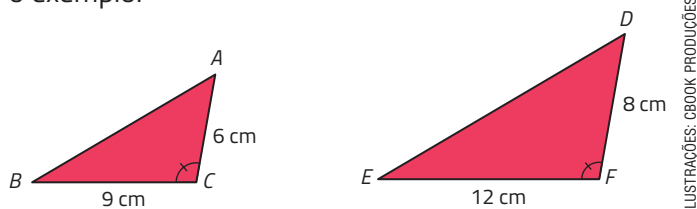


Como $\hat{B}AC \equiv \hat{E}DF$ e $\hat{A}CB \equiv \hat{D}FE$, então $\triangle ABC \sim \triangle DEF$.

2º caso – Lado, ângulo, lado (LAL)

Dois triângulos são semelhantes se tiverem dois lados correspondentes proporcionais e se os ângulos internos formados por esses lados forem congruentes.

Analise o exemplo.



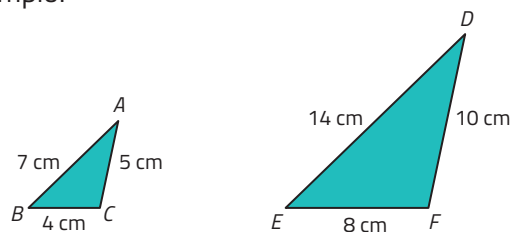
ILUSTRAÇÕES: CBOOK PRODUÇÕES

Como $\frac{AC}{DF} = \frac{BC}{EF} = \frac{3}{4}$ e $\hat{BCA} \equiv \hat{EFD}$, então $\triangle ABC \sim \triangle DEF$.

3º caso – Lado, lado, lado (LLL)

Dois triângulos são semelhantes se tiverem três lados correspondentes proporcionais.

Analise o exemplo.



Como $\frac{AB}{DE} = \frac{AC}{DF} = \frac{BC}{EF} = \frac{1}{2}$, então $\triangle ABC \sim \triangle DEF$.

PARA PENSAR

Para verificar os casos de semelhança de triângulos apresentados, desenhe no **GeoGebra** dois triângulos quaisquer que apresentem as condições indicadas em cada caso. Por exemplo, para o caso **LLL**, desenhe dois triângulos que tenham os três lados correspondentes proporcionais. Depois, faça medições e confirme se os triângulos construídos são semelhantes.

Construção do estudante.

Teorema fundamental da semelhança

Observe, na figura, uma reta r , paralela ao lado \overline{BC} de um triângulo ABC , que intersecta os lados \overline{AB} e \overline{AC} nos pontos D e E , respectivamente.

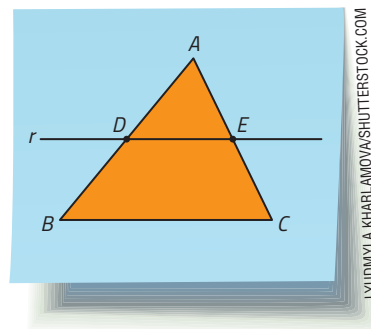
Como a reta r é paralela ao lado \overline{BC} , temos, pelo teorema de Tales, que:

$$\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC}$$

Sabemos que \hat{DAE} e \hat{BAC} são ângulos coincidentes e, portanto, congruentes. Assim, pelo caso de semelhança de triângulos **LAL**, temos que $\triangle ABC \sim \triangle ADE$.

Teorema fundamental da semelhança

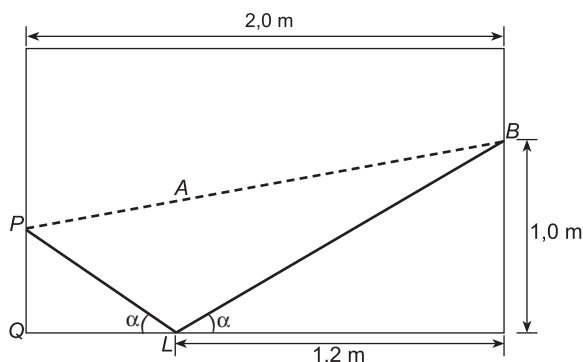
Toda reta paralela a um dos lados de um triângulo e que intersecta os outros lados em dois pontos distintos define outro triângulo, que é semelhante ao triângulo original.



LYUDMYLA KHARLAMOVA/SHUTTERSTOCK.COM

ATIVIDADE RESOLVIDA

R3. (Cefet-MG) A ilustração a seguir representa uma mesa de sinuca retangular, de largura e comprimento iguais a 1,5 e 2,0 m, respectivamente. Um jogador deve lançar a bola branca do ponto B e acertar a preta no ponto P , sem acertar nenhuma outra, antes. Como a amarela está no ponto A , esse jogador lançará a bola branca até o ponto L , de modo que a mesma possa rebater e colidir com a preta.



Se o ângulo da trajetória de incidência da bola na lateral da mesa e o ângulo de rebatimento são iguais, como mostra a figura, então a distância de P a Q , em cm, é aproximadamente

- a) 67 c) 74
b) 70 d) 81

Resolução

Para resolver essa atividade, podemos realizar as seguintes etapas.

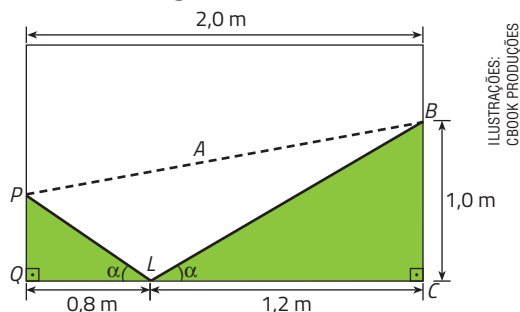
1ª COMPREENDER O ENUNCIADO

Do enunciado, temos que:

- a largura e o comprimento do retângulo, que representa a mesa, são 1,5 m e 2,0 m, respectivamente;
- a bola branca, no ponto B , deverá atingir a bola preta, no ponto P , passando pelo ponto L ;
- as medidas do ângulo da trajetória de incidência da bola na lateral da mesa e do ângulo de rebatimento são iguais;
- precisamos determinar a distância entre P e Q .

2ª ELABORAR UM PLANO

Considerando a figura apresentada, podemos destacar dois triângulos e indicar a medida QL .



Pelo caso **AA** de semelhança de triângulos (ângulos de medidas α e 90°), podemos afirmar que os triângulos PQL e BCL são semelhantes. Nesse caso, temos que os lados correspondentes desses triângulos são proporcionais e, então, é possível determinar a medida PQ escrevendo essa proporção.

3ª EXECUTAR UM PLANO

Como $\triangle PQL \sim \triangle BCL$, temos que:

$$\frac{PQ}{BC} = \frac{QL}{CL} \Rightarrow \frac{PQ}{1} = \frac{0,8}{1,2} \Rightarrow PQ = \frac{2}{3} \approx 0,67$$

Portanto, a distância PQ é de aproximadamente 0,67 m ou 67 cm.

4ª VERIFICAR OS RESULTADOS

Para verificar o resultado obtido, podemos considerar $\frac{2}{3}$ como o valor de PQ e verificar se as

razões $\frac{PQ}{BC}$ e $\frac{QL}{CL}$ formam uma proporção.

$$\frac{PQ}{BC} = \frac{\frac{2}{3}}{1} = \frac{2}{3} \quad \text{e} \quad \frac{QL}{CL} = \frac{0,8}{1,2} = \frac{2}{3}$$

$$\text{Assim, } \frac{PQ}{BC} = \frac{QL}{CL}.$$

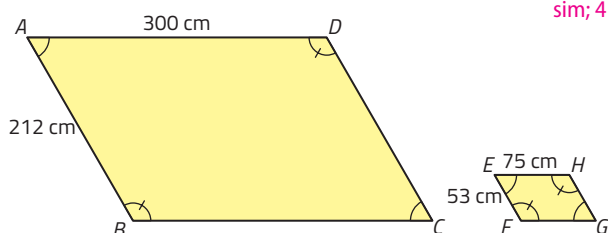
Portanto, a alternativa **a** é a correta.

11. b) Sim, elas têm formatos de polígonos semelhantes quando obtidas nas resoluções **A, B e D** e quando obtidas nas resoluções **C e E**. Nessas situações, têm, respectivamente, ângulos internos congruentes (ângulos retos) e lados correspondentes proporcionais.

ATIVIDADES

Não escreva no livro.

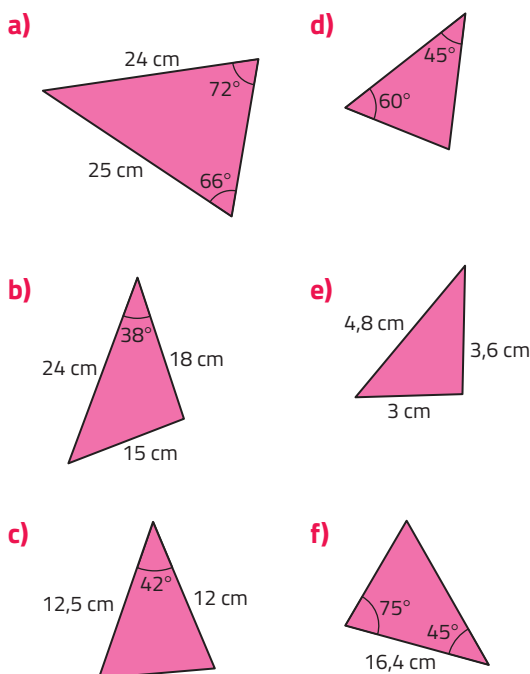
7. Os paralelogramos $ABCD$ e $EFGH$ representam a seguir são semelhantes? Caso sejam semelhantes, determine a razão de semelhança.



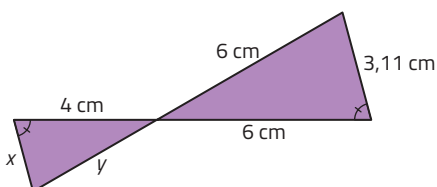
8. Identifique quais pares de triângulos representados a seguir são semelhantes e registre qual caso de semelhança você utilizou para identificá-los. **a e c: caso LAL; b e e: caso LLL; d e f: caso AA**

DICA

As figuras não são proporcionais entre si.



9. Determine os valores de x e y , considerando que os ângulos de mesma marcação na figura a seguir são congruentes. $x \approx 2,07$ cm e $y = 4$ cm



ILUSTRAÇÕES:
CBOOK PRODUÇÕES

10. a) Resposta nas **Orientações para o professor**.

10. Uma escada rolante de 10 m de extensão tem seu ponto mais alto situado a 5 m do solo. Ao subir essa mesma escada, partindo de seu ponto mais baixo, Pablo percorreu certa distância x e atingiu um ponto que se situa a 2 m do solo.

a) Desenhe uma figura para representar a situação descrita.

b) Qual é a distância x percorrida por Pablo? **4 m**

11. Na página **211**, estudamos que existem diferentes formatos de tela e que, entre eles, destacam-se o formato *DVD* padrão e o *widescreen*. As razões entre duas dimensões (maior e menor) de cada um desses formatos são, respectivamente, 4:3 e 16:9.

Observe algumas das resoluções, em formato retangular, disponíveis para reprodução em computadores.

Resolução de imagem **A**: 800×600 pixels.

Resolução de imagem **B**: $1\,600 \times 1\,200$ pixels.

Resolução de imagem **C**: $1\,280 \times 720$ pixels.

Resolução de imagem **D**: $1\,024 \times 768$ pixels.

Resolução de imagem **E**: $1\,600 \times 900$ pixels.

a) Determine quais dessas resoluções podem ser utilizadas para exibir sem ajustes um conteúdo em formato:

- de *DVD* padrão; **A, B e D**
- *widescreen*. **C e E**

b) As imagens retangulares determinadas nas resoluções apresentadas têm formato de polígonos semelhantes? Comente.

12. Ainda sobre o contexto apresentado na atividade **11**, reúnam-se em duplas, realizem uma pesquisa sobre outros formatos de tela e, com base nessas informações, elaborem um problema que envolva a ideia de semelhança de figuras. Em seguida, troquem esse problema com outra dupla para que uma resolva o da outra. Juntos, verifiquem se as respostas estão corretas. **Elaboração dos estudantes**.

Resposta esperada: Agudo, pois a soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo qualquer é 180° e, subtraindo desse valor a medida do ângulo reto, temos que a soma das medidas dos demais ângulos internos tem de ser igual a 90° . Resposta esperada: Porque a hipotenusa é o lado oposto ao maior ângulo interno do triângulo retângulo (ângulo reto).

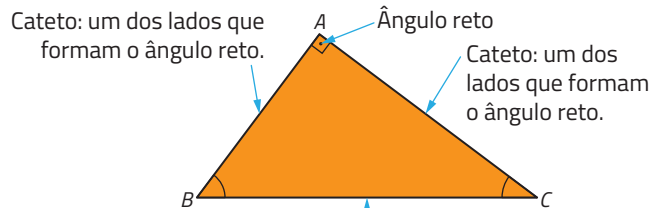


Relações métricas no triângulo retângulo

PARA PENSAR

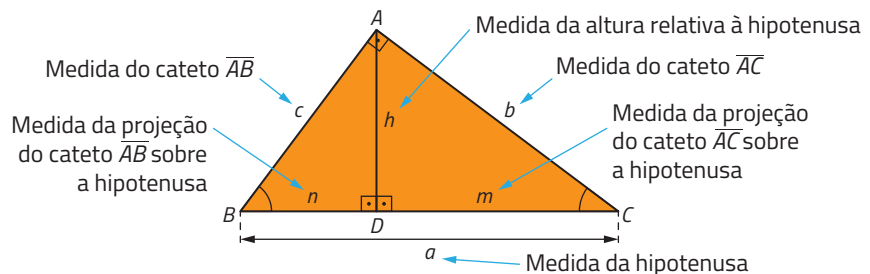
Os demais ângulos internos de um triângulo retângulo, além do ângulo reto, podem ser classificados de que maneira: agudo, reto, obtuso ou raso? Por que a hipotenusa é o maior lado de um triângulo retângulo? Justifique as respostas.

Você provavelmente já estudou que todo triângulo com um ângulo interno reto é denominado **triângulo retângulo**. O lado oposto a esse ângulo reto é a **hipotenusa**, e os outros dois lados são os **catetos** do triângulo retângulo. Essas informações estão destacadas no triângulo retângulo ABC da figura a seguir.



Hipotenusa: lado oposto ao ângulo reto e maior lado de um triângulo retângulo

Agora, indicamos nesse triângulo retângulo a medida a da hipotenusa e as medidas b e c dos catetos. Além disso, traçamos o segmento de reta \overline{AD} de medida h , correspondente à altura desse triângulo relativa à hipotenusa, e determinamos os segmentos de reta \overline{BD} e \overline{DC} de medidas n e m , respectivamente.

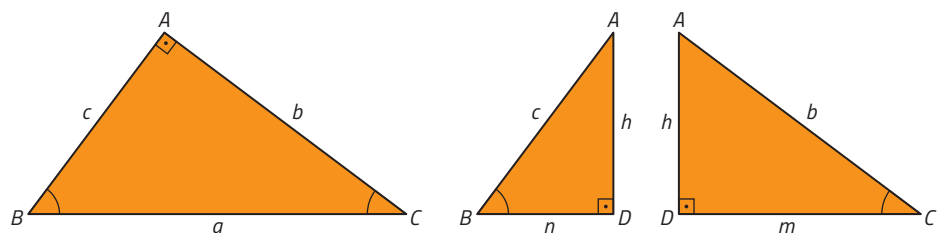


DICA

A projeção ortogonal de um ponto P em um segmento de reta \overline{RS} , com $P \notin \overline{RS}$, corresponde ao ponto P_1 em \overline{RS} , de maneira que $\overline{PP_1}$ seja uma reta perpendicular a \overline{RS} .

No triângulo ABC , a projeção ortogonal do cateto \overline{AB} sobre a hipotenusa \overline{BC} é dada pela projeção ortogonal de cada ponto de \overline{AB} sobre \overline{BC} e corresponde ao segmento de reta \overline{BD} .

Considerando essa representação, podemos destacar três triângulos retângulos: ABC , DBA e DAC . Observe.



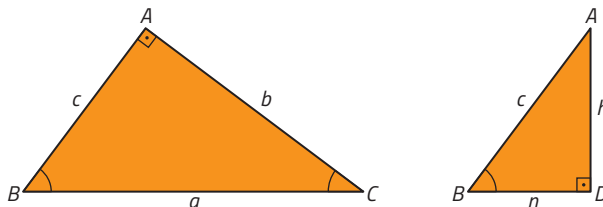
Em relação aos três triângulos obtidos, podemos destacar a seguinte propriedade.

Em um triângulo retângulo ABC qualquer, ao traçarmos sua altura relativa à hipotenusa, obtemos dois triângulos semelhantes, que também são semelhantes ao triângulo ABC .

Podemos verificar que esses triângulos são semelhantes dois a dois e, com base nessas semelhanças, escrever proporções envolvendo as medidas dos lados desses triângulos.

Analise cada caso.

- Triângulos ABC e DBA .



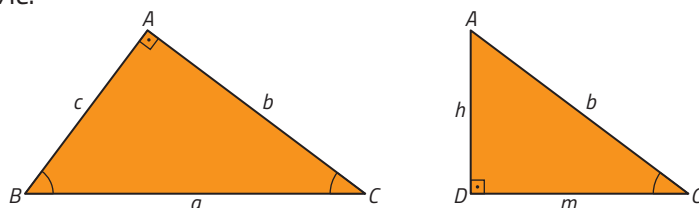
Esses triângulos têm dois pares de ângulos internos correspondentes congruentes: ângulos $B\hat{A}C$ e $B\hat{D}A$ (ângulos retos) e ângulos $A\hat{B}C$ e $D\hat{B}A$ (ângulos coincidentes). Portanto, pelo caso de semelhança de triângulos **AA**, temos que $\triangle ABC \sim \triangle DBA$. Assim:

$$\frac{a}{c} = \frac{b}{h} \Rightarrow a \cdot h = b \cdot c$$

$$\frac{a}{c} = \frac{c}{n} \Rightarrow c^2 = a \cdot n$$

$$\frac{b}{h} = \frac{c}{n} \Rightarrow c \cdot h = b \cdot n$$

- Triângulos ABC e DAC .



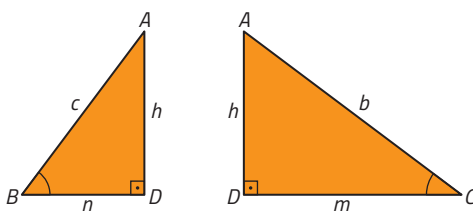
Esses triângulos têm dois pares de ângulos internos correspondentes congruentes: ângulos $B\hat{A}C$ e $D\hat{A}C$ (ângulos retos) e ângulos $A\hat{C}B$ e $D\hat{C}A$ (ângulos coincidentes). Portanto, pelo caso de semelhança de triângulos **AA**, temos que $\triangle ABC \sim \triangle DAC$. Assim:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{h} \Rightarrow a \cdot h = b \cdot c$$

$$\frac{a}{b} = \frac{b}{m} \Rightarrow b^2 = a \cdot m$$

$$\frac{c}{h} = \frac{b}{m} \Rightarrow c \cdot m = b \cdot h$$

- Triângulos DBA e DAC .



ILUSTRAÇÕES: CBOOK PRODUÇÕES

Conforme os casos anteriores, cada um desses dois triângulos é semelhante ao triângulo ABC . Portanto, podemos afirmar que $\triangle DBA \sim \triangle DAC$. Assim:

$$\frac{c}{b} = \frac{h}{m} \Rightarrow b \cdot h = c \cdot m$$

$$\frac{c}{b} = \frac{n}{h} \Rightarrow c \cdot h = b \cdot n$$

$$\frac{h}{m} = \frac{n}{h} \Rightarrow h^2 = m \cdot n$$

Organizando as relações obtidas, temos:

$$b \cdot h = c \cdot m$$

$$c^2 = a \cdot n$$

$$h^2 = m \cdot n$$

$$c \cdot h = b \cdot n$$

$$b^2 = a \cdot m$$

$$a \cdot h = b \cdot c$$

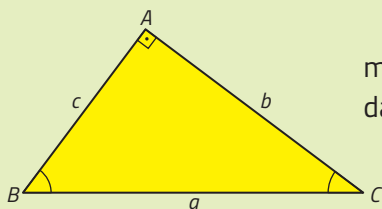
$$a = m + n$$

Essas relações são chamadas de **relações métricas no triângulo retângulo** e são bastante úteis na resolução de atividades envolvendo esse tipo de polígono.

Adicionando membro a membro as relações $b^2 = a \cdot m$ e $c^2 = a \cdot n$, podemos determinar outra relação envolvendo as medidas dos lados de um triângulo retângulo. Acompanhe.

$$a \cdot m + a \cdot n = b^2 + c^2 \Rightarrow a \cdot (m + n) = b^2 + c^2 \Rightarrow a \cdot a = b^2 + c^2 \Rightarrow a^2 = b^2 + c^2$$

Essa relação obtida consiste em um dos teoremas mais conhecidos na Matemática: o **teorema de Pitágoras**, enunciado a seguir.



Em um triângulo retângulo qualquer, o quadrado da medida da hipotenusa é igual à soma dos quadrados das medidas dos catetos.

$$a^2 = b^2 + c^2$$

MATEMÁTICA NA HISTÓRIA

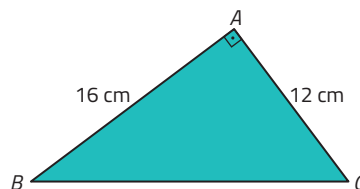
O teorema de Pitágoras é uma das produções matemáticas gregas mais famosas. Seu nome é uma homenagem a Pitágoras de Samos (c. 570 a.C.-500-490 a.C.), considerado o primeiro a verificar a validade dessa propriedade para qualquer triângulo retângulo. No entanto, há indícios de que ideias desse teorema, com base em medições, já eram conhecidas pelos babilônios cerca de um milênio antes do tempo de Pitágoras.

Fonte dos dados: EVES, Howard. **Introdução à história da matemática**. Tradução: Hygino Hugueros Domingues. 4. ed. Campinas: Editora da Unicamp, 2007. p. 103-104.

ATIVIDADES RESOLVIDAS

R4. Observe o triângulo ABC e determine a medida:

- da hipotenusa;
- da altura relativa à hipotenusa;
- das projeções dos catetos sobre a hipotenusa.



ILUSTRAÇÕES:
CBOOK PRODUÇÕES

Resolução

a) Representando a medida da hipotenusa por a , pelo teorema de Pitágoras, temos:

$$a^2 = 16^2 + 12^2 \Rightarrow a^2 = 400 \Rightarrow a = \pm\sqrt{400} \Rightarrow \begin{cases} a = 20 \\ \text{ou} \\ a = -20 \text{ (não convém)} \end{cases}$$

Portanto, a hipotenusa desse triângulo mede 20 cm.

b) Representando por h , b e c , respectivamente, as medidas da altura relativa à hipotenusa, do cateto de 12 cm e do cateto de 16 cm, temos:

$$a \cdot h = b \cdot c \Rightarrow 20 \cdot h = 12 \cdot 16 \Rightarrow 20h = 192 \Rightarrow h = 9,6$$

Portanto, a altura desse triângulo relativa à hipotenusa é 9,6 cm.

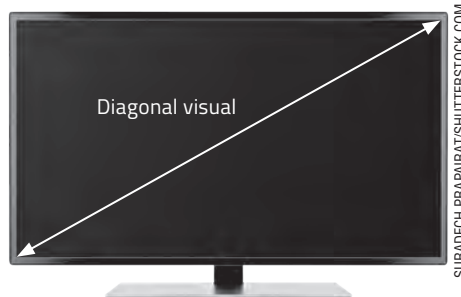
c) Representando por m e n , respectivamente, as projeções sobre a hipotenusa dos catetos de 12 cm e de 16 cm, temos:

$$b^2 = a \cdot m \Rightarrow 12^2 = 20 \cdot m \Rightarrow 144 = 20m \Rightarrow m = 7,2$$

$$c^2 = a \cdot n \Rightarrow 16^2 = 20 \cdot n \Rightarrow 256 = 20n \Rightarrow n = 12,8$$

Portanto, as projeções dos catetos sobre a hipotenusa medem 7,2 cm e 12,8 cm.

R5. Você possivelmente já notou que uma informação a se considerar no momento de comprar um televisor é a medida indicada em **polegada**. Essa medida corresponde ao comprimento da diagonal visual do televisor, ou seja, da diagonal da região retangular que o telespectador efetivamente enxerga como imagem. Uma polegada, indicada por 1", equivale a aproximadamente 2,54 cm.



SURADECH PRAIRA/SHUTTERSTOCK.COM

Determinado modelo de televisor tem a região retangular visual com 70 cm de comprimento e 39,4 cm de altura. Assim, podemos indicar que esse modelo de televisor tem uma tela de aproximadamente:

- a) 29" c) 39" e) 55"
b) 32" d) 42"

Resolução

Com base nas informações do enunciado e representando a medida da diagonal da tela desse televisor por a , podemos utilizar o teorema de Pitágoras para determinar essa medida.

$$a^2 = 39,4^2 + 70^2 \Rightarrow a^2 = 6452,36 \Rightarrow \\ \Rightarrow a = \pm \sqrt{6452,36} \Rightarrow \begin{cases} a \approx 80,33 \\ \text{ou} \\ a \approx -80,33 \text{ (não convém)} \end{cases}$$

Assim, a diagonal da tela desse televisor mede aproximadamente 81,5 cm. Convertendo essa medida para polegada, obtemos:

$$80,33 : 2,54 \approx 32$$

Portanto, a alternativa **b** é a correta, pois a diagonal da tela desse televisor mede aproximadamente 32".

Resposta pessoal.

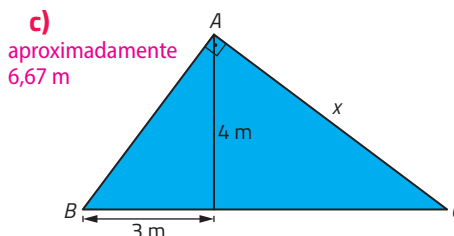
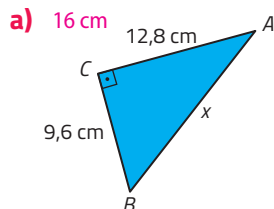
PARA PENSAR

Como estudado anteriormente, algumas telas de televisores têm um formato padrão chamado *widescreen*, em que é mantida a proporção 16:9 entre as medidas das dimensões da tela retangular. Pesquise a medida da diagonal, em polegada, de um televisor com tela nesse formato e, por meio de cálculos, determine as medidas aproximadas do comprimento e da altura dessa tela.

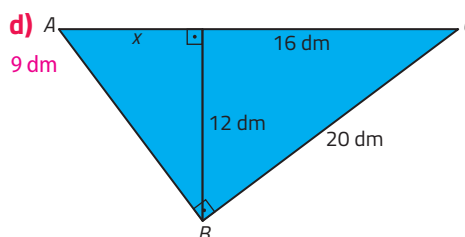
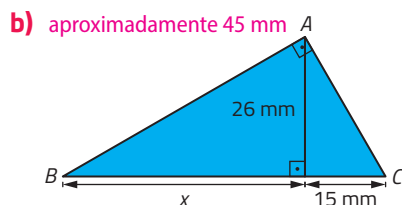
ATIVIDADES

Não escreva no livro.

13. Nos triângulos retângulos representados a seguir, determine o valor da medida x .



DICA
As figuras não estão proporcionais entre si.

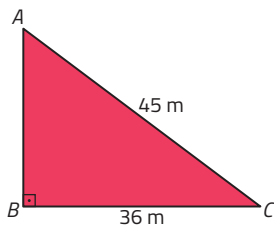


ILUSTRAÇÕES: CBOOK PRODUÇÕES

16. a) 28π cm ou aproximadamente 87,92 cm

16. b) $98\sqrt{3}$ cm² ou aproximadamente 169,74 cm²

14. Observe o triângulo retângulo representado a seguir.



É possível afirmar que o produto das medidas das projeções dos catetos sobre a hipotenusa desse triângulo, em metro, é aproximadamente:

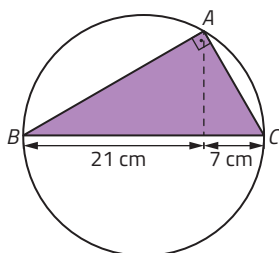
- a) 467 c) 1 239
b) 972 d) 1 620

alternativa a

15. Um triângulo retângulo tem a hipotenusa e um cateto medindo 6 cm e 3,6 cm, respectivamente. Determine:

- a) a medida do outro cateto; 4,8 cm
b) a medida da altura relativa à hipotenusa; 2,88 cm
c) as medidas das projeções dos catetos sobre a hipotenusa. 2,16 cm e 3,84 cm

16. Na figura a seguir, o triângulo ABC está inscrito em uma circunferência.



Sabendo que a hipotenusa desse triângulo coincide com um diâmetro da circunferência, determine:

- a) o comprimento dessa circunferência;
b) a área desse triângulo.



DICA

Lembre-se de que o comprimento C de uma circunferência de raio r é dada por $C = 2\pi r$.

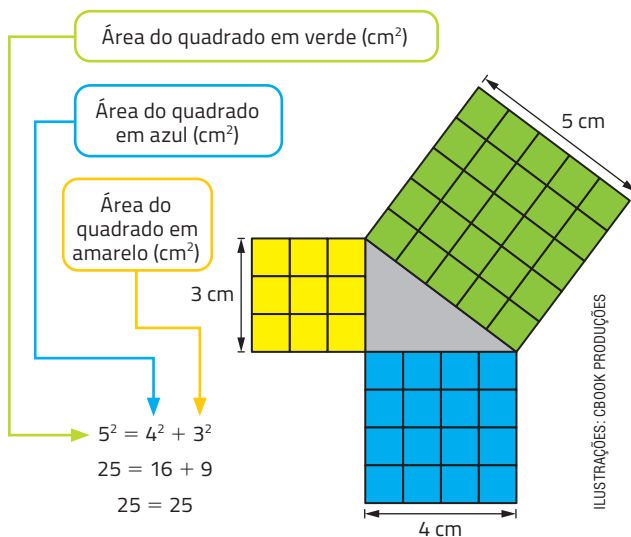
17. Considere a função afim $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, definida por $f(x) = 3x + 3$, e um triângulo retângulo cujas medidas dos catetos, em centímetro, correspondem a $f(59)$ e $f(79)$. Qual é a medida da hipotenusa desse triângulo? 300 cm

18. Você sabe o que é um terno pitagórico? Leia o trecho de um texto a seguir.

Estreitamente ligado ao teorema de Pitágoras está o problema de encontrar inteiros a , b e c que possam representar os catetos e a hipotenusa de um triângulo retângulo. Um terno de números dessa espécie recebe a designação de **terno pitagórico** [...].

EVES, Howard. **Introdução à história da matemática**. Tradução: Hygino Hugueros Domingues. 4. ed. Campinas: Editora da Unicamp, 2007. p. 104.

Um exemplo de terno pitagórico é o terno formado pelos números 3, 4 e 5. Podemos verificar essa propriedade geometricamente a partir das áreas de três quadrados construídos sobre os lados de medidas 3 cm, 4 cm e 5 cm de um triângulo, conforme segue.



Junte-se a um colega, e façam o que se pede.



- a) Expliquem como a propriedade dos ternos pitagóricos foi verificada geometricamente no exemplo apresentado.

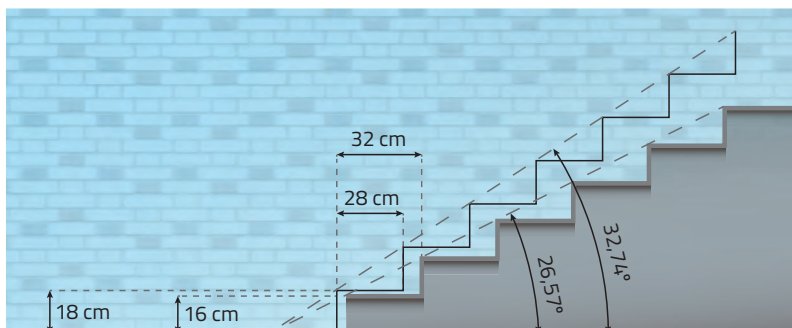
- b) Investiguem outros ternos pitagóricos e construam figuras como a apresentada para fazer a verificação. Vocês podem utilizar malha quadriculada ou programas de computador como o **GeoGebra**. Construção dos estudantes.

- c) Elaborem um problema que envolva um desses ternos pitagóricos e troque-o com outra dupla para que uma resolva o problema elaborado pela outra. Juntos, verifiquem se as respostas estão corretas. Elaboração dos estudantes.

18. a) Resposta esperada: Como a soma das áreas dos quadrados construídos sobre os dois menores lados do triângulo é igual à área do quadrado construído sobre o maior lado, pode-se concluir que as medidas 3 cm, 4 cm e 5 cm correspondem às medidas dos lados de um triângulo retângulo e que os números 3, 4 e 5 formam um terno pitagórico.

Razões trigonométricas no triângulo retângulo

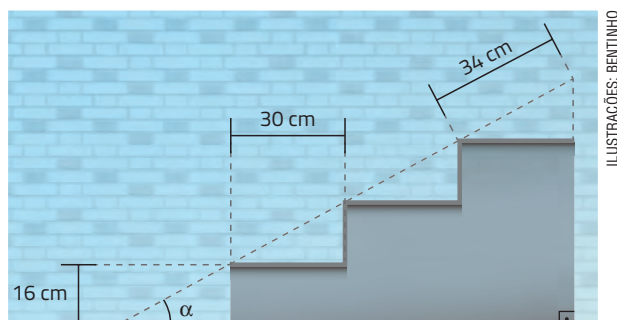
A Associação Brasileira de Normas Técnicas (ABNT) estabelece alguns critérios e regras que devem ser seguidos em construções civis. O cumprimento dessas normas possibilita que o maior número de pessoas consiga utilizar esses espaços de maneira autônoma. Para a construção de escadas, por exemplo, são estabelecidos alguns padrões de medidas: ângulo de inclinação entre $26,57^\circ$ e $32,74^\circ$, comprimento do **piso** entre 28 cm e 32 cm e altura do **espelho** entre 16 cm e 18 cm.



- **Piso:** região horizontal onde se pisa ao subir uma escada.
- **Espelho:** região vertical entre um piso e outro.

Fonte dos dados: ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. **ABNT NBR 9050:** acessibilidade a edificações, mobiliário, espaços e equipamentos urbanos. 4. ed. Rio de Janeiro: ABNT, 2020. p. 60. Disponível em: https://www.causc.gov.br/wp-content/uploads/2020/09/ABNT-NBR-9050-15-Acessibilidade-emenda-1_-03-08-2020.pdf. Acesso em: 24 jul. 2024.

Analise, por exemplo, o projeto para a construção de uma escada cujas medidas estão adequadas aos padrões descritos.



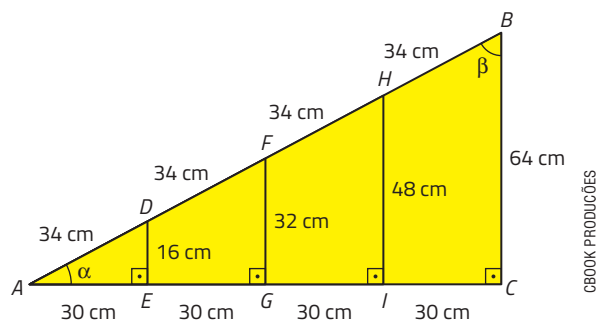
DICA

A medida α do ângulo de inclinação dessa escada é tal que $26,57^\circ < \alpha < 32,74^\circ$.

Podemos representar esse projeto considerando os espelhos da escada, de maneira a obter os seguintes triângulos retângulos: ABC , AHI , AFG e ADE .

DICA

No triângulo ADE , dizemos que \overline{DE} é o **cateto oposto** ao ângulo α e que \overline{AE} é o **cateto adjacente** ao ângulo α .



PARA PENSAR

No triângulo AFG , qual é o cateto oposto e qual é o cateto adjacente ao ângulo α ?

cateto oposto: \overline{FG} ; cateto adjacente: \overline{AG}

Pelo caso de semelhança de triângulos **AA**, podemos afirmar que os triângulos ABC , AHI , AFG e ADE são semelhantes, uma vez que têm dois ângulos internos congruentes (ângulo α e ângulo reto). Assim, para esses triângulos, temos as razões a seguir.

- As razões entre o cateto oposto ao ângulo α e a hipotenusa são iguais.

$$\frac{BC}{AB} = \frac{HI}{AH} = \frac{FG}{AF} = \frac{DE}{AD} \Rightarrow \frac{64}{136} = \frac{48}{102} = \frac{32}{68} = \frac{16}{34} = \frac{8}{17}$$

A razão entre o cateto oposto ao ângulo α e a hipotenusa é denominada **seno de α** , indicada por **sen α** . Nesse caso, $\text{sen } \alpha = \frac{8}{17}$.

- As razões entre o cateto adjacente ao ângulo α e a hipotenusa são iguais.

$$\frac{AC}{AB} = \frac{AI}{AH} = \frac{AG}{AF} = \frac{AE}{AD} \Rightarrow \frac{120}{136} = \frac{90}{102} = \frac{60}{68} = \frac{30}{34} = \frac{15}{17}$$

A razão entre o cateto adjacente ao ângulo α e a hipotenusa é denominada **cosseno de α** , indicada por **cos α** . Nesse caso, $\text{cos } \alpha = \frac{15}{17}$.

- As razões entre o cateto oposto e o cateto adjacente ao ângulo α são iguais.

$$\frac{BC}{AC} = \frac{HI}{AI} = \frac{FG}{AG} = \frac{DE}{AE} \Rightarrow \frac{64}{120} = \frac{48}{90} = \frac{32}{60} = \frac{16}{30} = \frac{8}{15}$$

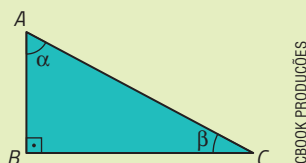
A razão entre o cateto oposto e o cateto adjacente ao ângulo α é denominada **tangente de α** , indicada por **tg α** . Nesse caso, $\text{tg } \alpha = \frac{8}{15}$.

O seno, o cosseno e a tangente são **razões trigonométricas**. O campo da Matemática que estuda essas razões, entre outros conceitos, é a **Trigonometria**.

DICA

Nesta coleção, optamos por indicar a **tangente de α** por **tg α** . No entanto, alguns livros, calculadoras científicas, exames de vestibular e materiais de consulta podem indicar também por **tan α** .

Seja um triângulo retângulo ABC com ângulos internos de medida α , 90° e β , como indicado na figura a seguir.



Em relação ao ângulo α , temos:

$$\text{sen } \alpha = \frac{\text{medida do cateto oposto}}{\text{medida da hipotenusa}} = \frac{BC}{AC}$$

$$\text{cos } \alpha = \frac{\text{medida do cateto adjacente}}{\text{medida da hipotenusa}} = \frac{AB}{AC}$$

$$\text{tg } \alpha = \frac{\text{medida do cateto oposto}}{\text{medida do cateto adjacente}} = \frac{BC}{AB}$$

Em relação ao ângulo β , temos:

$$\text{sen } \beta = \frac{\text{medida do cateto oposto}}{\text{medida da hipotenusa}} = \frac{AB}{AC}$$

$$\text{cos } \beta = \frac{\text{medida do cateto adjacente}}{\text{medida da hipotenusa}} = \frac{BC}{AC}$$

$$\text{tg } \beta = \frac{\text{medida do cateto oposto}}{\text{medida do cateto adjacente}} = \frac{AB}{BC}$$

ATIVIDADES RESOLVIDAS

R6. Observe o triângulo retângulo ABC representado e determine:

- $\sin 60^\circ$, $\cos 60^\circ$ e $\operatorname{tg} 60^\circ$;
- o valor de α ;
- $\sin \alpha$, $\cos \alpha$ e $\operatorname{tg} \alpha$.

Resolução

$$\text{a) } \sin 60^\circ = \frac{AC}{BC} = \frac{3\sqrt{3}}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos 60^\circ = \frac{AB}{BC} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

$$\operatorname{tg} 60^\circ = \frac{AC}{AB} = \frac{3\sqrt{3}}{3} = \sqrt{3}$$

Portanto, $\sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\cos 60^\circ = \frac{1}{2}$ e $\operatorname{tg} 60^\circ = \sqrt{3}$.

- b)** Como a soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo qualquer é 180° , temos:

$$\alpha + 60^\circ + 90^\circ = 180^\circ \Rightarrow \alpha + 150^\circ = 180^\circ \Rightarrow \alpha = 180^\circ - 150^\circ = 30^\circ$$

Portanto, $\alpha = 30^\circ$.

- c)** Como $\alpha = 30^\circ$, temos de calcular $\sin 30^\circ$, $\cos 30^\circ$ e $\operatorname{tg} 30^\circ$.

$$\sin 30^\circ = \frac{AB}{BC} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

$$\cos 30^\circ = \frac{AC}{BC} = \frac{3\sqrt{3}}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\operatorname{tg} 30^\circ = \frac{AB}{AC} = \frac{3}{3\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

Portanto, $\sin 30^\circ = \frac{1}{2}$, $\cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$ e $\operatorname{tg} 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

R7. Observe o quadrado e resolva as questões.

- Qual é a medida da diagonal desse quadrado?
- Calcule $\sin 45^\circ$, $\cos 45^\circ$ e $\operatorname{tg} 45^\circ$.

Resolução

- a)** Considerando o triângulo retângulo ABC e aplicando o teorema de Pitágoras, obtemos:

$$d^2 = 40^2 + 40^2 \Rightarrow d^2 = 3200 \Rightarrow d = \pm\sqrt{3200} \Rightarrow \begin{cases} d = 40\sqrt{2} \\ \text{ou} \\ d = -40\sqrt{2} \text{ (não convém)} \end{cases}$$

Portanto, a diagonal desse quadrado mede $40\sqrt{2}$ cm.

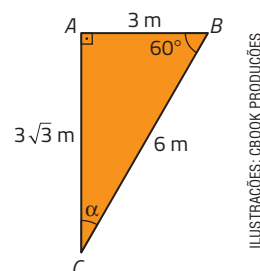
- b)** Considerando novamente o triângulo retângulo ABC e o resultado obtido no item **a**, temos:

$$\sin 45^\circ = \frac{AB}{AC} = \frac{40}{40\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\operatorname{tg} 45^\circ = \frac{AB}{BC} = \frac{40}{40} = 1$$

$$\cos 45^\circ = \frac{BC}{AC} = \frac{40}{40\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Portanto, $\sin 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$ e $\operatorname{tg} 45^\circ = 1$.



ILUSTRAÇÕES: CBOOK PRODUÇÕES

Resposta esperada: $\operatorname{tg} 60^\circ = \frac{\sin 60^\circ}{\cos 60^\circ}$.

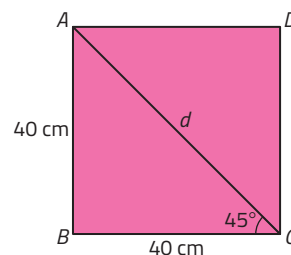
PARA PENSAR

Você notou alguma relação entre as razões obtidas? Comente com os colegas.

Resposta esperada: $\operatorname{tg} 30^\circ = \frac{\sin 30^\circ}{\cos 30^\circ}$.

PARA PENSAR

Você notou alguma relação entre as razões obtidas? Comente com os colegas.

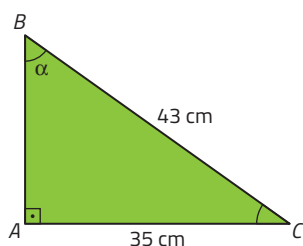


ATIVIDADES

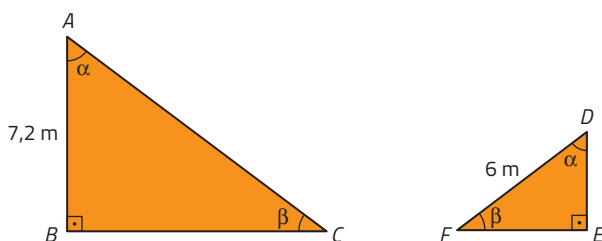
Não escreva no livro.

- 19.** Analise o triângulo retângulo representado a seguir e determine o seno, o cosseno e a tangente do ângulo α .

$$\begin{aligned}\operatorname{sen} \alpha &= \frac{35}{43}; \\ \cos \alpha &= \frac{4\sqrt{39}}{43}; \\ \operatorname{tg} \alpha &= \frac{35\sqrt{39}}{156}\end{aligned}$$

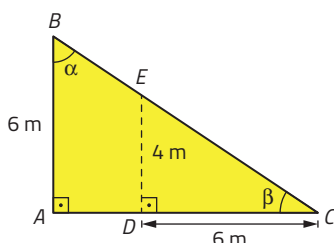


- 20.** Os triângulos ABC e DEF representados a seguir são semelhantes, com razão de semelhança igual a 2.



Determine: triângulo ABC : 28,8 m; triângulo DEF : 14,4 m

- o perímetro de cada triângulo;
 - $\operatorname{sen} \alpha$, $\cos \alpha$ e $\operatorname{tg} \alpha$;
 - $\operatorname{sen} \beta$, $\cos \beta$ e $\operatorname{tg} \beta$.
- 21.** Sabendo que α é a medida de um ângulo agudo tal que $\operatorname{tg} \alpha = \frac{12}{5}$, calcule:
- $\operatorname{sen} \alpha$; $\frac{12}{13}$
 - $\cos \alpha$; $\frac{5}{13}$
 - $(\operatorname{sen} \alpha)^2 + (\cos \alpha)^2$. 1
- Agora, responda: Quantos triângulos retângulos, com um ângulo agudo α cuja $\operatorname{tg} \alpha = \frac{12}{5}$, você acredita que possam ser construídos? Resposta esperada: Infinitos triângulos retângulos semelhantes, cujos ângulos agudos medem α e $90^\circ - \alpha$.
- 22.** Analise a figura representada a seguir.



ILUSTRAÇÕES: CBOOK PRODUÇÕES

- 24.** seno: $\frac{\sqrt{2}}{2}$; cosseno: $\frac{\sqrt{2}}{2}$; tangente: 1

- Determine $\operatorname{tg} \beta$. $\operatorname{tg} \beta = \frac{2}{3}$
- Quanto mede o segmento de reta \overline{AD} ? 3 m
- Qual é a área do triângulo ABC ? 27 m^2

- 23.** Durante um jogo de vôlei de praia, quando a bola estava a uma altura de 3,65 m, um jogador realizou um ataque, que resultou em um ponto para seu time. O trajeto da bola nessa jogada está descrito conforme o esquema a seguir.



ARTUR FUJITA

Considerando $\operatorname{tg} \alpha = 1,37$, qual é a distância percorrida pela bola do início do ataque até atingir o solo? aproximadamente 6,19 m

- 24.** Determine o seno, o cosseno e a tangente dos ângulos internos agudos de um triângulo retângulo isósceles qualquer.

DICA

Triângulo isósceles é um triângulo que tem ao menos dois lados congruentes.

- 25.** Utilize instrumentos de desenho e represente um triângulo retângulo qualquer. Nesse triângulo, indique os ângulos internos agudos α e β e as medidas de cada lado. Depois, troque seu desenho com um colega e determine o seno, o cosseno e a tangente dos ângulos α e β indicados no triângulo que você recebeu. Ao final, juntos, verifiquem se as respostas estão corretas. Elaboração do estudante.

20. b) $\operatorname{sen} \alpha = \frac{4}{5}$; $\cos \alpha = \frac{3}{5}$; $\operatorname{tg} \alpha = \frac{4}{3}$

20. c) $\operatorname{sen} \beta = \frac{3}{5}$; $\cos \beta = \frac{4}{5}$; $\operatorname{tg} \beta = \frac{3}{4}$

• Tabela trigonométrica

Determinamos nas atividades resolvidas **R6** e **R7** o valor do seno, do cosseno e da tangente dos ângulos de 30° , 45° e 60° . Ângulos com essas medidas aparecem frequentemente no estudo da Trigonometria e são denominados **ângulos notáveis**. Podemos organizar tais valores em uma tabela trigonométrica a fim de serem utilizados na resolução de diferentes problemas.

	30°	45°	60°
sen	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
cos	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
tg	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$

Atividade resolvida

R8. O monumento Marco Zero do Equador é um dos principais cartões-postais do município de Macapá (AP). Construído em 1987, o monumento é formado por um relógio de sol e um bloco de concreto, totalizando 30 m de altura, e marca o local onde a linha imaginária do equador, que divide a Terra em hemisférios Norte e Sul, corta o município.

Fonte dos dados: AMAPÁ. Secretaria de Turismo. **Monumento Marco Zero do Equador**. Macapá: Setur, 31 maio 2021. Disponível em: <https://setur.portal.ap.gov.br/noticia/3105/monumento-marco-zero-do-equador>. Acesso em: 25 jun. 2024.

Considere que, no solo, sejam marcados os pontos A e B , formando com o ponto mais alto do Marco Zero (C) ângulos de 45° e 60° , respectivamente; que \overline{CD} corresponda à altura desse monumento; e que $AB = AD + BD$, conforme a figura.

Calcule a distância entre os pontos:

- A e B ;
- B e C .

Resolução

- a) Como \overline{CD} corresponde à altura do monumento, temos $CD = 30$ m. Da tabela de valores de seno, cosseno e tangente dos ângulos notáveis, sabemos que $\text{tg } 45^\circ = 1$ e que $\text{tg } 60^\circ = \sqrt{3}$. Assim:

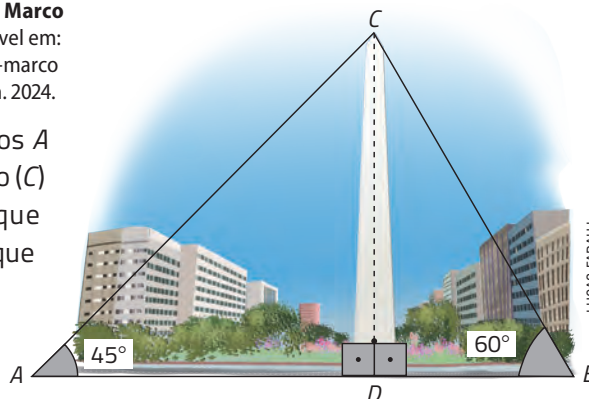
- $\text{tg } 45^\circ = \frac{CD}{AD} \Rightarrow 1 = \frac{30}{AD} \Rightarrow AD = 30$
- $\text{tg } 60^\circ = \frac{CD}{BD} \Rightarrow \sqrt{3} = \frac{30}{BD} \Rightarrow BD = \frac{30}{\sqrt{3}} \Rightarrow BD = 10\sqrt{3} \approx 17,32$
- $AB = AD + BD \Rightarrow AB \approx 30 + 17,32 \Rightarrow AB \approx 47,32$

Portanto, a distância aproximada de A até B é 47,32 m.

- b) Da tabela trigonométrica, sabemos que $\text{sen } 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Do triângulo BCD , temos:

$$\text{sen } 60^\circ = \frac{CD}{BC} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{30}{BC} \Rightarrow BC = \frac{60}{\sqrt{3}} \Rightarrow BC = 20\sqrt{3} \approx 34,64$$

Portanto, a distância aproximada de B até C é 34,64 m.



► Representação esquemática da situação (Imagem sem escala).

LUCAS FARAUJ

Na tabela trigonométrica a seguir, estão organizados os valores aproximados do seno, do cosseno e da tangente de ângulos de medidas inteiras, em grau, que variam de 1° a 89° .

Ângulo	Seno	Cosseno	Tangente
1°	0,017	1,000	0,017
2°	0,035	0,999	0,035
3°	0,052	0,999	0,052
4°	0,070	0,998	0,070
5°	0,087	0,996	0,087
6°	0,105	0,995	0,105
7°	0,122	0,993	0,123
8°	0,139	0,990	0,141
9°	0,156	0,988	0,158
10°	0,174	0,985	0,176
11°	0,191	0,982	0,194
12°	0,208	0,978	0,213
13°	0,225	0,974	0,231
14°	0,242	0,970	0,249
15°	0,259	0,966	0,268
16°	0,276	0,961	0,287
17°	0,292	0,956	0,306
18°	0,309	0,951	0,325
19°	0,326	0,946	0,344
20°	0,342	0,940	0,364
21°	0,358	0,934	0,384
22°	0,375	0,927	0,404
23°	0,391	0,921	0,424
24°	0,407	0,914	0,445
25°	0,423	0,906	0,466
26°	0,438	0,899	0,488
27°	0,454	0,891	0,510
28°	0,469	0,883	0,532
29°	0,485	0,875	0,554
30°	0,500	0,866	0,577
31°	0,515	0,857	0,601
32°	0,530	0,848	0,625
33°	0,545	0,839	0,649
34°	0,559	0,829	0,675
35°	0,574	0,819	0,700
36°	0,588	0,809	0,727
37°	0,602	0,799	0,754
38°	0,616	0,788	0,781
39°	0,629	0,777	0,810
40°	0,643	0,766	0,839
41°	0,656	0,755	0,869
42°	0,669	0,743	0,900
43°	0,682	0,731	0,933
44°	0,695	0,719	0,966
45°	0,707	0,707	1,000

Ângulo	Seno	Cosseno	Tangente
46°	0,719	0,695	1,036
47°	0,731	0,682	1,072
48°	0,743	0,669	1,111
49°	0,755	0,656	1,150
50°	0,766	0,643	1,192
51°	0,777	0,629	1,235
52°	0,788	0,616	1,280
53°	0,799	0,602	1,327
54°	0,809	0,588	1,376
55°	0,819	0,574	1,428
56°	0,829	0,559	1,483
57°	0,839	0,545	1,540
58°	0,848	0,530	1,600
59°	0,857	0,515	1,664
60°	0,866	0,500	1,732
61°	0,875	0,485	1,804
62°	0,883	0,469	1,881
63°	0,891	0,454	1,963
64°	0,899	0,438	2,050
65°	0,906	0,423	2,145
66°	0,914	0,407	2,246
67°	0,921	0,391	2,356
68°	0,927	0,375	2,475
69°	0,934	0,358	2,605
70°	0,940	0,342	2,747
71°	0,946	0,326	2,904
72°	0,951	0,309	3,078
73°	0,956	0,292	3,271
74°	0,961	0,276	3,487
75°	0,966	0,259	3,732
76°	0,970	0,242	4,011
77°	0,974	0,225	4,331
78°	0,978	0,208	4,705
79°	0,982	0,191	5,145
80°	0,985	0,174	5,671
81°	0,988	0,156	6,314
82°	0,990	0,139	7,115
83°	0,993	0,122	8,144
84°	0,995	0,105	9,514
85°	0,996	0,087	11,430
86°	0,998	0,070	14,301
87°	0,999	0,052	19,081
88°	0,999	0,035	28,636
89°	1,000	0,017	57,290

PARA PENSAR

Resposta esperada: Em geral, os valores apresentados na tabela são aproximados para o milésimo mais próximo; na calculadora, os valores obtidos são aproximados para mais de três casas decimais.

Escolha três medidas inteiras de ângulos, em grau, e, com uma calculadora científica, determine o seno, o cosseno e a tangente desses ângulos, utilizando as teclas sin, cos e tan. Depois, compare os resultados obtidos com os valores correspondentes na tabela. O que você observa?

Atividade resolvida

R9. A bandeira do Rio Grande do Sul foi adotada como símbolo desse estado brasileiro em 1891.

Essa bandeira deve ter comprimento e largura proporcionais a 200 e 140, respectivamente. A medida do menor lado das regiões triangulares corresponde à metade da largura da bandeira.

Fonte dos dados: RIO GRANDE DO SUL. **Lei nº 5.213, de 5 de janeiro de 1966.**

Dispõe sobre a forma e a apresentação dos símbolos do Estado do Rio Grande do Sul e dá outras providências. Porto Alegre: Assembleia Legislativa, 1966. Disponível em: www.al.rs.gov.br/filerepository/repLegis/arquivos/05.213.pdf. Acesso em: 28 jun. 2024.

Quais são as medidas dos ângulos internos agudos das regiões triangulares que compõem a bandeira do Rio Grande do Sul?

Resolução

Como essa bandeira deve ter dimensões proporcionais a 200 e 140 e a medida do menor lado da região triangular é proporcional a 70 ($140 : 2 = 70$), podemos representar uma das regiões triangulares conforme apresentado na figura.

Calculando a tangente dos ângulos internos agudos, obtemos:

$$\begin{aligned} \text{tg } \alpha &= \frac{70}{200} = 0,35 & \text{tg } \beta &= \frac{200}{70} \approx 2,857 \end{aligned}$$

Podemos consultar a tabela trigonométrica para identificar quais medidas de ângulos α e β mais se aproximam dos valores de tangente encontrados: $\text{tg } \alpha = 0,35$ e $\text{tg } \beta \approx 2,857$.

Nesse caso, temos:

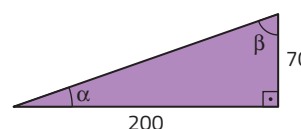
$$\begin{aligned} \text{tg } 19^\circ &\approx 0,344 \text{ e } \text{tg } 20^\circ \approx 0,364; \text{ logo } \alpha \approx 19^\circ. \\ \text{tg } 70^\circ &\approx 2,747 \text{ e } \text{tg } 71^\circ \approx 2,904; \text{ logo } \beta \approx 71^\circ. \end{aligned}$$

Portanto, as medidas desses ângulos internos são aproximadamente 19° e 71° .



ATLASPIX/SHUTTERSTOCK.COM

► Representação da bandeira do Rio Grande do Sul.



ILUSTRAÇÕES:
CBOOK PRODUÇÕES

Resposta esperada:
Porque $\alpha + \beta + 90^\circ = 180^\circ \Rightarrow \alpha + \beta = 90^\circ$.

PARA PENSAR

Por que podemos afirmar que α e β são ângulos complementares? Você notou que $\text{tg } \alpha$ e $\text{tg } \beta$ são números inversos? Por que isso ocorre?

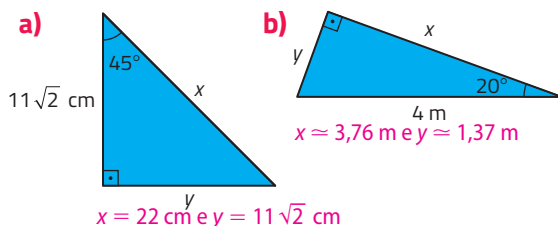
Resposta esperada: Isso ocorre porque

$$\text{tg } \alpha = \frac{70}{200} \Rightarrow \frac{1}{\text{tg } \alpha} = \frac{200}{70} = \text{tg } \beta.$$

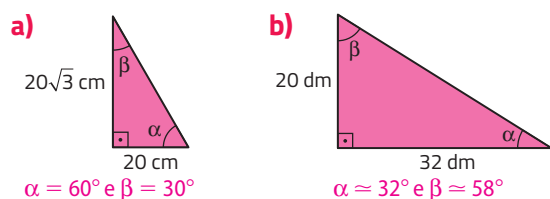
Atividades

Não escreva no livro.

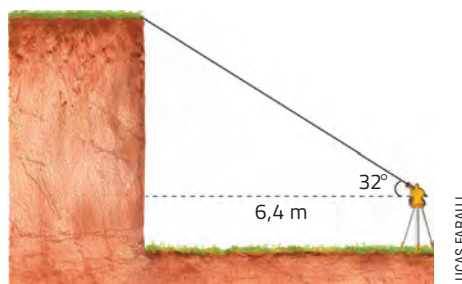
26. Em cada item, determine as medidas x e y .



27. Determine as medidas α e β indicadas em cada triângulo representado a seguir.



28. Para realizar algumas medições, um topógrafo posicionou um teodolito de 120 cm de altura a 6,4 m de distância de um barranco, conforme mostra a figura a seguir.



LUCAS PARRAU

Qual é a altura, em metro, desse barranco, em relação ao plano horizontal sobre o qual está apoiado o teodolito? **aproximadamente 5,2 m**

29. Na pista de um aeroporto, logo que um avião deixou de tocar o solo na decolagem, seguiu uma trajetória de 2 200 m, que pode ser considerada retilínea, formando um ângulo de 45° com o solo.

a) Represente essa situação por meio de uma figura. *Resposta nas Orientações para o professor.*

b) A que altura esse avião está, em relação ao solo, após percorrer essa trajetória de 2 200 m? $1\,100\sqrt{2}$ m ou aproximadamente 1 556 m

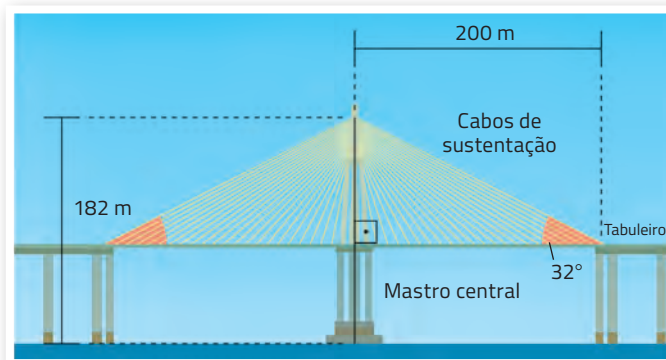
30. A ponte Jornalista Phelippe Daou, em Manaus (AM), foi construída em uma estrutura estaíada, em que cabos de sustentação são fixados do mastro central ao tabuleiro. O mastro central, por sua vez, tem 182 m de altura e apoia dois vãos de 200 m para cada lado. O último cabo de sustentação, com uma das extremidades no topo do mastro central, forma um ângulo de aproximadamente 32° com o tabuleiro.



STEFAN KOLIMBAN/PULSAR IMAGENS

A ponte Jornalista Phelippe Daou é uma ponte estaiada que atravessa o Rio Negro, no estado brasileiro do Amazonas. Fotografia de 2024.

Analisar o esquema que representa essa ponte.



ALAN CARVALHO

► Imagem sem escala; cores-fantasia.

Fonte dos dados: INSTITUTO DE PROTEÇÃO AMBIENTAL DO AMAZONAS. **Estudo prévio de impactos ambientais da construção de ponte sobre o Rio Negro:** maquete digital do projeto. Manaus: IPAAM: UFAM, [2018]. Localizável em: p. 2. Disponível em: www.ipaam.am.gov.br/wp-content/uploads/2018/09/Maquete-Digital-da-Ponte-Rio-Negro.pdf. Acesso em: 28 jun. 2024.

30. b) aproximadamente 125 m

31. b) mínimo: aproximadamente 3,89 m; máximo: aproximadamente 5 m

Considerando as informações apresentadas, responda às questões a seguir.

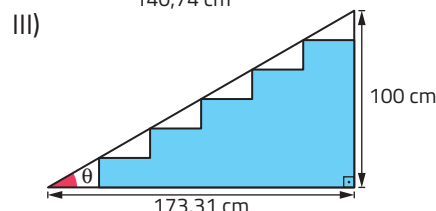
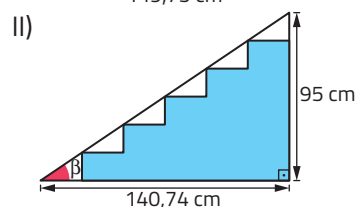
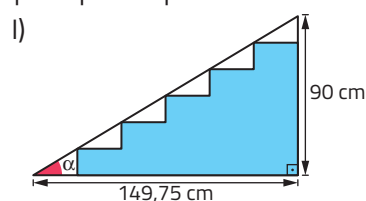
a) Qual é o comprimento do último cabo de sustentação? *aproximadamente 235,85 m*

b) A quantos metros de altura o topo do mastro central está acima do tabuleiro?

31. Na página 221, estudamos que existem algumas normas da ABNT que devem ser consideradas na construção de escadas. Uma dessas normas indica que a medida do ângulo de inclinação da escada deve ter entre $26,57^\circ$ e $32,74^\circ$.

a) Analise alguns esboços (sem escala) de projetos de construção de escada e identifique aqueles que atendem a essa norma.

I e III



ILUSTRAÇÕES: CBOOK PRODUÇÕES

b) Uma escada deve ser projetada de maneira a ligar dois pisos de um edifício comercial com desnível de 2,5 m de altura entre eles. Qual deve ser o comprimento mínimo e máximo da projeção horizontal, de maneira que essa escada atenda à norma indicada? Considere que os valores aproximados da tangente de $26,57^\circ$ e $32,74^\circ$ são, respectivamente, 0,500 e 0,643.

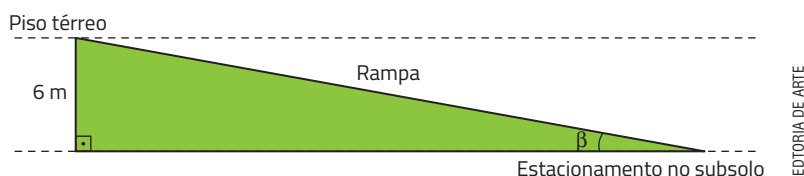
32. Uma escada rolante com ângulo de inclinação igual a 32° e extensão de 25 m liga os pisos 1 e 2 de um shopping center.

a) Represente essa situação por meio de uma figura. *Resposta nas Orientações para o professor.*

b) Qual é o comprimento da projeção horizontal dessa escada? *aproximadamente 21,20 m*

c) Quantos metros de altura tem o desnível entre os dois pisos ligados por essa escada? *aproximadamente 13,25 m*

- 33.** Certo lago tem um trecho em que suas margens são paralelas. Um barco percorreu 136 m em linha reta para ir de uma margem à outra nesse trecho. Considerando que a trajetória realizada pelo barco formou um ângulo de 45° com a margem de partida, determine a largura do lago nesse trecho.
 $68\sqrt{2}$ m ou aproximadamente 96 m
- 34.** Uma pessoa observou o topo de um edifício de 16 andares de um ângulo de 28° em relação à horizontal. Considerando que a altura dos olhos dessa pessoa até o solo seja de 1,5 m e que cada andar desse edifício tem 3 m de altura, determine a quantos metros do edifício essa pessoa se encontra. *aproximadamente 87,4 m*
- 35.** Um poste de 15 m de altura instalado em solo plano projeta, em diferentes momentos do dia, sombras com comprimentos distintos. Determine a medida do ângulo que os raios solares formam com o solo quando a sombra tiver:
- a) 9 m de comprimento; *aproximadamente 59°* b) 18 m de comprimento; *aproximadamente 40°* c) 15 m de comprimento. *45°*
- 36.** No croqui de construção de determinado prédio, foi projetado um estacionamento no subsolo. Para ligar o piso térreo ao estacionamento, será necessária a construção de uma rampa, conforme representado a seguir.



Nesse croqui, foi indicado que o ângulo de inclinação dessa rampa deverá ter medida entre 8° e 12° . Quantos metros de extensão, aproximadamente, poderá ter essa rampa? *de 28,8 m até 43,2 m*

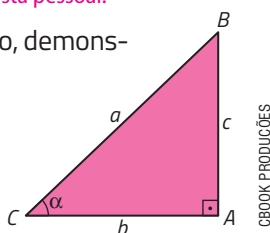
- 37.** Para investigar relações entre as razões trigonométricas seno, cosseno e tangente de ângulos menores que 90° , Mônica utilizou uma planilha eletrônica. Junte-se a um colega, e analisem partes dessa planilha.
- 37. a)** Respostas esperadas: $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\operatorname{sen} \alpha}{\operatorname{cos} \alpha}$, com $0^\circ < \alpha < 90^\circ$; $\operatorname{sen} \alpha = \operatorname{cos} (90^\circ - \alpha)$, com $0^\circ < \alpha < 90^\circ$.

	A	B	C	D	E	F	G
1	Seno		Cosseno		Tangente		
2	α (em grau)	$\operatorname{sen} \alpha$	$\operatorname{sen} (90^\circ - \alpha)$	$\operatorname{cos} \alpha$	$\operatorname{cos} (90^\circ - \alpha)$	$\operatorname{tg} \alpha$	$\operatorname{tg} (90^\circ - \alpha)$
3	1	0,017	1,000	1,000	0,017	0,017	57,290
4	2	0,035	0,999	0,999	0,035	0,035	28,636
5	3	0,052	0,999	0,999	0,052	0,052	19,081
6	4	0,070	0,998	0,998	0,070	0,070	14,301
7							
8	40	0,643	0,766	0,766	0,643	0,839	1,192
9	41	0,656	0,755	0,755	0,656	0,869	1,150
10	42	0,669	0,743	0,743	0,669	0,900	1,111
11	43	0,682	0,731	0,731	0,682	0,933	1,072

- a) Com base nas informações apresentadas, elaborem conjecturas estabelecendo uma relação entre:
- o seno, o cosseno e a tangente de um ângulo agudo;
 - o seno e o cosseno de ângulos complementares.
- b) Agora, tentem demonstrar matematicamente as conjecturas que vocês indicaram no item a. Se julgarem necessário, podem representar um triângulo retângulo. *Resposta pessoal.*

- 38.** Considerando o triângulo retângulo representado, demonstre que $\operatorname{sen}^2 \alpha + \operatorname{cos}^2 \alpha = 1$, com $0^\circ < \alpha < 90^\circ$.

Resposta esperada: $a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow \frac{a^2}{a^2} = \frac{b^2}{a^2} + \frac{c^2}{a^2} \Rightarrow$
 $\Rightarrow 1 = \left(\frac{b}{a}\right)^2 + \left(\frac{c}{a}\right)^2 \Rightarrow 1 = \operatorname{cos}^2 \alpha + \operatorname{sen}^2 \alpha$



DICA

Dizemos que dois ângulos são complementares quando a soma de suas medidas é igual a 90° .

DICA

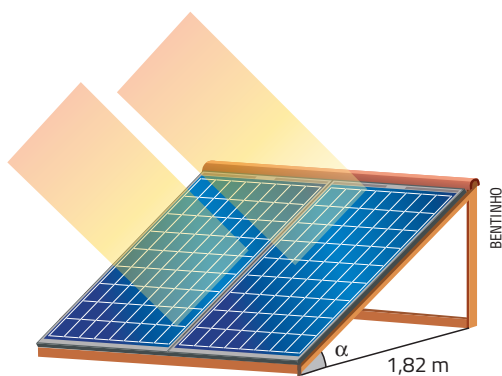
Para realizar essa demonstração, é possível utilizar o teorema de Pitágoras.



- 39.** Um painel solar fotovoltaico é utilizado para converter energia solar em energia elétrica, sendo uma opção de energia renovável e inesgotável. A inclinação com a qual esse painel é instalado influencia na qualidade da obtenção da energia solar. Leia o trecho de um texto a seguir.

[...] para maximizar o aproveitamento da radiação solar, pode-se ajustar a posição do coletor ou painel solar de acordo com a latitude local e o período do ano em que se requer mais energia. No Hemisfério Sul, por exemplo, um sistema de captação solar fixo deve ser orientado para o Norte, com ângulo de inclinação similar ao da latitude local.

BRASIL. Ministério de Minas e Energia. Agência Nacional de Energia Elétrica. **Energia solar**. Brasília, DF: MME: Aneel, [2003]. p. 30. Disponível em: [www2.aneel.gov.br/aplicacoes/atlas/pdf/03-Energia_Solar\(3\).pdf](http://www2.aneel.gov.br/aplicacoes/atlas/pdf/03-Energia_Solar(3).pdf). Acesso em: 1 jul. 2024.



- Representação de um painel solar fotovoltaico (imagem sem escala; cores-fantasia).

39. b) Guarapuava (PR). Resposta pessoal.

O painel solar representado é composto de duas placas retangulares de dimensões 1 m e 2 m e foi instalado sobre uma superfície plana seguindo as orientações indicadas anteriormente.

- Qual é a área desse painel solar? 4 m^2
- Análise as coordenadas geográficas de alguns municípios brasileiros (latitude e longitude) e indique em qual deles é mais provável que esse painel solar tenha sido instalado. Justifique sua resposta.
 - Manaus (AM): $3^\circ 6' 26'' \text{ S}$ e $60^\circ 1' 34'' \text{ O}$.
 - Salvador (BA): $12^\circ 58' 13'' \text{ S}$ e $38^\circ 30' 45'' \text{ O}$.
 - Guarapuava (PR): $25^\circ 23' 42'' \text{ S}$ e $51^\circ 27' 28'' \text{ O}$.
 - Palmas (TO): $10^\circ 10' 8'' \text{ S}$ e $48^\circ 19' 54'' \text{ O}$.
- Pesquise a coordenada geográfica do município onde você mora e calcule a inclinação recomendada para um suporte de painel solar, semelhante ao apresentado no enunciado. *A resposta depende do local onde o estudante mora.*
- Agora, realize uma pesquisa sobre o que é importante considerar antes de instalar um sistema de energia solar, como as condições necessárias para a instalação e seu uso, vantagens, custos, eficiência e manutenção. Em seguida, escreva um texto apresentando sua opinião e justificativas para responder à pergunta a seguir.

Pesquisa do estudante.

É vantajoso investir na instalação de um sistema de energia solar residencial?

NO MUNDO

DO TRABALHO

O mercado de trabalho da energia renovável

Ao contrário do petróleo e do gás natural, as energias renováveis são obtidas por meio de recursos naturais que não se esgotam. São exemplos de energia renovável a solar, a eólica, a hidráulica, a de biomassa e a geotérmica. Esses tipos de energia geram impactos ambientais, econômicos e sociais de maneira positiva, pois produzem menos ou nenhum gás de efeito estufa, possibilitam o acesso à energia por comunidades isoladas, reduzem os valores da conta de energia, entre outros. A crescente demanda por energia renovável no Brasil tem oportunizado a geração de empregos para diversos profissionais, como engenheiros, físicos, químicos, geólogos, instaladores de sistemas de energia fotovoltaica e tecnólogos em sistemas elétricos, biocombustíveis e controle ambiental.

Acesse este [site](#) para ler uma reportagem sobre o mercado que envolve a energia renovável.

- O FUTURO do emprego é verde. **Veja**, [São Paulo], 28 fev. 2023. Disponível em: <https://veja.abril.com.br/insights-list/o-futuro-do-emprego-e-verde>. Acesso em: 1 jul. 2024.



Acessibilidade

Leia o trecho de um texto a seguir, que trata de acessibilidade.

Acessibilidade, direito de todos de ir e vir

Desenvolver a acessibilidade em um ambiente é promover condições de mobilidade com autonomia, eliminando as barreiras arquitetônicas e urbanísticas nas cidades. A acessibilidade é um direito de todos, de ir e vir, uma conquista social salientando a cidadania de cada um.

Quando um espaço é construído acessível [...] é capaz de oferecer oportunidades iguais a todos. [...] Devemos lembrar que a dificuldade não é só ao usuário de cadeiras de rodas.

Existem pessoas com mobilidade reduzida e temporária, gerada por diversos fatores, tais como: idade, gravidez, deficiência auditiva ou visual e acidentes [...]

BARROS, Marcia da Silva. **Acessibilidade, direito de todos de ir e vir**. Florianópolis: CREA-SC, 1 out. 2010. Disponível em: <https://portal.crea-sc.org.br/acessibilidade-direito-de-todos-de-ir-e-vir/>. Acesso em: 1 jul. 2024.

► Calçada acessível, com piso tátil, em Maringá (PR). Fotografia de 2018.

ERNESTO REGHRAN/PULSAR IMAGENS

Observe, a seguir, o artigo 20 do decreto nº 5.296, de 2004, que regulamenta as leis nº 10.048 e nº 10.098, as quais estabelecem diretrizes para acessibilidade em contextos sociais distintos.

Art. 20. Na ampliação ou reforma das edificações de uso público ou de uso coletivo, os desníveis das áreas de circulação internas ou externas serão transpostos por meio de rampa ou equipamento eletromecânico de deslocamento vertical, quando não for possível outro acesso mais cômodo para pessoa portadora de deficiência ou com mobilidade reduzida, conforme estabelecido nas normas técnicas de acessibilidade da ABNT.

BRASIL. **Decreto nº 5.296, de 2 de dezembro de 2004**. Regulamenta as Leis nº 10.048, de 8 de novembro de 2000, que dá prioridade de atendimento às pessoas que especifica, e 10.098, de 19 de dezembro de 2000, que estabelece normas gerais e critérios básicos para a promoção da acessibilidade das pessoas portadoras de deficiência ou com mobilidade reduzida, e dá outras providências. Brasília, DF: Presidência da República, [2019]. Disponível em: www.planalto.gov.br/ccivil_03/_Ato2004-2006/2004/Decreto/D5296.htm. Acesso em: 1 jul. 2024.

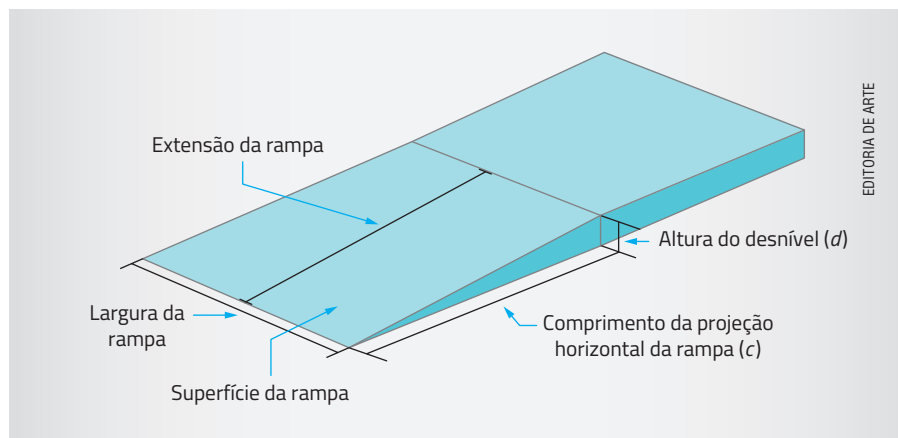
► Rampa de acesso.

RIOPATUCA/SHUTTERSTOCK.COM



Para contribuir com a acessibilidade, é fundamental ter empatia e garantir direitos básicos de acessibilidade, como a disponibilização de rampas em prédios públicos, que possibilita o acesso de pessoas com mobilidade reduzida. A norma NBR 9050, da ABNT, visa estabelecer parâmetros para adaptação de espaços urbanos, entre eles, a inclinação máxima que rampas como essa devem ter.

Considerando alguns fatores, é estabelecido que a inclinação da rampa (i), que corresponde à razão entre a altura do desnível (d) e o comprimento da projeção horizontal da rampa (c), não deve ultrapassar 0,0833. Analise o esquema.



- Consideram-se rampas as inclinações da superfície de piso que têm declividade maior ou igual a 0,05.
- A largura livre mínima recomendável para rampas é de 1,50 m. A largura mínima admissível é de 1,20 m.

Fonte dos dados: ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. **ABNT NBR 9050**: acessibilidade a edificações, mobiliários, espaços e equipamentos urbanos. 4. ed. Rio de Janeiro: ABNT, 2020. p. 58. Disponível em: https://www.causc.gov.br/wp-content/uploads/2020/09/ABNT-NBR-9050-15-Acessibilidade-emenda-1_-03-08-2020.pdf. Acesso em: 1 jul. 2024.

Sendo assim, para construir, por exemplo, uma rampa para vencer um desnível de 0,5 m de altura, o comprimento mínimo da projeção horizontal deve ser de 6 m aproximadamente, pois:

$$\frac{d}{c} = i \Rightarrow \frac{d}{c} = 0,0833 \Rightarrow \frac{0,5}{c} = 0,0833 \Rightarrow c \approx 6$$

NO MUNDO

DO TRABALHO Empatia

No sentido mais amplo, empatia é a capacidade de se identificar e se colocar no lugar do outro. É uma das chamadas *soft skills*, que são habilidades relacionadas a aspectos da personalidade de um indivíduo, que empresas têm procurado na contratação de um profissional.

No trabalho, ser empático é muito importante para compreender diversos pontos de vista e ideias a fim de estabelecer uma comunicação mais efetiva, manter boas relações interpessoais, resolver e evitar conflitos. No caso da acessibilidade, a empatia permite aos profissionais entender as necessidades e as limitações de outras pessoas, evitar discriminações e preconceitos, buscar e contribuir com soluções para a inclusão de todos na sociedade.

Assista a este vídeo para obter mais informações a respeito do significado de empatia.

- O QUE significa empatia, na prática? [S. l.: s. n.], 2016. 1 vídeo (1 min). Publicado pelo canal Exame. Disponível em: www.youtube.com/watch?v=Wqn_1NmA0n4. Acesso em: 1 jul. 2024.

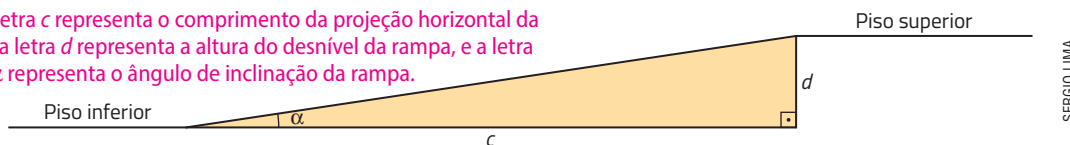
1. Algumas respostas possíveis: Construção de rampas; instalação de elevadores; adaptação de banheiros; aplicação de piso tátil em calçadas; disponibilização de transporte coletivo adaptado; instalação de semáforo sonoro; estabelecimento de vagas especiais em estacionamentos. Resposta pessoal.

PENSANDO NO ASSUNTO

Não escreva no livro.

1. Cite algumas melhorias que podem ser realizadas para tornar uma cidade mais acessível para pessoas com deficiência ou mobilidade reduzida. Depois, explique como essas melhorias podem contribuir com uma sociedade mais justa e inclusiva.
2. O que as normas de acessibilidade buscam garantir? Você conhece outras normas de acessibilidade além da apresentada? Se necessário, faça uma pesquisa.
3. Observe a figura a seguir, que representa uma rampa de acessibilidade, e resolva as questões.

3. a) A letra c representa o comprimento da projeção horizontal da rampa, a letra d representa a altura do desnível da rampa, e a letra grega α representa o ângulo de inclinação da rampa.



- a) Nessa figura, o que é representado pela letra c ? E pela letra d ? E pela letra grega α ?
- b) Estudamos que a inclinação i da rampa é dada pela razão entre a altura do desnível e o comprimento da projeção horizontal dessa rampa. Nessas condições, e considerando a figura apresentada, qual alternativa a seguir é verdadeira? **alternativa III**

I) $i = \sin \alpha$

II) $i = \cos \alpha$

III) $i = \operatorname{tg} \alpha$

4. Em um prédio público, há uma rampa de acesso com 10 m de projeção horizontal e 1 m de altura de desnível. Essa rampa atende ao padrão estabelecido pela norma NBR 9050? Justifique.
5. Com base nas informações apresentadas, resolva os itens a seguir.
 - a) Represente uma rampa por um triângulo retângulo. Indique o ângulo de inclinação da rampa por α , a altura do desnível por d e o comprimento da projeção horizontal por c .
 - b) Determine a medida máxima do ângulo α de inclinação que deve ter uma rampa dessas. Se necessário, consulte a tabela trigonométrica. $\alpha \approx 5^\circ$
6. Nesta questão, vamos explorar a situação-problema a seguir.



As rampas nos prédios públicos atendem ao padrão de inclinação estabelecido pela norma NBR 9050?

4. Não, pois a norma estabelece que a inclinação da rampa não deve ultrapassar 0,0833 e, nesse caso, a inclinação é de 0,1.

Junte-se a três colegas, e façam o que se pede em cada um dos itens.

- a) Com base nessa norma, podemos organizar em um quadro o comprimento horizontal (c) mínimo aproximado, em metro, que deve ter uma rampa de acordo com a altura do desnível (d), em metro. Copiem o quadro a seguir e completem-no.

d	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8
c	1,2	2,4	3,6	4,8	6	7,2	8,4	9,6

Fonte: Dados fictícios.

5. a) Resposta nas Orientações para o professor.

- b) Agora, vamos investigar!

Escolham três prédios públicos do município em que moram e que tenham rampas de acesso para desnível de até 0,8 m de altura. Com uma trena, meçam a projeção do comprimento horizontal (c) e a altura do desnível (d) de cada uma dessas rampas e registrem. Utilizando esses dados, o quadro do item **a** e as informações apresentadas até aqui, analisem se cada uma dessas rampas atende ao padrão de inclinação estabelecido pela norma NBR 9050. **Resposta pessoal.**

- c) Produzam um relatório sobre as rampas analisadas, com informações como: prédio público a que pertencem, medidas obtidas e resultados da investigação (atende ou não ao padrão da norma). Ao final, proponham algumas ações para melhoria da acessibilidade nos prédios escolhidos.

2. As normas de acessibilidade estabelecem critérios e parâmetros técnicos para garantir que diferentes construções e espaços sejam acessíveis à maior quantidade possível de pessoas. Resposta pessoal.

Elaboração do estudante.

Razões trigonométricas em um triângulo qualquer

Até aqui, analisamos as razões trigonométricas em situações envolvendo triângulos retângulos. É importante destacar que, nesses casos, foram determinados o seno, o cosseno e a tangente de ângulos agudos.

Agora, para estudar as razões trigonométricas em um triângulo qualquer, precisamos compreender como calcular o seno e o cosseno de ângulos obtusos. Para isso, é necessário considerar:

- $\text{sen } 90^\circ = 1$
- $\text{cos } 90^\circ = 0$
- $\text{sen } \alpha = \text{sen } (180^\circ - \alpha)$, com $90^\circ < \alpha < 180^\circ$.
- $\text{cos } \alpha = -\text{cos } (180^\circ - \alpha)$, com $90^\circ < \alpha < 180^\circ$.

DICA

As justificativas das relações em destaque serão apresentadas e discutidas no Volume 2 desta coleção.

As duas últimas relações podem ser descritas da seguinte maneira.

O seno de um ângulo obtuso é igual ao seno de seu suplementar.

O cosseno de um ângulo obtuso é igual ao oposto do cosseno de seu suplementar.

Analise alguns exemplos.

- $\text{sen } 120^\circ = \text{sen } (180^\circ - 120^\circ) = \text{sen } 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$;
- $\text{cos } 150^\circ = -\text{cos } (180^\circ - 150^\circ) = -\text{cos } 30^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2}$;
- $\text{sen } 165^\circ = \text{sen } (180^\circ - 165^\circ) = \text{sen } 15^\circ \approx 0,259$;
- $\text{cos } 131^\circ = -\text{cos } (180^\circ - 131^\circ) = -\text{cos } 49^\circ \approx -0,656$.

DICA

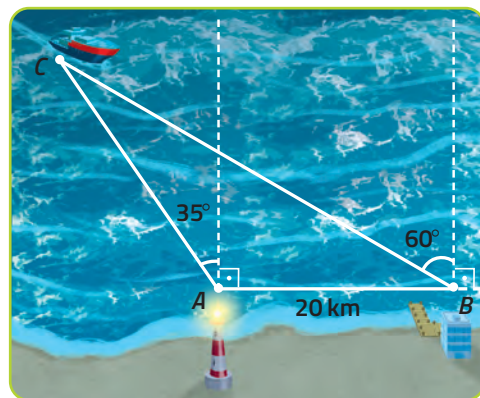
Dizemos que dois ângulos são suplementares quando a soma de suas medidas é igual a 180° .

Lei dos senos

Leia a situação a seguir.

Em uma noite de mar agitado, um navio (ponto C) com problema em seus instrumentos de localização pediu ajuda via rádio ao centro de comando do cais de uma região portuária localizado na encosta (ponto B). Os técnicos do porto verificaram que o navio estava localizado 60° à esquerda do cais. Para confirmar a localização do navio, contataram o faroleiro para saber se ele conseguia determinar com precisão a distância do navio até o porto. Com o auxílio de um sextante, o faroleiro verificou que o navio estava localizado 35° à esquerda do farol (ponto A).

Sabendo que a distância entre o farol e o porto era de 20 km, como o faroleiro pode calcular a distância do navio até o farol e do navio até o porto a partir das informações obtidas?



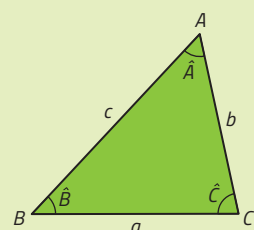
ARTUR FUJITA

Para resolver essa situação, podemos utilizar a relação apresentada a seguir.

Lei dos senos

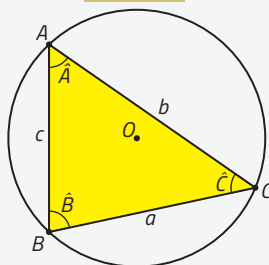
Dado um triângulo ABC qualquer, a medida dos lados é proporcional aos senos dos ângulos internos opostos correspondentes.

$$\frac{a}{\sin \hat{A}} = \frac{b}{\sin \hat{B}} = \frac{c}{\sin \hat{C}}$$



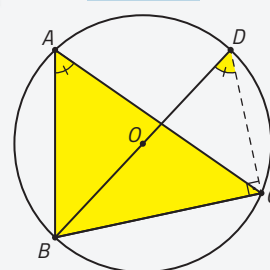
ILUSTRAÇÕES: CROOK PRODUÇÕES

Para demonstrar a lei dos senos para triângulos acutângulos, considere um triângulo acutângulo ABC inscrito em uma circunferência de centro O e raio r .



DICA
Note que, se o triângulo é inscrito na circunferência, então a circunferência é circunscrita ao triângulo.

Ao traçarmos um diâmetro \overline{BD} , obtemos $\widehat{BAC} \equiv \widehat{BDC}$, que são os ângulos inscritos na circunferência correspondentes ao mesmo arco \widehat{BC} . Além disso, o triângulo BCD é retângulo em C , pois é um triângulo inscrito em uma semicircunferência.



Assim:

$$\sin(\widehat{BDC}) = \frac{BC}{BD} \Rightarrow \sin \hat{A} = \frac{a}{2r} \Rightarrow 2r = \frac{a}{\sin \hat{A}}$$

De maneira análoga, podemos determinar que:

$$\bullet \quad 2r = \frac{b}{\sin \hat{B}}; \quad \bullet \quad 2r = \frac{c}{\sin \hat{C}}.$$

Também é possível demonstrar a lei dos senos para triângulos retângulos e para triângulo obtusângulo, o que optamos por não realizar nesta coleção.

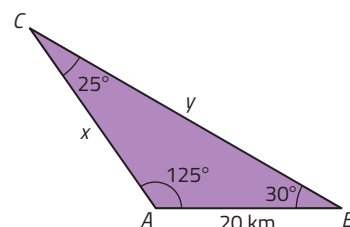
Com isso, concluímos que:

$$\frac{a}{\sin \hat{A}} = \frac{b}{\sin \hat{B}} = \frac{c}{\sin \hat{C}}$$

Em relação à situação apresentada na página **234**, temos que \widehat{BAC} mede 125° ($35^\circ + 90^\circ$), \widehat{ABC} mede 30° ($90^\circ - 60^\circ$) e \widehat{ACB} mede 25° , pois $180^\circ - (125^\circ + 30^\circ) = 25^\circ$. Assim, utilizando a lei dos senos e consultando a tabela trigonométrica, obtemos:

$$\bullet \quad \frac{x}{\sin 30^\circ} = \frac{20}{\sin 25^\circ} \Rightarrow \frac{x}{0,5} \approx \frac{20}{0,423} \Rightarrow x \approx \frac{20 \cdot 0,5}{0,423} \Rightarrow x \approx 23,64.$$

$$\bullet \quad \frac{y}{\underbrace{\sin 125^\circ}_{\sin 55^\circ}} = \frac{20}{\sin 25^\circ} \Rightarrow \frac{y}{0,819} \approx \frac{20}{0,423} \Rightarrow y \approx \frac{20 \cdot 0,819}{0,423} \Rightarrow y \approx 38,72.$$



Portanto, a distância do navio ao farol era de aproximadamente 23,64 km e, do navio ao porto, de aproximadamente 38,72 km.

DICA
Note que:
 $\sin 125^\circ = \sin (180^\circ - 125^\circ) = \sin 55^\circ$.

Atividades resolvidas

R10. Analise o triângulo representado e determine a medida do ângulo α .

Resolução

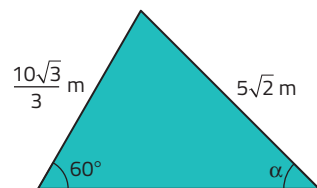
Utilizando a lei dos senos, temos:

$$\frac{5\sqrt{2}}{\sin 60^\circ} = \frac{10\sqrt{3}}{\sin \alpha} \Rightarrow 5\sqrt{2} \cdot \sin \alpha = \frac{\sin 60^\circ}{\frac{\sqrt{3}}{2}} \cdot \frac{10\sqrt{3}}{3} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 5\sqrt{2} \cdot \sin \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{10\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \sin \alpha = \frac{5}{5\sqrt{2}} \Rightarrow \sin \alpha = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Consultando a tabela trigonométrica para os ângulos notáveis, temos $\sin 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Portanto, $\alpha = 45^\circ$.



ILUSTRAÇÕES: CBOOK PRODUÇÕES

R11. Um topógrafo precisava determinar a distância entre os pontos A e B situados nas margens opostas de um rio. Para isso, a partir de A , ele andou 30 m em linha reta até um ponto C . Depois, mediu com um teodolito os ângulos $\hat{B}\hat{A}C$ e $\hat{A}\hat{C}B$ obtendo 49° e 55° , respectivamente. Qual é a distância entre os pontos A e B ?

Resolução

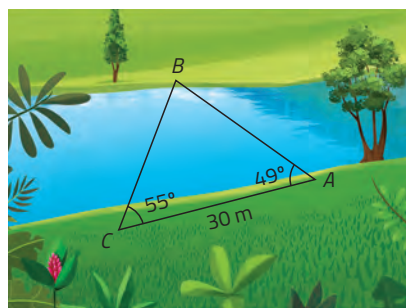
Como a soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo é 180° , a medida x do ângulo $\hat{A}\hat{B}C$ é dada por:

$$x + 55^\circ + 49^\circ = 180^\circ \Rightarrow x = 180^\circ - 104^\circ \Rightarrow x = 76^\circ$$

Assim, utilizando a lei dos senos e consultando a tabela trigonométrica, temos:

$$\frac{AB}{\sin 55^\circ} = \frac{30}{\sin 76^\circ} \Rightarrow \frac{AB}{0,819} \approx \frac{30}{0,970} \Rightarrow 0,970 \cdot AB \approx 24,57 \Rightarrow AB \approx 25,33$$

Portanto, a distância entre os pontos A e B é de aproximadamente 25,33 m.



BENTINHO

Atividades

Não escreva no livro.

40. Determine o perímetro de cada triângulo representado a seguir.

a) aproximadamente 13,61 cm

b) aproximadamente 22,79 m

41. a) Resposta nas **Orientações para o professor.**

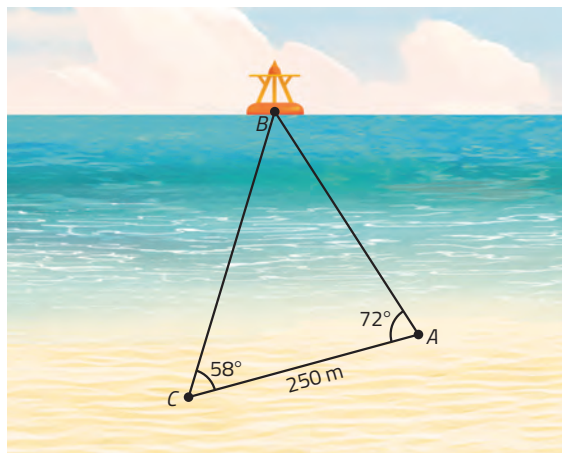
41. Em um trecho de um rio, as margens são paralelas e a distância de um lado até o outro é 259 m. Um pescador pretendia atravessar esse trecho de barco, em linha reta, partindo de um ponto A e chegando a um ponto B . Porém, por causa da correnteza, o pescador seguiu um trajeto retilíneo entre os pontos A e C (sendo C um ponto na mesma margem de B) e, em seguida, entre os pontos C e B , de maneira a formar os ângulos $\hat{B}\hat{A}C$ e $\hat{A}\hat{C}B$, com 54° e 65° , respectivamente.

a) Represente por meio de uma figura a situação descrita.

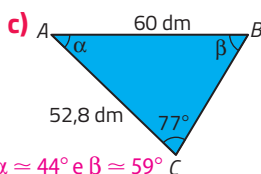
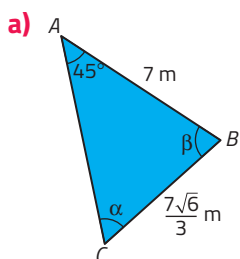
b) Qual é a distância aproximada percorrida pelo pescador ao atravessar o rio? 481,41 m

43. a) Respostas possíveis: $\alpha = 60^\circ$ e $\beta = 75^\circ$ ou $\alpha = 120^\circ$ e $\beta = 15^\circ$.

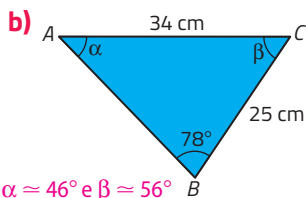
42. Para alertar os banhistas de uma praia sobre os riscos da prática de natação naquele trecho, foi utilizada uma boia de sinalização náutica. Para calcular a distância de um ponto A na praia até essa boia (ponto B), um salva-vidas caminha 250 m em linha reta, de A até um ponto C , e determina as medidas dos ângulos \widehat{ACB} e \widehat{BAC} utilizando um medidor de ângulos a laser. Analise a figura e determine a distância do ponto A até essa boia. **aproximadamente 276,76 m**



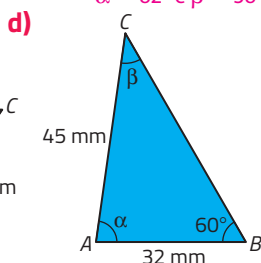
43. Em cada triângulo, determine as medidas dos ângulos internos α e β .



$\alpha \approx 44^\circ$ e $\beta \approx 59^\circ$



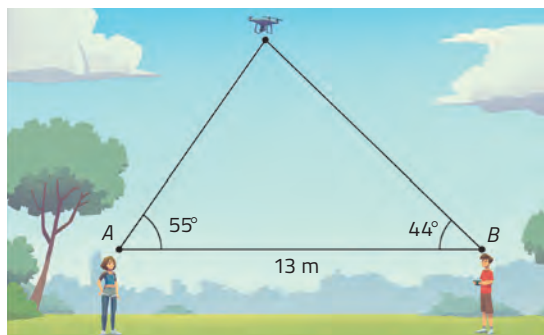
$\alpha \approx 46^\circ$ e $\beta \approx 56^\circ$



$\alpha \approx 82^\circ$ e $\beta \approx 38^\circ$

44. Junte-se a um colega, e elaborem um problema contextualizado em que seja necessário utilizar a lei dos senos para resolvê-lo. Esse problema pode conter uma figura. Em seguida, troquem esse problema com o de outra dupla para que uma resolva o da outra. Juntos, verifiquem se as respostas estão corretas. **Elaboração dos estudantes.**

45. Maurício e Pâmela estão a 13 m de distância um do outro e ambos estão observando um *drone* no alto. Maurício o vê de um ângulo de 44° , e Pâmela vê o mesmo *drone* de um ângulo de 55° , conforme a figura a seguir.



A que distância do *drone* estavam Maurício e Pâmela? **Maurício: aproximadamente 10,78 m; Pâmela: aproximadamente 9,14 m**

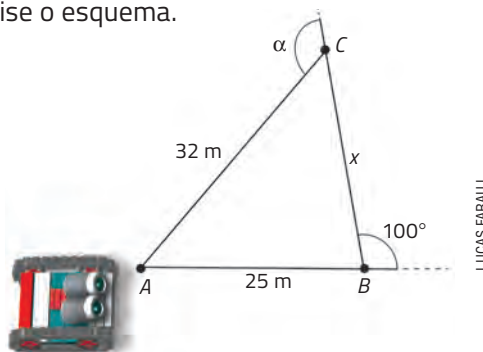
46. Para participar de uma prova em uma competição de robótica, os integrantes de uma equipe devem programar seu robô para realizar as etapas descritas a seguir.

1 O robô, a partir de um ponto A estabelecido em uma superfície plana, deve se deslocar 25 m em linha reta até o ponto B .

2 Deve realizar um giro de 100° , no sentido anti-horário, e se deslocar x metros em linha reta até um ponto C .

3 A partir de C , o robô tem de realizar o menor giro possível, correspondente a um ângulo α , e se deslocar 32 m em linha reta até retornar ao ponto A .

Analise o esquema.



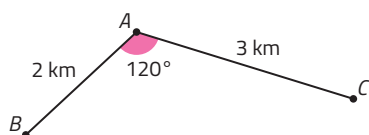
Determine a medida x e construa, no caderno, um fluxograma para descrever como esse robô deve ser programado para realizar todas as etapas dessa prova.

46. $x = 25$ m; Resposta nas **Orientações para o professor.**

• Lei dos cossenos

Leia a situação a seguir.

Em uma propriedade rural, são criados peixes em três tanques: A , B e C . Há tubulações lineares que conectam os tanques A e B e os tanques A e C , conforme ilustra a figura a seguir. Quantos metros de tubulação linear são necessários para conectar os tanques B e C ?



► Tanque de criação de trutas na Serra do Caparaó (ES). Fotografia de 2022.

Em situações como essa, podemos utilizar a relação enunciada a seguir.

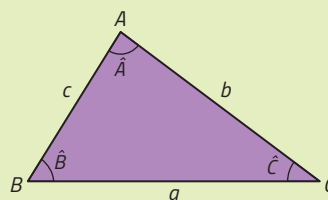
Lei dos cossenos

Dado um triângulo ABC qualquer, o quadrado da medida de um lado é igual à soma dos quadrados das medidas dos outros dois lados, menos o dobro do produto da medida desses dois lados pelo cosseno do ângulo formado por eles.

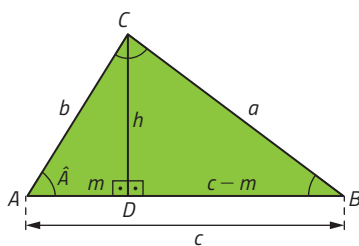
$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos \hat{A}$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos \hat{B}$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos \hat{C}$$



Para demonstrar a lei dos cossenos para triângulos acutângulos, consideramos um triângulo acutângulo ABC qualquer, com altura de medida h em relação ao lado \overline{AB} , conforme a figura a seguir.



ILUSTRAÇÕES: CROOK PRODUÇÕES

De acordo com o teorema de Pitágoras, temos:

- no triângulo BDC : $a^2 = h^2 + (c - m)^2 \Rightarrow a^2 = h^2 + c^2 - 2cm + m^2$ (I)
- no triângulo CDA : $b^2 = h^2 + m^2 \Rightarrow h^2 = b^2 - m^2$ (II)

Substituindo II em I, segue que:

$$a^2 = \underbrace{(b^2 - m^2)}_{h^2} + c^2 - 2cm + m^2 \Rightarrow a^2 = b^2 + c^2 - 2cm \quad \text{(III)}$$

No triângulo retângulo ACD , temos:

$$\cos \hat{A} = \frac{m}{b} \Rightarrow m = b \cdot \cos \hat{A} \quad (\text{IV})$$

Substituindo **IV** em **III**, temos:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2c \cdot \underbrace{b \cdot \cos \hat{A}}_m \Rightarrow a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos \hat{A}$$

De maneira análoga, podemos verificar que:

- $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos \hat{B}$;
- $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos \hat{C}$.

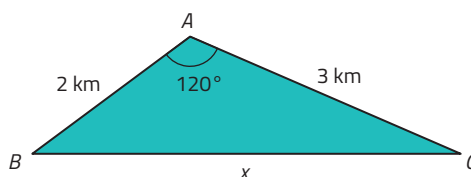
PARA PENSAR

Com um colega, no caderno, demonstrem essas igualdades.

Resposta pessoal.

Procedimentos parecidos permitem demonstrar a lei dos cossenos para triângulos obtusângulos e triângulos retângulos quaisquer, o que optamos por não realizar nesta coleção.

Em relação à situação envolvendo os três tanques de peixe, podemos usar a lei dos cossenos para resolvê-la. Acompanhe.



$$x^2 = 2^2 + 3^2 - 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \cos 120^\circ \Rightarrow x^2 = 4 + 9 - 12 \cdot (-\cos 60^\circ) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2 = 13 - 12 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \Rightarrow x^2 = 19 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = \pm \sqrt{19} \Rightarrow \begin{cases} x \approx -4,36 \text{ (não convém)} \\ \text{ou} \\ x \approx 4,36 \end{cases}$$

Portanto, são necessários cerca de 4,36 km de tubulação linear para conectar os tanques B e C .

ATIVIDADES RESOLVIDAS

R12. Determine a medida α do ângulo interno destacado no triângulo.

Resolução

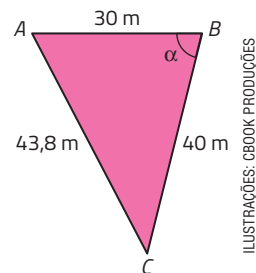
Utilizando a lei dos cossenos, temos:

$$(43,8)^2 = 40^2 + 30^2 - 2 \cdot 40 \cdot 30 \cdot \cos \alpha \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1918,44 = 1600 + 900 - 2400 \cdot \cos \alpha \Rightarrow$$

$$1918,44 - 2500 = -2400 \cdot \cos \alpha \Rightarrow \cos \alpha = \frac{-581,56}{-2400} \approx 0,242$$

Consultando a tabela trigonométrica, identificamos que $\cos 76^\circ \approx 0,242$. Portanto, $\alpha \approx 76^\circ$.



ILUSTRAÇÕES: CBOOK PRODUÇÕES

R13. O proprietário de um terreno de formato triangular pretende instalar uma cerca elétrica sobre o muro que contorna toda a propriedade. Observe, a seguir, os orçamentos realizados por duas empresas para a instalação dessa cerca.

EMPRESA

A

Taxa fixa de R\$ 200,00 mais
R\$ 12,60 por metro de cerca.

EMPRESA

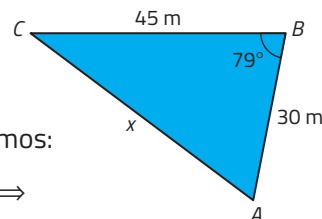
B

Taxa fixa de R\$ 300,00 mais
R\$ 11,20 por metro de cerca.

Sabendo que dois lados desse terreno medem 45 m e 30 m e que esses lados formam um ângulo de 79° , determine qual dos dois orçamentos apresenta o menor preço para a instalação dessa cerca.

Resolução

Podemos representar esse terreno por um triângulo ABC , conforme a figura.



Utilizando a lei dos cossenos e consultando a tabela trigonométrica, temos:

$$x^2 = 45^2 + 30^2 - 2 \cdot 45 \cdot 30 \cdot \cos 79^\circ \Rightarrow x^2 \approx 2925 - 2700 \cdot 0,191 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2 \approx 2409,3 \Rightarrow x \approx \pm \sqrt{2409,3} \Rightarrow \begin{cases} x \approx 49,08 \\ \text{ou} \\ x \approx -49,08 \text{ (não convém)} \end{cases}$$

Assim, o perímetro do terreno é aproximadamente 124,08 m, pois $45 + 30 + 49,08 = 124,08$.

Calculando o valor de cada orçamento, temos:

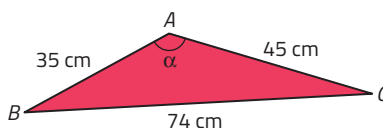
- Empresa **A**: $200 + 12,60 \cdot 124,08 \approx 1\,763,41$; ou seja, R\$ 1.763,41;
- Empresa **B**: $300 + 11,20 \cdot 124,08 \approx 1\,689,70$; ou seja, R\$ 1.689,70.

Portanto, o orçamento da empresa **B** apresenta o menor preço para a instalação dessa cerca.

Atividades

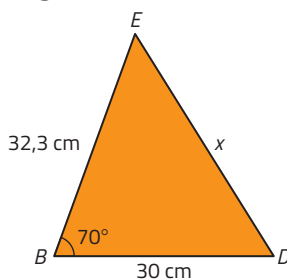
Não escreva no livro.

47. Determine a medida do ângulo α em destaque. 135°



48. Determine a medida de x indicada a seguir.

$\sqrt{1\,280,494}$ cm ou
aproximadamente 35,78 cm



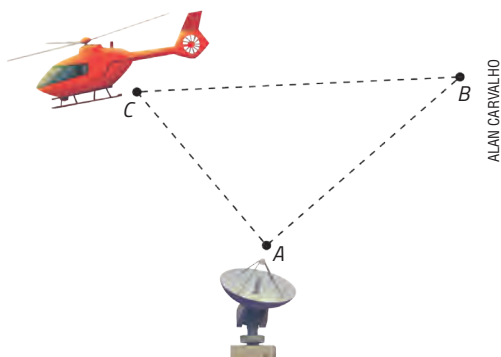
ILUSTRAÇÕES: CBOOK PRODUÇÕES

49. Para resolver cada item a seguir, considere um triângulo ABC .

- Sejam $\text{med}(\widehat{BAC}) = 60^\circ$, $AC = 6$ cm e $AB = 3$ cm. Qual é a medida de \overline{BC} ? $3\sqrt{3}$ cm
- Sejam $\text{med}(\widehat{ABC}) = 45^\circ$, $BC = 8$ cm e $AB = 8\sqrt{2}$ cm. Qual é a medida de \overline{AC} ? 8 cm
- Sejam $\text{med}(\widehat{ACB}) = 120^\circ$, $BC = 28$ cm e $AC = 20$ cm. Qual é a medida de \overline{AB} ? $4\sqrt{109}$ cm ou aproximadamente 41,8 cm

50. b) $\text{med}(\widehat{ACB}) \approx 53^\circ$ e $\text{med}(\widehat{ABC}) \approx 39^\circ$

- 50.** Um radar, posicionado em um ponto A no solo, detectou um helicóptero em dois momentos distintos, quando estava em uma localização identificada pelo ponto B , e depois, no ponto C , conforme a figura a seguir.



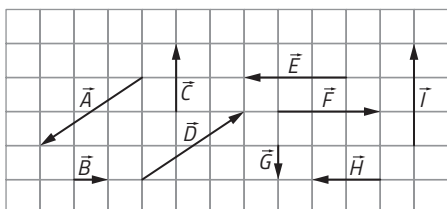
Considerando que esse helicóptero seguiu uma trajetória retilínea de B até C e que $AB = 150$ m, $AC = 118,2$ m e o ângulo formado entre \overline{AB} e \overline{AC} mede 88° , faça o que se pede nos itens a seguir. Se necessário, utilize uma calculadora.

- a) Calcule a distância percorrida pelo helicóptero de B até C . **aproximadamente 187,7 m**
- b) Determine a medida dos ângulos \widehat{ACB} e \widehat{ABC} .
- 51.** Um triângulo tem seu maior ângulo interno medindo 120° , e as medidas de seus lados formam, em centímetro, a sequência $(x - 2, x, x + 2)$. Qual é o perímetro desse triângulo? **15 cm**

- 52.** As grandezas vetoriais são aquelas que, além de serem representadas por um valor numérico e uma unidade, têm direção e sentido. Por exemplo, as grandezas: velocidade, deslocamento, força, aceleração, entre outras.

Fonte dos dados: HALLIDAY, David; RESNICK, Robert; WALKER, Jearl. **Fundamentos de física**: mecânica. 10. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2016. v. 1, p. 114.

- a) Analise os vetores representados a seguir e resolva as questões.

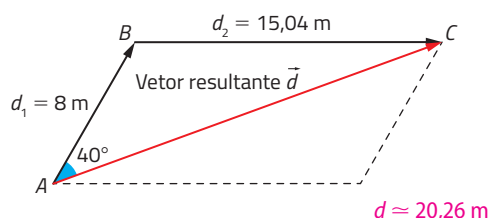


Quais desses vetores têm:

- a mesma direção? $\vec{B}, \vec{E}, \vec{F}$ e $\vec{H}; \vec{A}$ e $\vec{D}; \vec{C}, \vec{G}$ e \vec{I}
- o mesmo sentido? \vec{B} e $\vec{F}; \vec{E}$ e $\vec{H}; \vec{C}$ e \vec{I}
- o mesmo módulo (ou valor numérico)? \vec{A} e $\vec{D}; \vec{B}$ e $\vec{G}; \vec{C}$ e $\vec{H}; \vec{E}, \vec{F}$ e \vec{I}

- b) Quando duas forças que atuam sobre uma partícula têm mesma direção e sentidos opostos, o valor numérico do vetor resultante é dado pela diferença entre essas forças, em valores absolutos. Represente duas forças, F_1 e F_2 , por vetores com mesma direção, sentidos opostos e com módulos respectivamente iguais a 45 N e 25 N. Em seguida, represente o vetor resultante dessas forças e seu módulo. **Resposta nas Orientações para o professor.**

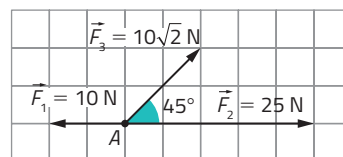
- c)** Suponha que uma partícula se desloque de A para B e, depois, de B para C , conforme a figura a seguir. Podemos representar o deslocamento total do percurso pelo vetor resultante, cujo valor numérico (módulo) é dado pela diagonal de um paralelogramo.



Para a situação descrita, determine o valor numérico (módulo) do vetor resultante \vec{d} .

- d) Uma partícula A está sob ação de três forças conforme o esquema a seguir. Reproduza esse esquema em uma malha quadriculada ou em um programa de computador e represente o vetor resultante dessas forças e o módulo dele.

Resposta nas Orientações para o professor.



ILUSTRAÇÕES: CBOOK PRODUÇÕES

- e)** Na Física, a relação para obter o módulo do vetor resultante da soma de dois vetores é conhecida como regra do paralelogramo. De acordo com essa relação, dados dois vetores \vec{v} e \vec{w} de módulos v e w , respectivamente, e ângulo entre eles de medida θ , o módulo do vetor resultante \vec{u} pode ser expresso como:

$$u^2 = v^2 + w^2 + 2vw \cos \theta$$



Junte-se a um colega, comparem essa relação com a lei dos cossenos e expliquem o porquê das diferenças entre as expressões.

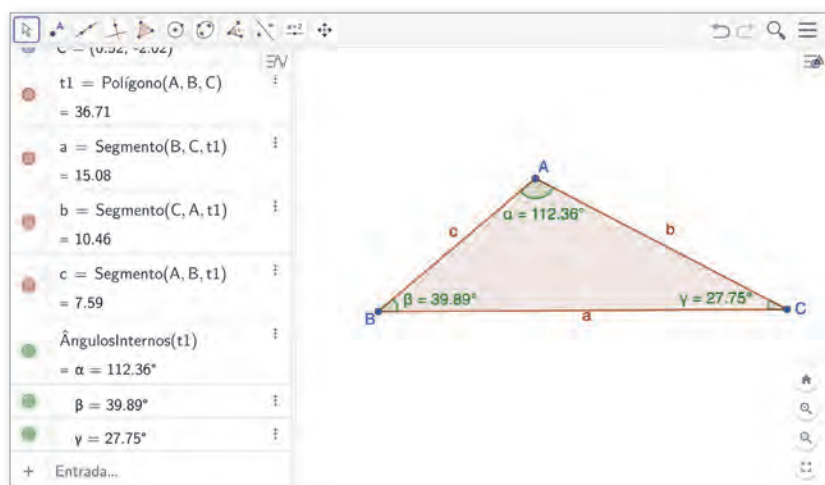
Resposta nas Orientações para o professor.

VOCÊ CONECTADO

Comprovando a validade da lei dos senos

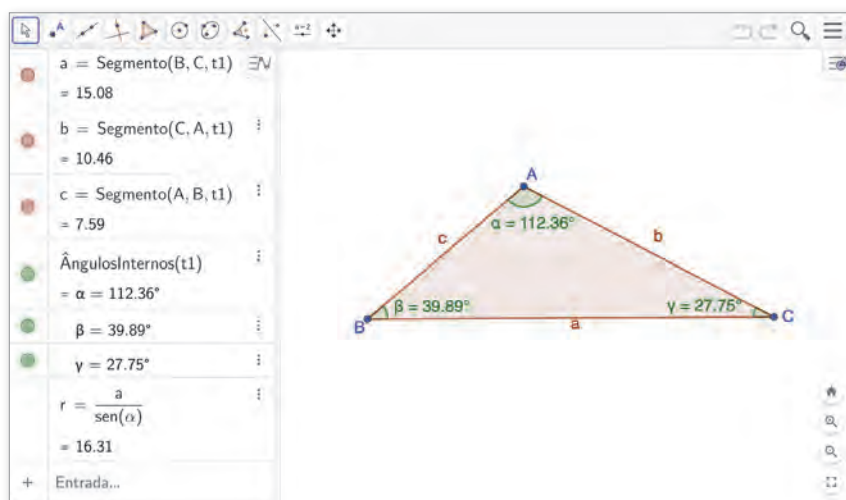
Observe como podemos comprovar geometricamente a validade da lei dos senos em um triângulo qualquer, utilizando o *software* de geometria dinâmica **GeoGebra**. Disponível para acesso *on-line* e *download* em <https://www.geogebra.org/download> (acesso em: 1 jul. 2024).

- A** Com a opção  (Polígono), construímos um triângulo ABC qualquer. Em seguida, com a opção  (Ângulo), clicamos sobre o triângulo construído para obter a medida de seus ângulos internos.




IMAGENS: REPRODUÇÃO/GEOTEBRA

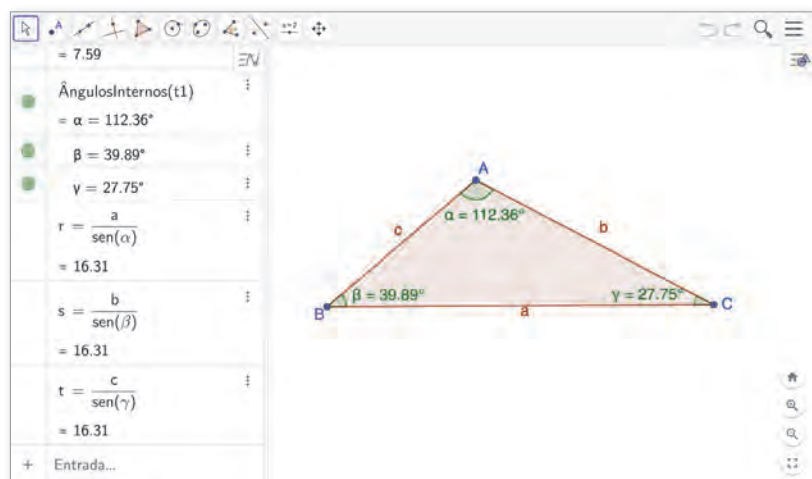
- B** A razão (r) entre a medida do lado a e o seno de α , ângulo oposto a esse lado no triângulo ABC , corresponde a $r = \frac{a}{\sin \alpha}$. Para determinar o valor de r , clicamos no campo **Entrada**, digitamos $r = a/\sin(\alpha)$ e pressionamos a tecla **Enter**. O valor de r pode ser observado na **Janela de Álgebra**.



DICA

Para inserir o símbolo α no campo **Entrada**, podemos clicar em  (Teclado virtual) e escolher a opção α, β, γ , localizada na parte direita desse campo.

- C** De maneira análoga à etapa anterior, calculamos as razões $s = \frac{b}{\sin \beta}$ e $t = \frac{c}{\sin \gamma}$ digitando $s = b/\sin(\beta)$ e $t = c/\sin(\gamma)$, respectivamente, no campo **Entrada**.



IMAGENS: REPRODUÇÃO/GEOTEBRA

1. Sim, pois as razões entre a medida de cada lado e do seno do ângulo interno oposto a esse lado são, respectivamente, iguais.

MÃOS À OBRA

Não escreva no livro.

- Em relação ao triângulo construído no exemplo apresentado, a lei dos senos foi verificada? Justifique.
- No **GeoGebra**, com a opção (Polígono), construa um triângulo ABC qualquer e, com a opção (Ângulo), determine a medida dos ângulos internos desse triângulo. Em seguida, de maneira análoga à realizada no exemplo, calcule as razões r , s e t .
 - Qual é a relação entre os valores que você obteve para r , s e t ?
 - Nesse triângulo, a lei dos senos foi verificada? Por quê? *Sim, pois os valores das razões r , s e t são iguais.*
 - Utilizando a opção (Mover), movimente um ou mais vértices do triângulo que você construiu. O que aconteceu com os valores de r , s e t ? A relação que você indicou ter observado no item **a** se manteve?
- De maneira análoga ao exemplo, podemos verificar a lei dos cossenos utilizando o **GeoGebra**. Para isso, podemos seguir as etapas indicadas.
 - Construímos um triângulo qualquer com a opção (Polígono).

2. **c)** Resposta esperada: Os valores de r , s e t foram modificados, mas as razões se mantiveram iguais. Sim.

2. **a)** Resposta esperada: Os valores dessas razões são iguais.

- Utilizamos as opções (Ângulo) e (Distância, comprimento ou perímetro) para obter as medidas de um dos ângulos internos do triângulo e dos lados que formam o ângulo escolhido.
- Com base na lei dos cossenos, digitamos no campo **Entrada** uma expressão para determinar a medida do lado oposto ao ângulo cuja medida foi obtida.
- Comparamos o valor obtido pela expressão digitada com a medida do lado apresentada na **Janela de Álgebra** do programa.

Junte-se a um colega, e comprovem geometricamente a validade da lei dos cossenos, conforme as etapas indicadas. *Construção dos estudantes.*

4. Nesta Unidade, foram apresentadas as seguintes relações:

- o seno de um ângulo obtuso é igual ao seno de seu suplementar;
- o cosseno de um ângulo obtuso é igual ao oposto do cosseno de seu suplementar.

Junte-se a um colega, e, utilizando o **GeoGebra**, pensem em uma estratégia para verificar cada uma dessas relações e realizem-na. Depois, registrem as etapas que vocês realizaram.

Construção dos estudantes.

O QUE ESTUDEI

Não escreva no livro.

1. Leia com atenção cada frase a seguir e faça uma reflexão sobre seu comportamento durante o estudo desta Unidade. Depois, responda se você **concorda**, **concorda parcialmente** ou **não concorda** com cada uma das afirmações. *Respostas pessoais.*

a) Ouvi com atenção as explicações do professor.

d) Participei das discussões propostas à turma.

g) Respeitei os colegas nas atividades em grupo.

b) Quando precisei, pedi ajuda ao professor.

e) Fiz as atividades propostas na sala de aula.

h) Auxiliei os colegas quando eles tiveram dúvidas.

c) Auxiliei o professor quando ele me pediu.

f) Fiz as atividades escolares propostas para casa.

i) Levei para a sala de aula os materiais necessários.

2. Nas fichas a seguir estão indicados os principais conteúdos que estudamos nesta Unidade. Reflita sobre cada um deles e verifique se você precisa retomar algum para melhor compreendê-lo. *Resposta pessoal.*

Teorema de Tales

Relações métricas no triângulo retângulo

Tabela trigonométrica

Semelhança de polígonos

Teorema de Pitágoras

Lei dos senos

Semelhança de triângulos

Razões trigonométricas no triângulo retângulo

Lei dos cossenos

3. Agora, para retomar de maneira colaborativa o estudo de um conteúdo desta Unidade, junte-se a dois colegas, e sigam as etapas. *Respostas pessoais.*

1 SELECIONAR

Consultem os conteúdos indicados na atividade anterior e escolham um deles. Deem preferência a um conteúdo em que foi constatada necessidade de retomada de estudo.

2 REVISAR

Juntos, façam uma revisão do estudo desse conteúdo. É importante a participação de todos os integrantes nessa revisão.

4 APRESENTAR

Na apresentação, é importante usar uma linguagem adequada, simples e objetiva. É necessário oportunizar um momento para que cada integrante do grupo possa contribuir com as explicações. Ao final, vocês podem disponibilizar os materiais produzidos aos demais colegas da turma.

3 PREPARAR

Elaborem uma apresentação sobre esse conteúdo, o que pode ser realizado por meio de *slides*, cartazes, vídeo, entre outros recursos. Na apresentação, podem ser incluídos exemplos e atividades resolvidas. Também podem ser propostas atividades para que os demais colegas da turma resolvam.

4. a) Premissas (hipóteses): Os triângulos ABC e $A'B'C'$ são semelhantes e a razão de semelhança entre esses triângulos é k ; conclusão (tese): a razão entre os perímetros dos triângulos ABC e $A'B'C'$ também é k .

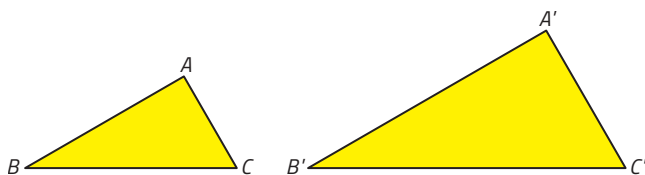
- 4.** Na abertura desta Unidade, foram apresentadas algumas informações sobre os métodos científicos indutivo e dedutivo. Percebemos que, na Matemática, o método dedutivo é o mais utilizado, isto é, para que uma “propriedade” matemática seja estabelecida, geralmente, parte-se de premissas gerais consideradas verdadeiras (hipóteses) para se chegar a resultados mais particulares e específicos (tese). Chamamos o desenvolvimento desse raciocínio de **demonstração matemática** ou **prova**. Analise um exemplo.

Se a razão de semelhança entre dois triângulos é k , então a razão entre seus perímetros também é k .

Demonstração:

Sejam dois triângulos ABC e $A'B'C'$ semelhantes, em que k é a razão de semelhança. Assim,

$$\text{temos que: } \frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{AC}{A'C'} = k \Rightarrow \begin{cases} AB = k \cdot A'B' \\ BC = k \cdot B'C' \\ AC = k \cdot A'C' \end{cases}$$



ILUSTRAÇÕES: CBOOK PRODUÇÕES

Como o perímetro do triângulo ABC é dado por $AB + BC + AC$ e o perímetro do triângulo $A'B'C'$ é dado por $A'B' + B'C' + A'C'$, segue que:

$$\frac{AB + BC + AC}{A'B' + B'C' + A'C'} = \frac{k \cdot A'B' + k \cdot B'C' + k \cdot A'C'}{A'B' + B'C' + A'C'} = \frac{k \cdot (A'B' + B'C' + A'C')}{A'B' + B'C' + A'C'} = k$$

Portanto, a razão entre os perímetros desses triângulos também é k .

- a)** Identifique as premissas consideradas (hipóteses) e a conclusão obtida na demonstração apresentada (tese).
- b)** Sabendo que, no triângulo ABC , o lado \overline{BC} mede 8 cm e os ângulos \widehat{ABC} e \widehat{BAC} medem, respectivamente, 30° e 90° , determine:
- a medida dos lados \overline{AB} e \overline{AC} desse triângulo; $AB = 4\sqrt{3}$ cm; $AC = 4$ cm
 - a medida da projeção do cateto \overline{AB} sobre a hipotenusa; 6 cm
 - a medida da projeção do cateto \overline{AC} sobre a hipotenusa. 2 cm
- c)** Considere as informações do item **b** e que seja traçada uma reta paralela ao lado \overline{BC} do triângulo ABC de maneira a obter um triângulo menor ADE . Se \overline{DE} medir 5 cm, qual será a medida dos outros lados do triângulo ADE ? $\frac{5\sqrt{3}}{2}$ cm e 2,5 cm
- d)** Utilizando o método científico dedutivo, mostre ser verdadeira a seguinte propriedade matemática.

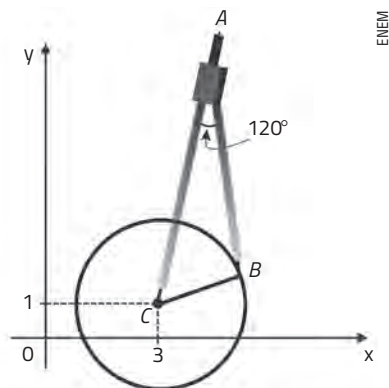
Seja k a razão de semelhança entre dois quadrados. Então, a razão entre as áreas desses quadrados é k^2 .

Resposta nas
**Orientações
para o
professor.**

PRATICANDO: ENEM E VESTIBULARES

Não escreva no livro.

1. (Enem/MEC) Uma desenhista projetista deverá desenhar uma tampa de panela em forma circular. Para realizar esse desenho, ela dispõe, no momento, de apenas um compasso, cujo comprimento das hastes é de 10 cm, um transferidor e uma folha de papel com um plano cartesiano. Para esboçar o desenho dessa tampa, ela afastou as hastes do compasso de forma que o ângulo formado por elas fosse de 120° . A ponta-seca está representada pelo ponto C , a ponta do grafite está representada pelo ponto B e a cabeça do compasso está representada pelo ponto A conforme a figura.



Após concluir o desenho, ela o encaminha para o setor de produção. Ao receber o desenho com a indicação do raio da tampa, verificará em qual intervalo este se encontra e decidirá o tipo de material a ser utilizado na sua fabricação, de acordo com os dados.

Tipo de material	Intervalo de valores do raio (cm)
I	$0 < R \leq 5$
II	$5 < R \leq 10$
III	$10 < R \leq 15$
IV	$15 < R \leq 21$
V	$21 < R \leq 40$

Considere 1,7 como aproximação para $\sqrt{3}$. O tipo de material a ser utilizado pelo setor de produção será **alternativa d**

- a) I. b) II. c) III. d) IV. e) V.

2. (UECE) Se as medidas de dois dos lados de um triângulo são respectivamente 7 m e $5\sqrt{2}$ m e se a medida do ângulo entre esses lados é 135 graus, então, a medida, em metros, do terceiro lado é: **alternativa d**

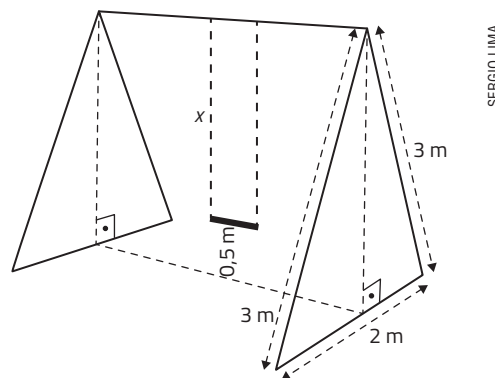
- a) 12. b) 14. c) 15. d) 13.

3. (Enem/MEC) Um túnel viário de uma única via possui a entrada na forma de um triângulo equilátero de lado 6 m. O motorista de um caminhão com 3 m de largura deve decidir se passa por esse túnel ou se toma um caminho mais longo. Para decidir, o motorista calcula a altura que esse caminhão deveria ter para tangenciar a entrada do túnel. Considere o caminhão como um paralelepípedo reto.

Essa altura, em metro, é: **alternativa e**

- a) 3 c) $3\sqrt{3}$ e) $\frac{3\sqrt{3}}{2}$
b) $3\sqrt{2}$ d) $\frac{3\sqrt{2}}{2}$

4. (Enem/MEC) Um brinquedo muito comum em parques de diversões é o balanço. O assento de um balanço fica a uma altura de meio metro do chão, quando não está em uso. Cada uma das correntes que o sustenta tem medida do comprimento, em metro, indicada por x . A estrutura do balanço é feita com barras de ferro, nas dimensões, em metro, conforme a figura.



Nessas condições, o valor, em metro, de x é igual a: **alternativa c**

- a) $\sqrt{2} - 0,5$ d) $\sqrt{10} - 0,5$
b) 1,5 e) $\sqrt{8}$
c) $\sqrt{8} - 0,5$

5. (Enem/MEC) Uma indústria recortou uma placa de metal no formato triangular ABC , conforme Figura 1, com lados 18, 14 e 12 cm. Posteriormente, a peça triangular ABC foi dobrada, de tal maneira que o vértice B ficou sobre o segmento \overline{AC} , e o segmento \overline{DE} ficou paralelo ao lado \overline{AC} , conforme Figura 2.

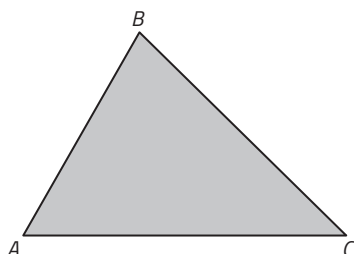


Figura 1

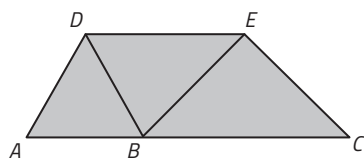


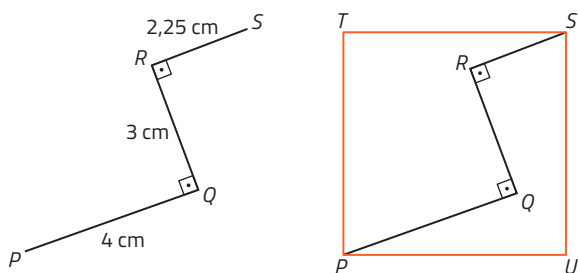
Figura 2

Sabe-se que, na Figura 1, o ângulo \hat{ACB} é menor que o ângulo \hat{CAB} e este é menor que o ângulo \hat{ABC} , e que os cortes e dobraduras foram executados corretamente pelas máquinas.

Nessas condições, qual é o valor da soma dos comprimentos, em centímetro, dos segmentos \overline{DB} , \overline{BE} e \overline{EC} ? **alternativa b**

- a) 19 c) 21 e) 24
b) 20 d) 23

6. (Unifesp-SP) Um fio retilíneo de arame de comprimento de 9,25 cm será dobrado, em ângulos retos, em dois pontos, Q e R . Tais dobras produzem três segmentos de retas de medidas: $PQ = 4$ cm, $QR = 3$ cm e $RS = 2,25$ cm = $\frac{9}{4}$ cm. Já com as dobras, o fio de arame deverá encaixar-se perfeitamente no quadrado $TSUP$, de diagonal \overline{PS} , como mostram as figuras.

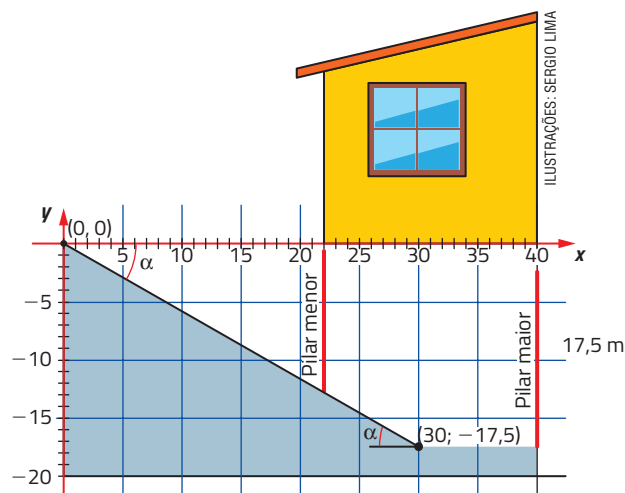


6. b) $\frac{769}{32} \text{ cm}^2$

- a) Calcule a medida do segmento \overline{PR} , em centímetros, e a medida do segmento \overline{QS} , em milímetros. $PR = 5$ cm; $QS = 37,5$ mm
- b) Calcule a área do quadrado $TSUP$, em cm^2 .
7. (Unesp) A figura indica o projeto de uma casa, sustentada por dois pilares e com rampa retilínea, de inclinação α em relação à horizontal, direcionando-se ao subsolo da casa. Todas as medidas indicadas na figura estão em metros.

Dados:

α	$\text{tg } \alpha$	α	$\text{tg } \alpha$
23°	0,424	28°	0,532
24°	0,445	29°	0,554
25°	0,466	30°	0,577
26°	0,488	31°	0,601
27°	0,510	32°	0,625



Considerando que os dois pilares são retilíneos e perpendiculares ao eixo x , a medida do pilar menor, em metros, e o intervalo angular ao qual α pertence são, respectivamente:

alternativa b

- a) $\frac{77}{8}$ e $30^\circ < \alpha < 31^\circ$
b) $\frac{77}{6}$ e $30^\circ < \alpha < 31^\circ$
c) $\frac{77}{8}$ e $23^\circ < \alpha < 24^\circ$
d) $\frac{77}{8}$ e $26^\circ < \alpha < 27^\circ$
e) $\frac{77}{6}$ e $31^\circ < \alpha < 32^\circ$

8. (UECE) Uma plantação de alface ocupa uma área de forma retangular. Essa área é tal que a distância entre seus cantos opostos é 150 m, e a medida do menor ângulo entre suas diagonais é 60 graus. Então, a medida, em m^2 , da área considerada é: **alternativa a**

a) $5625\sqrt{3}$. c) $5615\sqrt{2}$.
b) $5620\sqrt{3}$. d) $5625\sqrt{2}$.

9. (UFG-GO) Uma haste ABC , com articulação em B , tem medidas dos braços $AB = 3$ e $BC = 4$. Uma mola deve ser selecionada para ligar as extremidades A e C . As dimensões mínima e máxima da mola devem ser escolhidas de modo que a medida x do ângulo de vértice em B possa variar apenas de 60 a 90 graus.

Pela Lei dos Cossenos tem-se que

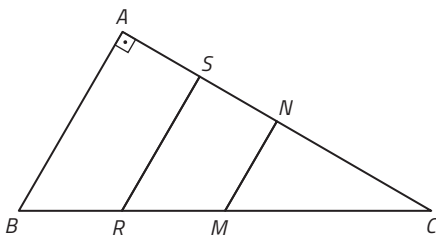
$$AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2 \cdot AB \cdot BC \cdot \cos(x).$$

Então, a mola AC deverá ter medida do comprimento com a variação mínima e máxima de, respectivamente, **alternativa b**

a) $\sqrt{13}$ e 4. c) 6 e $\sqrt{37}$.
b) $\sqrt{13}$ e 5. d) $\sqrt{37}$ e 7.

10. (IFBA) Na figura abaixo $BM = \frac{BC}{2}$, $BR = \frac{BC}{4}$ e

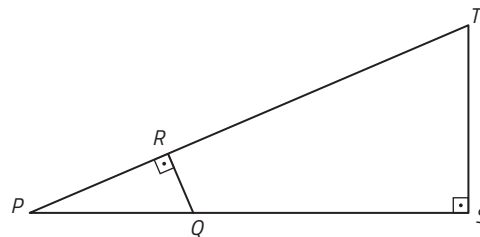
\overline{MN} é paralelo a \overline{RS} e \overline{AB} . Nestas condições, a porcentagem da área do trapézio $RMNS$ correspondente à área do triângulo ABC é de: **alternativa b**



a) 25% c) 35% e) 39%
b) 31,25% d) 37,75%

11. (ITA-SP) Considere a circunferência λ de centro O passando por um ponto A . Sejam B um ponto tal que A é o ponto médio de \overline{OB} e M um ponto de λ tal que $\widehat{AOM} = 100^\circ$. Seja r a reta tangente à λ passando por M . Seja \overline{DE} a projeção ortogonal do segmento \overline{AB} sobre a reta r . Determine, em graus, a medida do ângulo \widehat{AEB} . **40°**

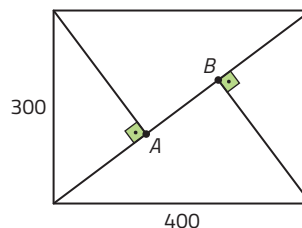
12. (UERJ) Nos triângulos retângulos PQR e PST , representados a seguir, o ponto Q pertence ao segmento de reta \overline{PS} e o ponto R pertence ao segmento de reta \overline{PT} . As medidas dos segmentos \overline{PQ} , \overline{QR} e \overline{PS} são, respectivamente, 41 cm, 9 cm e 100 cm.



A medida do segmento \overline{ST} , em centímetros, é igual a: **alternativa b**

a) 18 b) 22,5 c) 26 d) 30,5

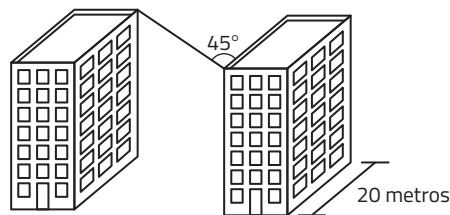
13. (UFRR) Uma praça de formato retangular, de lados 300 m e 400 m, receberá dois postes de iluminação nos pontos A e B representados na figura a seguir:



A distância entre os dois postes será de: **alternativa e**

a) 180 m c) 500 m e) 140 m
b) 320 m d) 250 m

14. (UEG-GO) Dois prédios idênticos e com formato de paralelepípedo retângulo foram ligados por um cabo, conforme a figura a seguir. Sabendo-se que o cabo faz um ângulo de 45° com a lateral de ambos os prédios e a largura deles é de 20 metros, verifica-se que a distância entre os prédios é de: **alternativa c**



ILUSTRAÇÕES:
SÉRGIO LIMA

a) 10 metros d) 25 metros
b) 15 metros e) 30 metros
c) 20 metros

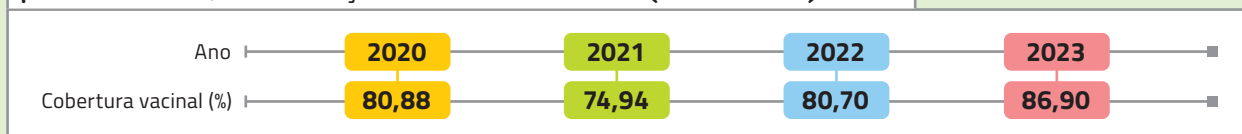
ESTATÍSTICA: GRÁFICOS E TABELAS

Vacinação

De acordo com a Organização Mundial da Saúde (OMS), a hesitação vacinal é uma ameaça à saúde global. A relutância ou recusa em vacinar-se ou vacinar os dependentes, em muitos casos, está relacionada ao medo ou à desinformação sobre as possíveis reações adversas da vacina. No Brasil, uma consequência da hesitação vacinal é o aumento de casos de doenças controladas há muito tempo, como o sarampo, e o risco do reaparecimento de doenças graves já erradicadas, como a poliomielite.

Acompanhe alguns dados estatísticos sobre vacinação no Brasil.

Cobertura da vacina tríplice viral (sarampo, caxumba e rubéola), primeira dose, em crianças de 1 ano no Brasil (2020-2023)

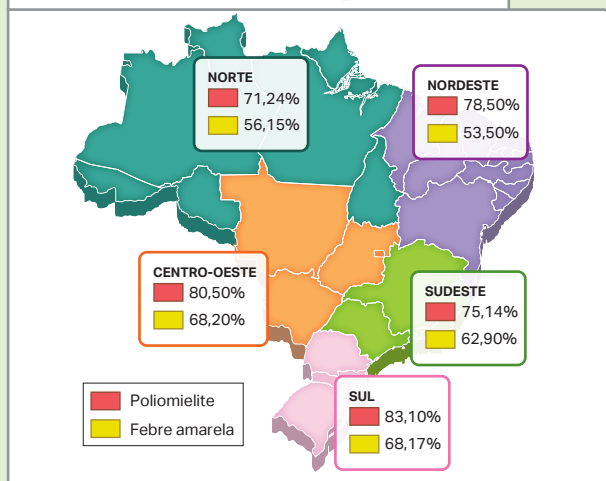


Fontes dos dados: BRASIL. Ministério da Saúde. **Imunizações**: cobertura: Brasil. Brasília, DF: Datasus, 2024. Disponível em: http://tabnet.datasus.gov.br/cgi/dhdat.exe?bd_pni/cpnibr.def.

BRASIL. Ministério da Saúde. **Imunizações**: coberturas vacinais: Brasil. Brasília, DF: MS, 2024. Disponível em: https://infoms.saude.gov.br/content/Default/Cobertura%20Vacinal%202022-2023_240423_200652.pdf. Acessos em: 23 jul. 2024.

EDITORIA DE ARTE

Cobertura vacinal por tipo de vacina no Brasil, por região, 2022*



DACOSTA MAPAS

Fonte dos dados: BRASIL. Ministério da Saúde. **Imunizações**: cobertura: Brasil. Brasília, DF: Datasus, 2024. Disponível em: http://tabnet.datasus.gov.br/cgi/dhdat.exe?bd_pni/cpnibr.def. Acesso em: 23 jul. 2024.

*Representação fora dos padrões cartográficos.

Não escreva no livro.

Após ler as informações, converse com os colegas e o professor sobre os itens a seguir.

1. Sua carteira de vacinação está em dia? Se for o caso, indique as vacinas faltantes.
2. Em seu entendimento, por que a "hesitação vacinal" é uma das maiores ameaças à saúde global?
3. De que outras maneiras você pode representar os dados sobre vacinação apresentados a fim de facilitar a compreensão das informações?

Respostas nas **Orientações para o professor**.

Tabelas

Você se lembra dos tipos de tabela que estudou no Ensino Fundamental e dos elementos que compunham essas tabelas? Vamos retomar esse estudo organizando em tabelas as informações sobre vacinação apresentadas na abertura desta Unidade. Acompanhe.

Tabela simples

Cobertura da vacina tríplice viral (sarampo, caxumba e rubéola), primeira dose, em crianças de 1 ano no Brasil, 2020-2023

Esta linha indica que, em 2020, a cobertura da vacina tríplice viral, primeira dose, em crianças de 1 ano no Brasil foi de 80,88%.

Esta coluna indica cada ano.

A fonte indica onde os dados foram obtidos.

O título indica a principal informação da tabela.

Ano	Cobertura vacinal (%)
2020	80,88
2021	74,94
2022	80,70
2023	86,90

Esta coluna indica o percentual de cobertura da vacina tríplice viral, primeira dose, em crianças de 1 ano no Brasil em cada ano.

Fontes dos dados: BRASIL. Ministério da Saúde. **Imunizações:** cobertura: Brasil. Brasília, DF: Datasus, 2024. Disponível em: http://tabnet.datasus.gov.br/cgi/dhdat.exe?bd_pni/cpnibr.def. BRASIL. Ministério da Saúde. **Imunizações:** coberturas vacinais: Brasil. Brasília, DF: MS, 2024. Disponível em: https://infoms.saude.gov.br/content/Default/Cobertura%20Vacinal%202022-2023_240423_200652.pdf. Acessos em: 23 jul. 2024.

Tabela de dupla entrada

Cobertura vacinal por tipo de vacina no Brasil, por região, 2022

Esta célula indica o percentual da cobertura da vacina da poliomielite na Região Nordeste em 2022.

Cada linha indica a cobertura das vacinas da poliomielite e da febre amarela em cada região do Brasil, em 2022.

Tipo de vacina Região	Poliomielite	Febre amarela
Centro-Oeste	80,50%	68,20%
Nordeste	78,50%	53,50%
Norte	71,24%	56,15%
Sudeste	75,14%	62,90%
Sul	83,10%	68,17%

Esta coluna indica os dados sobre a vacinação contra a poliomielite.

Esta coluna indica os dados sobre a vacinação contra a febre amarela.

Fonte dos dados: BRASIL. Ministério da Saúde. **Imunizações:** cobertura: Brasil. Brasília, DF: Datasus, 2024. Disponível em: http://tabnet.datasus.gov.br/cgi/dhdat.exe?bd_pni/cpnibr.def. Acesso em: 23 jul. 2024.

Resposta pessoal. Algumas respostas possíveis: Pobreza e baixa renda da família, busca por mão de obra barata, falta de perspectiva, entre outros fatores.

Gráficos

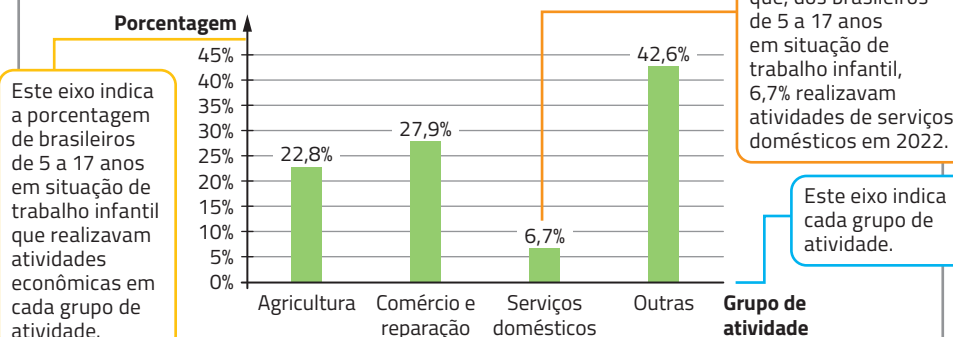
Além de utilizar tabelas, os dados podem ser apresentados em gráficos. A escolha do tipo de gráfico mais adequado depende da natureza desses dados. Vamos estudar as características de alguns tipos de gráfico.

Gráfico de colunas e gráfico de barras

O **gráfico de colunas** e o **gráfico de barras** podem ser utilizados com o objetivo de comparar os dados pesquisados. Isso ocorre porque a altura das colunas ou o comprimento das barras são proporcionais aos dados que representam, o que possibilita essa comparação de maneira visual.

Analise, por exemplo, o gráfico de colunas a seguir.

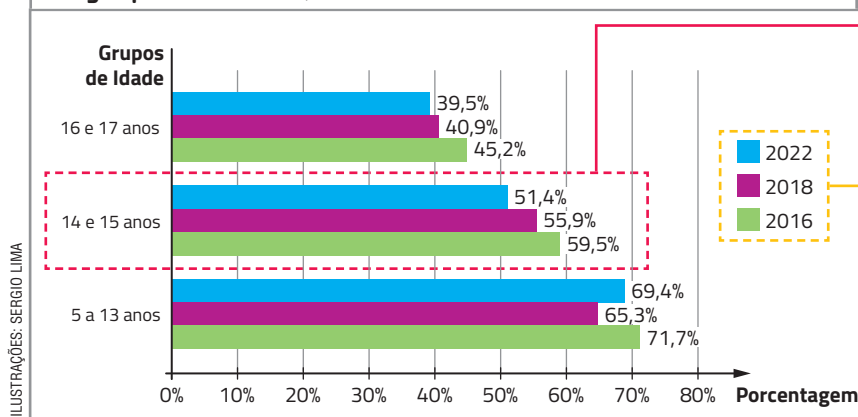
Distribuição das pessoas de 5 a 17 anos em situação de trabalho infantil que realizavam atividades econômicas, segundo o grupo de atividade, 2022



Fonte dos dados: INSTITUTO BRASILEIRO DE GEOGRAFIA E ESTATÍSTICA. **Pesquisa Nacional por Amostra de Domicílios Contínua:** trabalho de crianças e adolescentes de 5 a 17 anos de idade 2016/2022. Rio de Janeiro: IBGE, c2023. (Investigações Experimentais, p. 5). Disponível em: https://biblioteca.ibge.gov.br/visualizacao/livros/liv102059_informativo.pdf. Acesso em: 23 jul. 2024.

Agora, analise o seguinte gráfico de barras triplas.

Pessoas de 5 a 17 anos que realizavam ocupações da Lista das Piores Formas de Trabalho Infantil (Lista TIP), no total das que realizavam atividade econômica, segundo os grupos de idade, 2016-2022



A legenda indica que as barras verdes correspondem ao percentual para o ano de 2016, as barras roxas, para o ano de 2018, e as barras azuis, para o ano de 2022.

Fonte dos dados: INSTITUTO BRASILEIRO DE GEOGRAFIA E ESTATÍSTICA. **Pesquisa Nacional por Amostra de Domicílios Contínua:** trabalho de crianças e adolescentes de 5 a 17 anos de idade 2016/2022. Rio de Janeiro: IBGE, c2023. (Investigações Experimentais, p. 6). Disponível em: https://biblioteca.ibge.gov.br/visualizacao/livros/liv102059_informativo.pdf. Acesso em: 23 jul. 2024.

PARA PENSAR

Os gráficos de colunas e de barras apresentados estão relacionados ao trabalho infantil no Brasil. De acordo com o Estatuto da Criança e do Adolescente, em seu art. 60,

É proibido qualquer trabalho a menores de quatorze anos de idade, salvo na condição de aprendiz.

BRASIL. **Lei nº 8.069, de 13 de julho de 1990.**

Dispõe sobre o Estatuto da Criança e do Adolescente e dá outras providências. Brasília, DF: Presidência da República, [2024]. Disponível em: https://www.planalto.gov.br/ccivil_03/leis/L8069.htm. Acesso em: 23 jul. 2024.

• Você considera que os dados a respeito do trabalho infantil são altos ou baixos? Em seu entendimento, que fatores colaboraram para a existência do trabalho infantil?

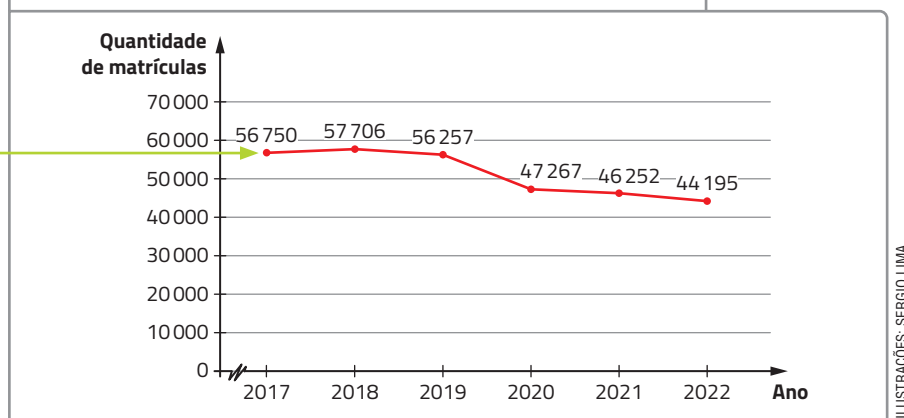
● Gráfico de segmentos

O **gráfico de segmentos** (também chamado de gráfico de linhas) pode ser utilizado com o objetivo de analisar o comportamento de uma ou mais variáveis no decorrer do tempo, como períodos de crescimento, decréscimo ou constância.

Analise, a seguir, dois exemplos de gráfico de segmentos.

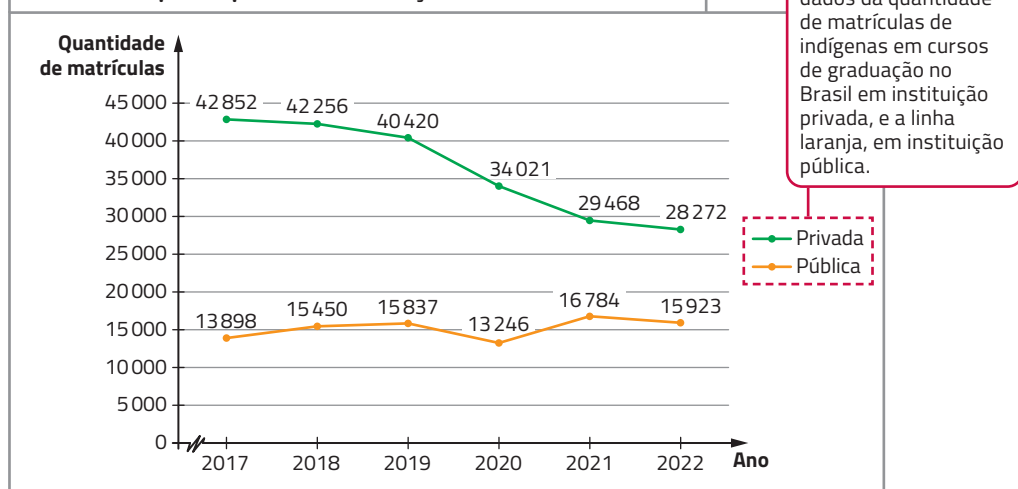
Este ponto indica a quantidade de matrículas de indígenas em cursos de graduação no Brasil em 2017.

Matrículas de indígenas em cursos de graduação no Brasil, 2017-2022



Fonte dos dados: BRASIL. Ministério da Educação. Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira. **Sinopses estatísticas da educação superior: graduação**. Brasília, DF: Inep, 2023. Localizável em: 2022: Sinopse estatística da educação superior 2022. Disponível em: <https://www.gov.br/inep/pt-br/aceso-a-informacao/dados-abertos/sinopses-estatisticas/educacao-superior-graduacao>. Acesso em: 23 jul. 2024.

Matrículas de indígenas em cursos de graduação no Brasil, por tipo de instituição, 2017-2022



Fonte dos dados: BRASIL. Ministério da Educação. Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira. **Sinopses estatísticas da educação superior: graduação**. Brasília, DF: Inep, 2023. Localizável em: 2022: Sinopse estatística da educação superior 2022. Disponível em: <https://www.gov.br/inep/pt-br/aceso-a-informacao/dados-abertos/sinopses-estatisticas/educacao-superior-graduacao>. Acesso em: 23 jul. 2024.

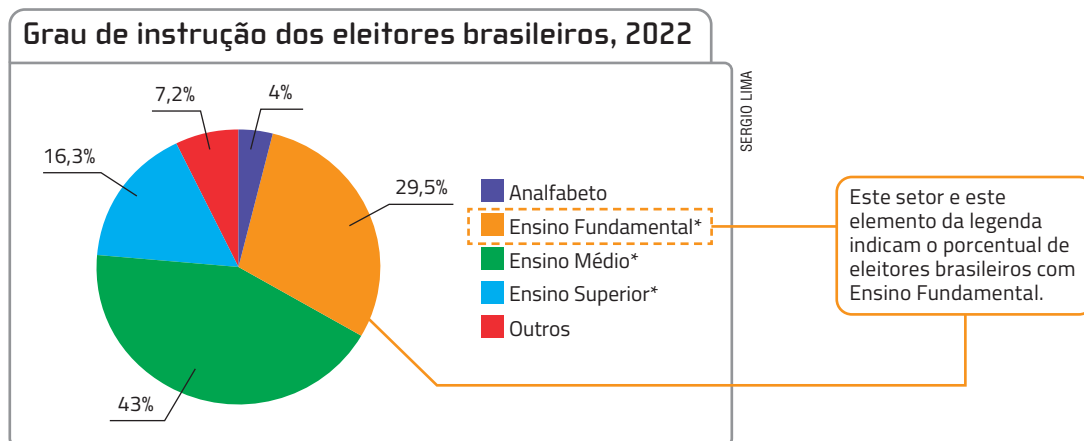
PARA PENSAR

Os gráficos de segmentos apresentam dados sobre a inserção de indígenas em cursos de graduação no Brasil. Isso contribui para a formação de profissionais qualificados, que podem atuar em diferentes áreas, além de colaborar com a autonomia e a sustentabilidade dos diversos povos indígenas brasileiros. Descreva a relação entre os dados apresentados nesses dois gráficos de segmentos.

O primeiro gráfico apresenta o total de matrículas de indígenas em cursos de graduação no Brasil, no período indicado, independentemente do tipo de instituição, enquanto o segundo gráfico apresenta a distribuição dessas matrículas por tipo de instituição: pública ou privada. Dessa maneira, os dados do primeiro gráfico correspondem à soma dos dados correspondentes do segundo gráfico.

● Gráfico de setores

Em um **gráfico de setores**, os dados de uma pesquisa podem ser representados de maneira a destacar a relação entre as partes e o todo. Analise um exemplo de gráfico de setores.

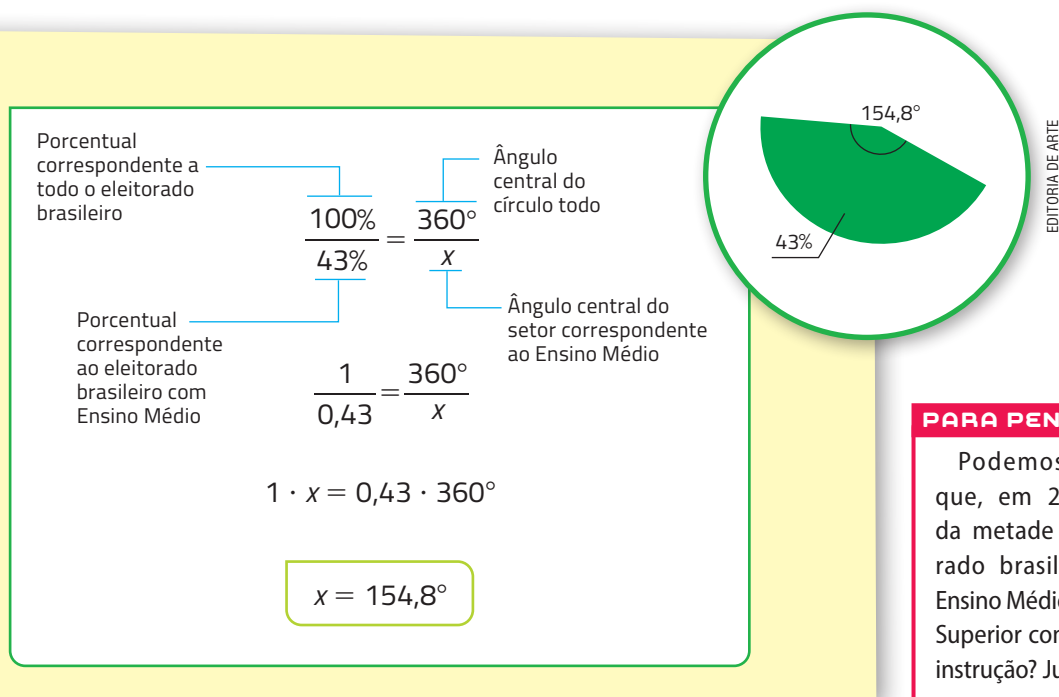


* Considerados os eleitores com o grau de instrução completo ou incompleto no respectivo nível de ensino.

Fonte dos dados: BRASIL. Superior Tribunal Eleitoral. **Eleitorado da eleição**: perfil do eleitorado. Brasília, DF: TSE, 2024. Localizável em: Grau de instrução.

Disponível em: <https://sig.tse.jus.br/ords/dwapr/r/seai/sig-eleicao-eleitorado/painel-perfil-eleitorado?clear=17&session=105710615330293>. Acesso em: 23 jul. 2024.

No gráfico de setores, cada setor circular é proporcional à parte do todo que a região representa. O mais comum é que a indicação dos valores apareça em porcentagem, mas também pode ocorrer em números absolutos. Em relação ao exemplo, o total de eleitores brasileiros (100%) é representado pelo círculo todo, que corresponde a um ângulo central de 360°. Dessa maneira, para o setor que representa os eleitores com Ensino Médio, por exemplo, podemos escrever a proporção a seguir.



Sim, pois, em 2022, aproximadamente 59% do eleitorado (43% + 16%) tinha grau de instrução Ensino Médio ou Ensino Superior.

● Diagrama de caixas ou *box-plot*

O *box-plot* ou **diagrama de caixas** costuma ser utilizado para realizar uma análise visual preliminar da distribuição de um conjunto de dados.

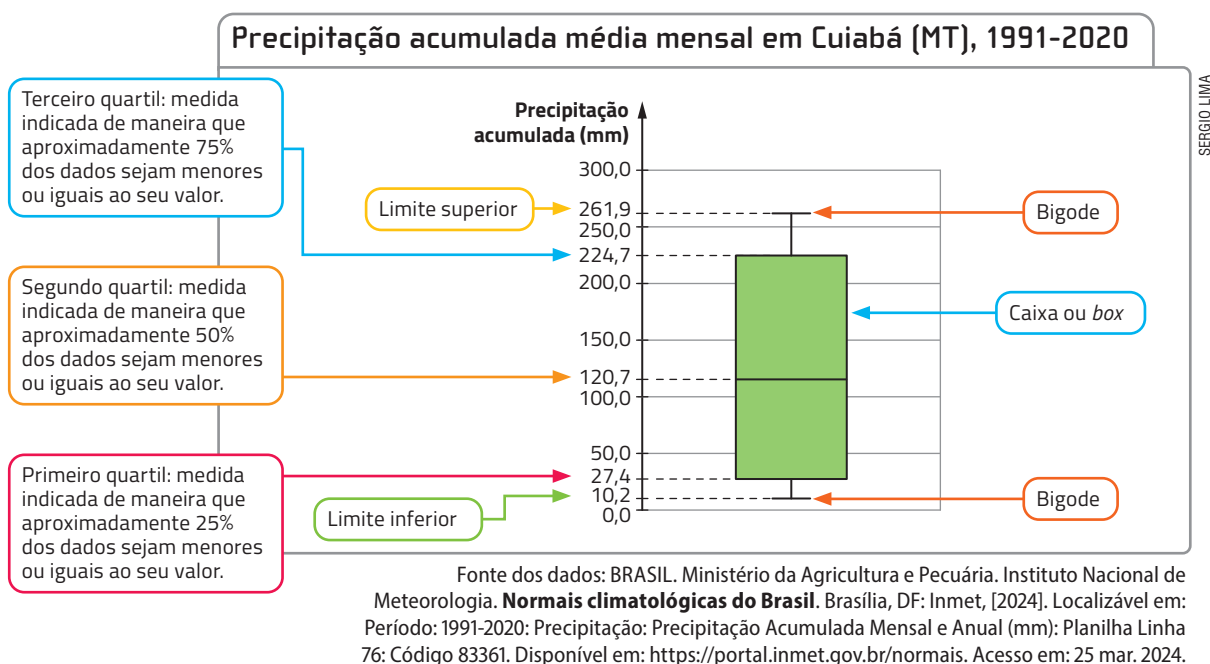
Considere, por exemplo, as informações a seguir.

Precipitação acumulada média mensal em Cuiabá (MT), 1991-2020

Mês	jan.	fev.	mar.	abr.	maio	jun.	jul.	ago.	set.	out.	nov.	dez.
Precipitação (mm)	238,3	261,9	232,9	112,8	53,4	19,7	10,2	13,2	50,5	128,6	194,6	200

Fonte dos dados: BRASIL. Ministério da Agricultura e Pecuária. Instituto Nacional de Meteorologia. **Normais climatológicas do Brasil**. Brasília, DF: Inmet, [2024]. Localizável em: Período: 1991-2020: Precipitação: Precipitação Acumulada Mensal e Anual (mm): Planilha Linha 76: Código 83361. Disponível em: <https://portal.inmet.gov.br/normais>. Acesso em: 25 mar. 2024.

Agora, observe esses dados representados em um *box-plot* construído em um programa de computador e alguns de seus elementos indicados.



DICA

No *box-plot*, o limite inferior, o limite superior e os quartis podem ou não fazer parte do conjunto de dados. Os valores maiores ou iguais ao limite inferior e menores ou iguais ao limite superior são denominados **valores adjacentes**. Os demais valores, quando existirem, são denominados **valores exteriores** e costumam ser indicados por asterisco (*).

Em relação à precipitação acumulada média mensal em Cuiabá, ao observar esse *box-plot*, é possível perceber, por exemplo, que, em aproximadamente:

- 25% dos meses, essa precipitação foi menor que 27,4 mm;
- 50% dos meses, essa precipitação foi menor que 120,7 mm;
- 75% dos meses, essa precipitação foi menor que 224,7 mm.

PARA PENSAR

Ao escolher aleatoriamente um mês qualquer do ano, qual é a probabilidade de que, nesse mês, a precipitação acumulada média em Cuiabá esteja entre 27,4 mm e 224,7 mm?

aproximadamente $\frac{1}{2}$ ou 50%

2. b) Falsa. Resposta esperada: De 2016 para 2022, houve redução no percentual de pessoas de 14 e 15 anos que realizavam atividades econômicas em ocupações da Lista TIP.

ATIVIDADES

Não escreva no livro.

2. c) Falsa. Resposta esperada: Em 2022, dentre os setores ocupados pelas pessoas de 5 a 17 anos em situação de trabalho infantil, o de serviços domésticos era o de menor percentual.

- Em relação às tabelas simples e de dupla entrada apresentadas na página 250, resolva as questões.
 - Em qual ano ocorreu a maior cobertura da vacina tríplice viral no Brasil? 2023
 - Qual era o percentual da cobertura da vacina contra poliomielite, em 2022, na região brasileira onde você mora? A resposta depende da região do Brasil em que o estudante mora.
- Com base nos gráficos de colunas e de barras da página 251, classifique cada afirmativa a seguir em verdadeira ou falsa. Depois, reescreva cada afirmativa que você classificou como falsa, corrigindo-a.
 - Em 2022, mais de 20% das pessoas de 5 a 17 anos em situação de trabalho infantil realizaram suas atividades no setor da agricultura. verdadeira
 - De 2016 para 2022, houve aumento no percentual de pessoas de 14 e 15 anos que realizavam atividades econômicas em ocupações da Lista TIP.
 - Em 2022, dentre os setores ocupados pelas pessoas de 5 a 17 anos em situação de trabalho infantil, o de serviços domésticos era o de maior percentual.
 - Em 2022, mais de dois terços das pessoas de 5 a 13 anos que realizavam atividades econômicas tinham ocupação que constava na Lista TIP. verdadeira
- Em relação aos gráficos de segmentos apresentados na página 252, resolva as questões.
 - Qual é o período correspondente aos dados apresentados nesses gráficos? de 2017 a 2022
 - Qual é a fonte dos dados apresentados nesses gráficos? site do Inep
 - Em 2017, que percentual das matrículas de indígenas em cursos de graduação correspondia a matrículas em instituição privada? E em 2022? aproximadamente 75,5%; aproximadamente 64%
 - Em 2022, havia 9 444 116 estudantes matriculados em cursos de graduação no Brasil. Que percentual desses estudantes era indígena? Com base nas informações apresentadas anteriormente, elabore um texto sobre a participação dos indígenas em cursos de graduação no Brasil. Se necessário, faça também uma pesquisa. aproximadamente 0,47%; Resposta pessoal.
- De acordo com o gráfico de setores apresentado na página 253, responda às questões.
 - Você já votou em alguma eleição? Comente com o professor e os colegas. Resposta pessoal.
 - Qual era o grau de instrução da maior parte do eleitorado brasileiro em 2022? Qual setor representa essa informação? Ensino Médio; setor verde
 - Em 2022, o Brasil possuía cerca de 156 milhões de eleitores. Quantos desses eleitores tinham o Ensino Médio como grau de instrução? aproximadamente 67,1 milhões de eleitores
- De acordo com o Anuário Brasileiro da Educação Básica 2021, em 2020 havia três milhões de matrículas na Educação de Jovens e Adultos (EJA) no Brasil. Porém os números mostram que o país está distante de cumprir as metas estipuladas no Plano Nacional de Educação (PNE), e há, ainda, muitas pessoas que não concluíram o Ensino Médio e não frequentam a escola. Observe a tabela, extraída desse relatório, e resolva as questões.

Pessoas com 15 anos ou mais que não frequentam a escola, por nível de instrução mais elevado alcançado – Brasil – 2020

	Absoluto	%
Sem instrução e menos de um ano de estudo	7.981.385	5,4
Ensino Fundamental incompleto ou equivalente	44.108.417	29,6
Ensino Fundamental completo ou equivalente	12.065.122	8,1
Ensino Médio incompleto ou equivalente	7.209.523	4,8
Ensino Médio completo	77.555.886	52,1
Total	148.920.333	100

Fonte: IBGE/Pnad Contínuo. Elaboração: Todos Pela Educação.

Fonte: TODOS PELA EDUCAÇÃO. Anuário Brasileiro da Educação Básica: 2021. São Paulo: Todos pela Educação: Moderna, 2021. p. 87. Disponível em: https://todospelaeducacao.org.br/wordpress/wp-content/uploads/2021/07/Anuario_21final.pdf. Acesso em: 23 jul. 2024.

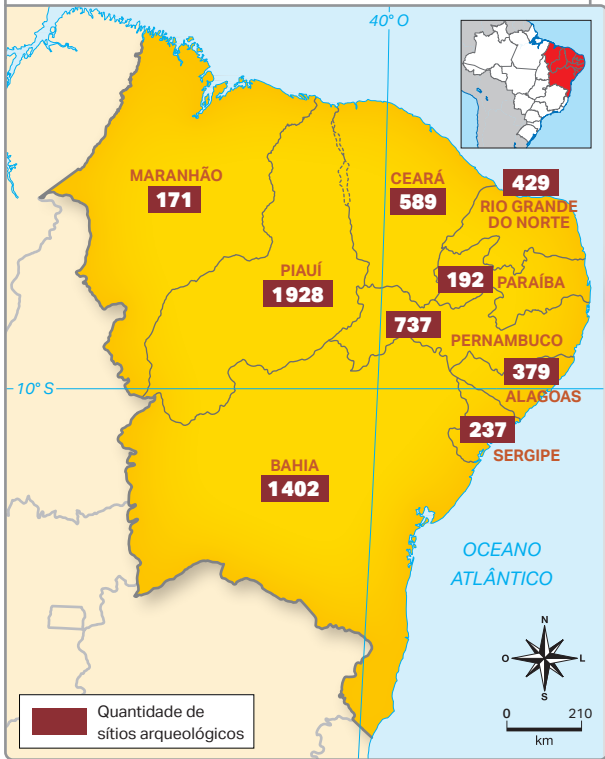
5. d) Algumas respostas possíveis: Necessidade de trabalhar ou ajudar nos afazeres domésticos, desinteresse pelos estudos, ausência de escola na localidade em que mora, ausência de oferta de turno escolar desejado etc. Algumas respostas possíveis: Implantação de políticas públicas específicas, disponibilização de ambientes escolares acolhedores e inclusivos, construção de novas escolas, ampliação de ofertas de turnos escolares demandados etc.

- a) Em 2020, no Brasil, qual era o total de pessoas com 15 anos ou mais que não frequentava a escola? **148 920 333 pessoas**
- b) Das pessoas com 15 anos ou mais que não frequentavam a escola no Brasil em 2020, quantas tinham o Ensino Fundamental incompleto ou equivalente? **44 108 417 pessoas**
- c) Em 2020, no Brasil, qual era o percentual das pessoas com 15 anos ou mais que não concluíram o Ensino Médio e não frequentavam a escola? **47,9%**
- d) Que motivos você acredita que podem levar as pessoas a deixar de frequentar a escola sem completar o Ensino Médio? Em seu entendimento, o que pode ser feito para evitar ou sanar essa situação?



6. Analise o mapa.

Sítios arqueológicos cadastrados na Região Nordeste, até 24 de março de 2024



Fonte dos dados: BRASIL. Instituto do Patrimônio Histórico e Artístico Nacional. **Cadastro nacional de sítios arqueológicos CNSA/SGPA**. Brasília, DF: Iphan, c2014. Disponível em: <http://portal.iphan.gov.br/pagina/detalhes/1699>. Acesso em: 23 jul. 2024.

Resposta nas **Orientações para o professor**.

- a) Organize as informações apresentadas no mapa em uma tabela.
- b) Qual estado da Região Nordeste tem a maior quantidade de sítios arqueológicos cadastrados? Quantos sítios arqueológicos? **Piauí; 1 928 sítios arqueológicos**

c) Ao todo, havia quantos sítios arqueológicos cadastrados na Região Nordeste?



d) Com um colega, pesquisem se na região em que vocês moram há sítios arqueológicos cadastrados. Registrem informações sobre um desses sítios arqueológicos, por exemplo, os tipos de vestígio que podem ser encontrados nele, como ocorre sua proteção, se já houve casos de invasão ou depredação, se existe algum programa educativo, se ele é aberto a visitas ou investigações científicas, entre outras. Ao final, compartilhem com a turma as informações pesquisadas. **Resposta pessoal.**

7. Considere um gráfico de setores que representa os dados da atividade anterior, em que cada setor indica o percentual de sítios arqueológicos por estado, em relação à Região Nordeste. O menor setor desse gráfico tem o ângulo central com medida aproximada de: **alternativa b**

- a) 3° c) 14° e) 161°
b) 10° d) 106°

8. O uso de redes sociais e outros recursos de comunicação virtual está cada vez mais presente entre os brasileiros. Apesar de possibilitar entretenimento e troca de informação de maneira ágil, o uso desses recursos exige cuidados específicos, em especial quando os usuários são crianças ou adolescentes. Sobre esse tema, observe a tabela e resolva as questões.

Crianças e adolescentes, de 9 a 17 anos, por atividades realizadas na internet envolvendo comunicação e redes sociais no Brasil, 2023

Tipo de uso	Usou rede social	Enviou mensagem instantânea	Conversou por chamada de vídeo
Faixa etária			
Entre 9 e 10 anos	50%	45%	19%
Entre 11 e 12 anos	67%	65%	24%
Entre 13 e 14 anos	85%	83%	22%
De 15 a 17 anos	95%	93%	29%

Fonte dos dados: CENTRO REGIONAL DE ESTUDOS PARA O DESENVOLVIMENTO DA SOCIEDADE DA INFORMAÇÃO. **TIC Kids Online Brasil 2023**: crianças e adolescentes. São Paulo: Cetic.br, 2023. Disponível em: <https://cetic.br/pt/tics/kidsonline/2023/criancas/B1B/expandido>. Acesso em: 23 jul. 2024.

6. c) 6 064 sítios arqueológicos

8. a) Representa que 65% das crianças e adolescentes entre 11 e 12 anos utilizaram a internet para enviar mensagem instantânea em 2023 no Brasil.

a) Localize na tabela onde o dado **65%** está indicado. O que esse dado representa?

b) Em 2023, no Brasil, qual faixa etária apresentou menor percentual de crianças e adolescentes que conversaram por chamada de vídeo? **entre 9 e 10 anos**

c) O que crianças e adolescentes de 15 a 17 anos, em 2023, no Brasil, faziam mais ao utilizar a internet: enviar mensagem instantânea ou conversar por chamada de vídeo? **enviar mensagem instantânea**

d) Para representar os dados sobre o uso de redes sociais por faixa etária no Brasil, em 2023, que tipo de gráfico você utilizaria? Por quê? **Resposta esperada: Gráfico de colunas ou de barras, para possibilitar a comparação visual entre os dados pesquisados de cada faixa etária.**

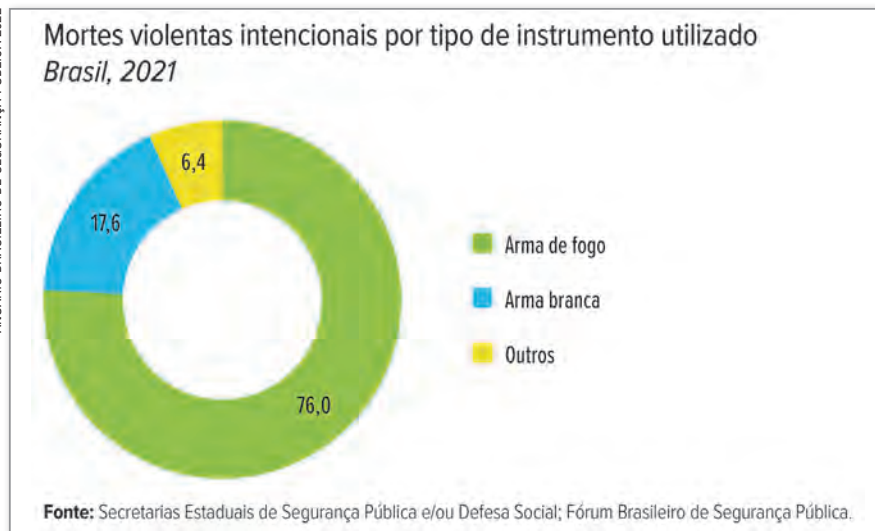
e) Considere que parte das informações da tabela sejam representadas em um gráfico de colunas duplas. Nesse gráfico, colunas verdes indicariam o percentual de crianças e adolescentes que usaram redes sociais, e colunas amarelas, o percentual daqueles que enviaram mensagem instantânea, por faixa etária. Qual seria a coluna verde mais alta? E a coluna amarela mais baixa? Explique o que essas colunas representariam.



f) Realize uma pesquisa com os colegas para determinar o percentual deles que já usou rede social, enviou mensagem instantânea e conversou por chamada de vídeo. Em seguida, reúna-se em um grupo de três integrantes para compartilhar suas experiências, boas e ruins, no uso desses recursos. Por fim, elaborem um relatório sobre o que discutiram e indiquem sugestões para um bom uso desses recursos. **Resposta pessoal.**

9. De acordo com o **Anuário Brasileiro de Segurança Pública** de 2022, em 2021 o Brasil registrou 22,3 mortes violentas intencionais para cada grupo de 100 mil habitantes. Observe o gráfico a seguir, extraído desse relatório, em que os dados são apresentados em porcentagem.

ANUÁRIO BRASILEIRO DE SEGURANÇA PÚBLICA 2022



Fonte: ANUÁRIO BRASILEIRO DE SEGURANÇA PÚBLICA. São Paulo: Fórum Brasileiro de Segurança Pública, ano 16, 2022. p. 41. Disponível em: <https://forumseguranca.org.br/wp-content/uploads/2022/06/anuario-2022.pdf>. Acesso em: 23 jul. 2024.

a) Qual é o percentual de mortes violentas intencionais no Brasil em 2021 causadas por arma branca? **17,6%**

b) Qual é a medida aproximada do ângulo central correspondente ao menor setor desse gráfico? **aproximadamente 23°**

c) Imagine que você vai produzir um texto sobre o tema segurança pública no Brasil e vai ilustrá-lo com o gráfico apresentado. Qual das alternativas a seguir melhor se adequa a um título para esse texto? **alternativa II**

I) Cerca de uma em cada quatro mortes ocorreram por arma de fogo.

II) Cerca de três em cada quatro mortes ocorreram por arma de fogo.

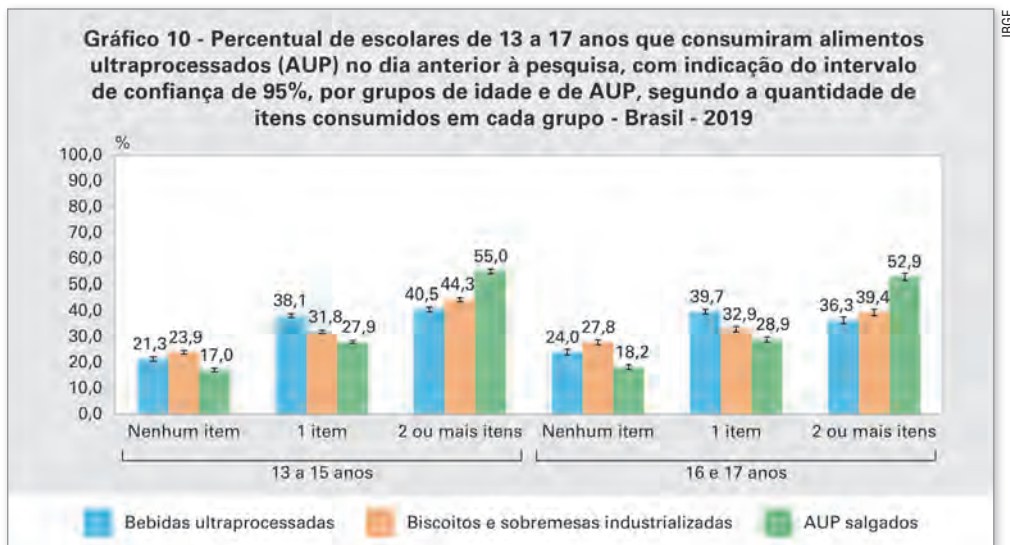
III) Cerca de metade das mortes ocorreram por arma de fogo.



d) Em seu entendimento, o que pode ser feito para reduzir a quantidade de mortes violentas intencionais no Brasil? Converse com o professor e os colegas. **Resposta pessoal.**

10. a) Representa que 44,3% dos estudantes de 13 a 15 anos que participaram da pesquisa responderam ter consumido dois ou mais itens de biscoitos e sobremesas industrializadas no dia anterior à pesquisa.

10. De acordo com a Organização Mundial da Saúde (OMS), a obesidade é uma epidemia mundial causada principalmente pela falta de atividade física e por maus hábitos alimentares, como o excesso de ingestão de alimentos ultraprocessados. Observe, a seguir, um recorte do relatório da Pesquisa Nacional de Saúde do Escolar 2019, em que consta um gráfico sobre esse assunto.



Fonte: INSTITUTO BRASILEIRO DE GEOGRAFIA E ESTATÍSTICA. **Pesquisa nacional de saúde do escolar**: 2019. Rio de Janeiro: IBGE, 2021. p. 48. Disponível em: <https://biblioteca.ibge.gov.br/visualizacao/livros/liv101852.pdf>. Acesso em: 23 jul. 2024.

- a) Localize no gráfico o número **44,3**. O que esse dado representa no gráfico?
- b) Que percentual dos estudantes de 16 e 17 anos consumiram, no dia anterior à pesquisa:
- nenhuma bebida ultraprocessada? **24%**
 - um item de AUP salgados? **28,9%**
 - dois ou mais itens de biscoitos e sobremesas industrializadas? **39,4%**
- c) Se você, hoje, tivesse de responder a uma pesquisa como essa, quais seriam suas respostas em relação ao consumo de AUP? **Resposta pessoal.**

11. O Exame Nacional do Ensino Médio (Enem) registra, anualmente, milhões de inscrições. Além dos jovens que buscam uma oportunidade de ingressar em instituições de Ensino Superior, é possível perceber a presença de idosos. Sobre esse tema, observe a tabela e resolva as questões.

11. a) Resposta esperada: Não, pois, em 2020 e em 2023, a quantidade de idosos inscritos no Enem aumentou em relação ao ano anterior.

- a) Podemos afirmar que, no período apresentado, as inscrições de idosos no Enem vêm diminuindo anualmente? Justifique sua resposta.
- b) Considere um gráfico de barras representando os dados da tabela, de maneira que cada barra corresponda à quantidade de idosos inscritos no Enem por ano. Se a barra de maior comprimento medir 9 cm, então quantos centímetros deve ter a barra de menor comprimento? **4,5 cm**
- c) Para realizar o Enem, é oferecido ao idoso a opção de atendimento diferenciado, que conta com o amparo legal do Estatuto da Pessoa Idosa. Realize uma pesquisa sobre os suportes ou recursos que são disponibilizados a ele nesse atendimento diferenciado. Verifique, também, se no município em que você mora existem serviços ou programas voltados a pessoas idosas e cite alguns deles. Em seguida, escreva um breve texto apresentando as informações obtidas e a importância de garantir aos idosos direitos à saúde, à educação, ao lazer, entre outros. **Respostas pessoais.**

Idosos* inscritos no Enem, 2019-2023

Ano	Quantidade
2019	8 259
2020	11 768
2021	6 004
2022	5 900
2023	8 531

*Nos dados apresentados, foram consideradas pessoas com mais de 60 anos.

Fonte dos dados: BRASIL. Ministério da Educação. Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira. **Sinopses estatísticas do exame nacional do ensino médio**. Brasília, DF: Inep, 2024. Disponível em: <https://www.gov.br/inep/pt-br/aceso-a-informacao/dados-abertos/sinopses-estatisticas/enem>. Acesso em: 23 jul. 2024.

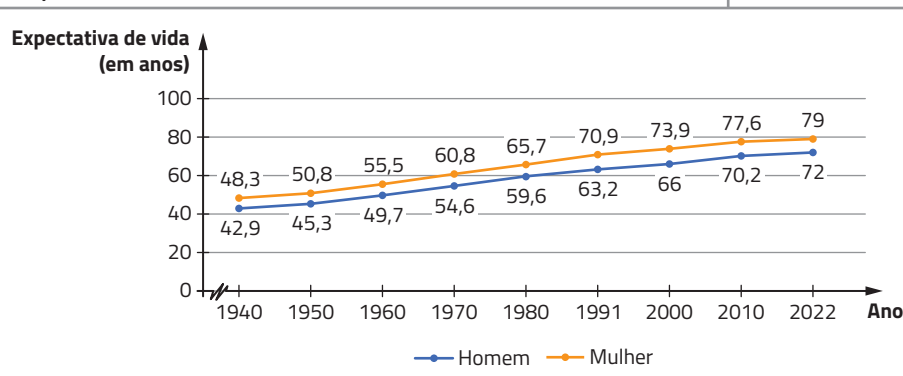
12. Com base no texto e no gráfico a seguir, responda às questões.

Após despencar durante a pandemia de Covid-19, a expectativa de vida do brasileiro ao nascer voltou a subir e chegou a **75,5 anos** em 2022, segundo o Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística (IBGE). [...]

Antes da crise sanitária, em 2019, a expectativa de vida era de **76,2 anos**. Em 2020, início da pandemia, caiu para **74,8 anos** e, no ano seguinte, sofreu mais uma queda, ficando em **72,8 anos**. Com o fim da pandemia, subiu para o patamar atual.

SANTOS, Emily. Expectativa de vida do brasileiro sobe para 75,5 anos após queda na pandemia, mas é menor do que projeção inicial do IBGE. **G1**, [s. l.], 29 nov. 2023. Disponível em: <https://g1.globo.com/saude/noticia/2023/11/29/expectativa-de-vida-do-brasileiro-diminui-em-novo-calculo-do-ibge-que-considera-pandemia-e-censo-2022.ghtml>. Acesso em: 23 jul. 2024.

Expectativa de vida ao nascer no Brasil, 1940-2022



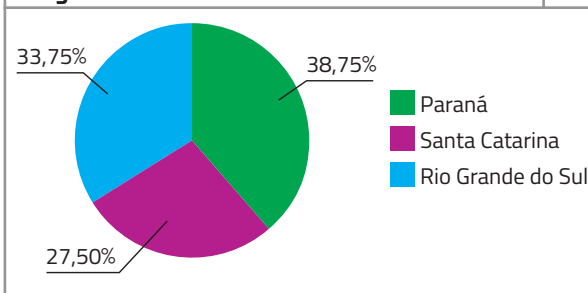
Fonte dos dados: EM 2022, expectativa de vida era de 75,5 anos. **Agência IBGE Notícias**, Rio de Janeiro, 29 nov. 2023. Disponível em: <https://agenciadenoticias.ibge.gov.br/agencia-sala-de-imprensa/2013-agencia-de-noticias/releases/38455-em-2022-expectativa-de-vida-era-de-75-5-anos>. Acesso em: 23 jul. 2024.

12. a) 3,4 anos. A redução ocorreu por causa da pandemia de covid-19.

- a) De acordo com o texto, de quantos anos foi a redução na expectativa de vida ao nascer do brasileiro em 2021 em relação a 2019? Por qual razão ocorreu essa redução?
- b) Por volta de qual ano a expectativa de vida ao nascer das mulheres ultrapassou os 70 anos? E a dos homens, quando ultrapassou os 70 anos? **1991; 2010**
- c) No gráfico, a linha de segmentos laranja se mantém acima da linha de segmentos azul em todo o período representado. O que isso significa nesse contexto? Pesquise e cite algumas possíveis razões, com base na Ciência, para que isso ocorra. **Resposta nas Orientações para o professor.**
13. A roda de capoeira, reconhecida pelo Instituto do Patrimônio Histórico e Artístico Nacional (Iphan) como Patrimônio Cultural Imaterial da Humanidade, é uma manifestação cultural afro-brasileira presente em todo o território brasileiro e em diversos outros países. Sobre esse tema, analise o gráfico.

- a) Nesse gráfico, qual setor tem maior área: o azul ou o roxo? O que isso indica no contexto apresentado?
- b) No dia 26/3/2024, estavam cadastrados no Iphan 80 grupos e entidades de capoeira da Região Sul do Brasil. Quantos eram os grupos e entidades cadastrados de cada estado dessa região?
- c) Determine a medida do ângulo central correspondente a cada setor desse gráfico.
- d) Realize uma pesquisa sobre a capoeira, apresentando informações como: quando e em que contexto foi desenvolvida, quais são os benefícios da prática de capoeira à saúde e onde é praticada na região em que moram. Depois, compartilhe essas informações com os colegas. **Resposta pessoal.**

Grupos e entidades de capoeira cadastrados no Iphan até 26/3/2024, por unidades da Federação da Região Sul do Brasil



Fonte dos dados: BRASIL. Instituto do Patrimônio Histórico e Artístico Nacional. **Grupos e entidades**. Brasília, DF: Iphan, [2024]. Disponível em: <https://capoeira.iphan.gov.br/grupo>. Acesso em: 23 jul. 2024.

13. a) O setor azul tem área maior que o setor roxo, indicando que, em 26/3/2024, estavam cadastrados no Iphan mais grupos e entidades de capoeira do Rio Grande do Sul que de Santa Catarina.

13. b) Paraná: 31 grupos e entidades; Rio Grande do Sul: 27 grupos e entidades; Santa Catarina: 22 grupos e entidades

13. c) setor verde: 139,5°; setor azul: 121,5°; setor roxo: 99°

14. c) Resposta nas **Orientações para o professor**. Resposta pessoal.

14. d) Resposta esperada: Gráfico de setores, pois esse tipo de gráfico tem como uma de suas características a possibilidade de destacar a relação entre as partes e o todo dos dados representados.

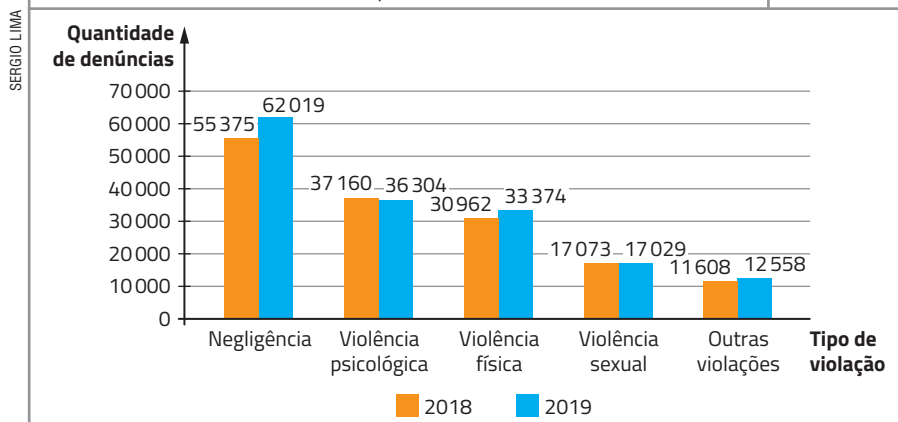
14. Leia, a seguir, um trecho citado no artigo 227 da Constituição Brasileira de 1988.

É dever da família, da sociedade e do Estado assegurar à criança, ao adolescente e ao jovem, com absoluta prioridade, o direito à vida, à saúde, à alimentação, à educação, ao lazer, à profissionalização, à cultura, à dignidade, ao respeito, à liberdade e à convivência familiar e comunitária, além de colocá-los a salvo de toda forma de negligência, discriminação, exploração, violência, crueldade e opressão.

BRASIL. [Constituição (1988)]. **Constituição da República Federativa do Brasil de 1988**. Brasília, DF: Presidência da República, [2024]. Disponível em: www.planalto.gov.br/ccivil_03/constituicao/constituicao.htm. Acesso em: 23 jul. 2024.

Apesar desse respaldo legal, há violações que levam muitas crianças e adolescentes a viver em situação de vulnerabilidade e risco social. Agora, analise o gráfico a seguir.

Denúncias por tipo de violação sofrida por crianças e adolescentes no Brasil, 2018-2019

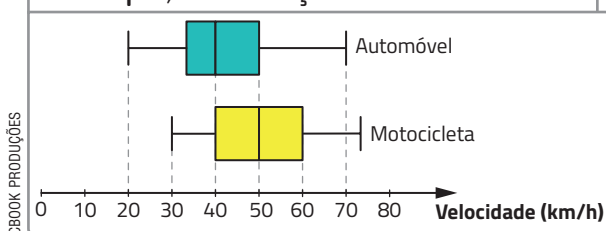


Fonte dos dados: BRASIL. Ministério da Mulher, da Família e dos Direitos Humanos. **Disque direitos humanos**: relatório 2019. Brasília, DF: MMFDH, 2019. p. 51. Disponível em: https://www.gov.br/mdh/pt-br/centrais-de-conteudo/disque-100/relatorio-2019_disque-100.pdf. Acesso em: 23 jul. 2024.

- a) Para cada tipo de violação indicada no gráfico, o que representa a coluna laranja? **quantidade de denúncias em 2018**
- b) Qual foi o percentual de crescimento na quantidade de denúncias por violência física, de 2018 para 2019? **aproximadamente 7,8%**
- c) Construa uma tabela de dupla entrada para representar as informações do gráfico. Depois, indique qual desses recursos você considera o mais apropriado para apresentar as informações: o gráfico de colunas duplas ou a tabela de dupla entrada. Use argumentos para justificar a sua escolha.
- d) Qual tipo de gráfico você utilizaria para representar a proporção de denúncias realizadas, em cada ano, de maneira que seja possível visualmente comparar cada tipo de violação em relação ao total de denúncias? Justifique.
- e) Outra violação grave contra crianças e adolescentes é o trabalho infantil. No Brasil, é considerado trabalho infantil toda atividade econômica e de sobrevivência realizada por menores de 16 anos, salvo a condição de aprendiz, na qual o adolescente estuda normalmente e trabalha, recebendo uma bolsa-aprendizagem, e tem direitos trabalhistas. Pesquise o trabalho infantil no Brasil, buscando informações como a quantidade de denúncias recebidas, as principais atividades exercidas ilegalmente por crianças e adolescentes, as possíveis consequências, entre outras. Utilizando os dados obtidos, construa um gráfico e elabore um texto explicitando os principais resultados. **Resposta pessoal.**

15. A companhia de trânsito de certo município realizou uma pesquisa sobre a velocidade de automóveis e motocicletas que trafegaram em determinado cruzamento de duas vias, onde a velocidade máxima permitida é 50 km/h. Analise os gráficos construídos em uma planilha eletrônica, a partir dos dados obtidos nessa pesquisa, e resolva as questões.

Velocidade de automóveis e motocicletas no cruzamento de duas vias de certo município, 5 de março de 2025




Fonte: Dados fictícios

- a) A maior velocidade aferida nessa pesquisa foi de um automóvel ou de uma motocicleta? E a menor velocidade? **motocicleta; automóvel**
- b) Quais foram as velocidades máxima e mínima dos automóveis aferidas nessa pesquisa? E em relação às motocicletas? **automóveis: velocidade mínima de 20 km/h e máxima de 70 km/h; motocicletas: velocidade mínima de 30 km/h e máxima entre 70 km/h e 80 km/h**
- c) Que percentual aproximado das motocicletas pesquisadas trafegou acima do limite de velocidade permitido? **50%**
- d) Que percentual aproximado dos automóveis pesquisados trafegou entre 40 km/h e 50 km/h? **25%**
- e) Sabendo que, ao todo, foi aferida a velocidade de 340 motocicletas, quantas delas aproximadamente trafegaram a uma velocidade superior a 20% acima do limite permitido? **85 motocicletas**
- f) Com base em seu conhecimento sobre *box-plot*, classifique a afirmativa a seguir em verdadeira ou falsa e justifique. **Resposta nas Orientações para o professor.**

A maior parte dos automóveis trafegou de acordo com o limite de velocidade permitido.

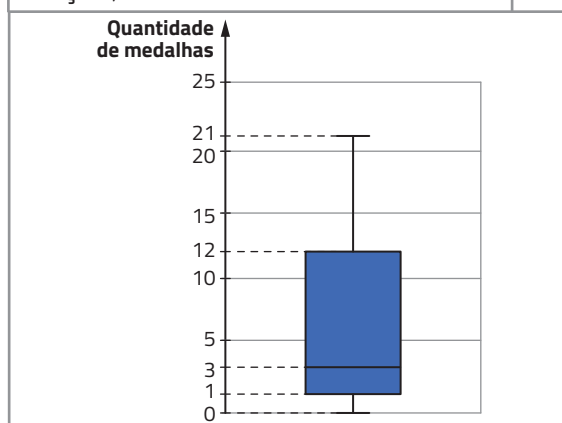
16. Até 2023, o Brasil havia participado de 23 edições dos Jogos Olímpicos de Verão realizados e conquistado 150 medalhas, entre ouro, prata e bronze. Analise uma distribuição desse total de medalhas conquistadas.

 Elabore um pequeno texto com informações que possam ser obtidas ao analisar esse *box-plot*. Depois, troque esse texto com um colega para que ele o avalie e valide suas afirmações, enquanto você faz o mesmo com o texto que receber. Ao final, confirmem juntos as avaliações realizadas.

Resposta pessoal.

Fonte dos dados: COMITÊ OLÍMPICO DO BRASIL. **Jogos Olímpicos de Verão**. Rio de Janeiro: COB, c2024. Disponível em: <https://www.cob.org.br/time-brasil/participacoes>. Acesso em: 23 jul. 2024.

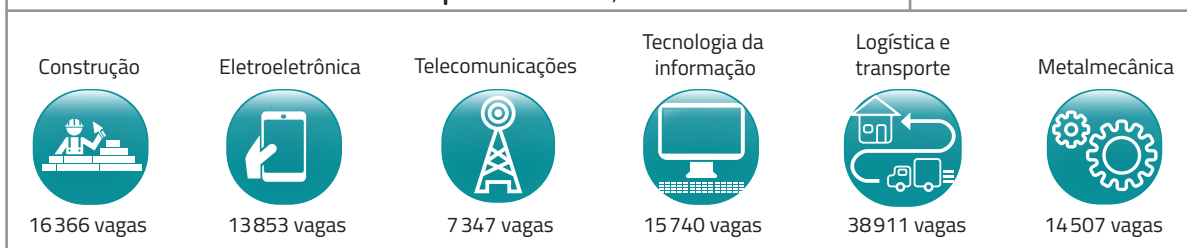
Medalhas conquistadas pelo Brasil nos Jogos Olímpicos de Verão, por edição, até 2023



SERGIO LIMA

17. Um estudo publicado pela Agência de Notícias da Indústria constatou as áreas com maior escassez de mão de obra de profissionais técnicos com qualificação. Analise o esquema.

Estimativa de novas vagas de emprego nas áreas de formação industrial com maior demanda por técnicos, 2023



BENTINHO


Fonte dos dados: CHMURZYNSKI, Giovanna. Brasil precisa formar mais de 77 mil técnicos industriais em 2023. **Agência de Notícias da Indústria**, Brasília, DF, 25 jan. 2023. Disponível em: <https://noticias.portaldaindustria.com.br/noticias/educacao/brasil-precisa-formar-mais-de-77-mil-tecnicos-industriais-em-2023/>. Acesso em: 23 jul. 2024.

- a) Qual informação é apresentada nesse esquema? **Resposta esperada: A estimativa das quantidades de novas vagas de emprego nas áreas de formação industrial com maior demanda por técnicos, em 2023.**
- b) Escolha uma das áreas apresentadas e liste profissões que se enquadrem nessa área. Se necessário, faça uma pesquisa. **Resposta nas Orientações para o professor.**

17. d) Algumas respostas possíveis: Gráficos de colunas ou de barras, pois esses tipos de gráfico facilitam visualmente a comparação entre a quantidade de vagas de cada área.

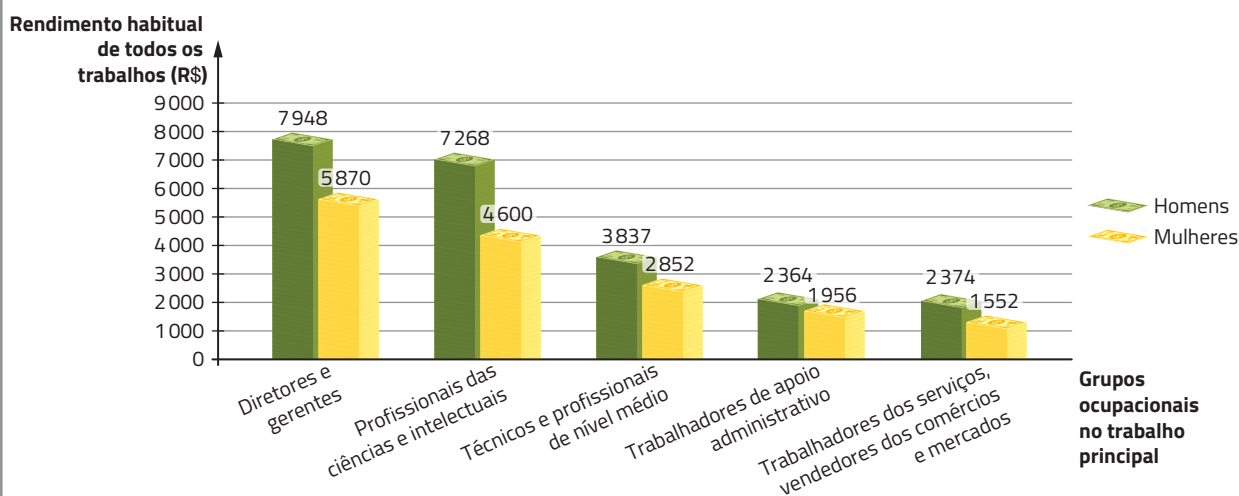
c) Das áreas apresentadas, qual tem maior demanda por formação técnica? Quantas vagas são estimadas para essa área? **logística e transporte; 38 911 vagas**

d) Indique um tipo de gráfico – barras, colunas, segmentos ou setores – que pode ser utilizado para representar os dados desse esquema. Explique o porquê de sua escolha.

 e) Utilizando uma malha quadriculada ou uma planilha eletrônica, construa o gráfico que você indicou no item anterior e elabore três questões para que um colega interprete os dados do seu gráfico, enquanto você faz o mesmo com as questões que receber. Por fim, confirmem juntos as resoluções. **Resposta nas Orientações para o professor.**

18. Um pictograma é um tipo de gráfico estilizado com figuras relacionadas ao tema dos dados apresentados. O pictograma a seguir foi elaborado com base em informações divulgadas pelo IBGE no relatório **Estatísticas de gênero: indicadores sociais das mulheres no Brasil**. Analise esse pictograma e responda aos itens propostos.

Rendimento habitual médio mensal de todos os trabalhos, por sexo, segundo determinados grupos ocupacionais no trabalho principal, 2022




Fonte dos dados: INSTITUTO BRASILEIRO DE GEOGRAFIA E ESTATÍSTICA. **Estatísticas de gênero: indicadores sociais das mulheres no Brasil**. 3. ed. Rio de Janeiro: IBGE, c2024. (Estudos & Pesquisas: Informação Demográfica e Socioeconômica, n. 38, p. 4). Disponível em: https://biblioteca.ibge.gov.br/visualizacao/livros/liv102066_informativo.pdf. Acesso em: 23 jul. 2024.

a) Para qual dos grupos ocupacionais apresentados a razão entre os rendimentos de mulheres e de homens é maior? Qual é essa razão? O que essa razão representa? **18. b) Resposta esperada: Gráfico de colunas, sendo cada pilha de dinheiro**

b) Esse pictograma pode ser associado a que tipo de gráfico? Explique sua resposta. **correspondente a uma coluna.**

c) Qual é a relação entre as figuras utilizadas nesse pictograma e o tema dele?

d) Escolha um dos gráficos apresentados nesta Unidade e descreva como ele poderia ser representado por um pictograma. **Resposta pessoal.**

 e) De acordo com as orientações do professor, participe de um debate com os colegas sobre as diferenças salariais entre homens e mulheres, evidenciadas no pictograma. Nesse debate, levante hipóteses sobre o porquê dessas diferenças, considerando aspectos como problemas sociais e discriminação de gênero, e proponha ações que podem ser implementadas para atenuar essa situação. **Resposta pessoal.**

18. a) Resposta esperada: Trabalhadores de apoio administrativo. Razão: aproximadamente 0,827. Essa razão indica que, entre os grupos operacionais mostrados no gráfico, o grupo "Trabalhadores de apoio administrativo" é o que apresenta a menor disparidade entre os rendimentos médios de homens e mulheres; nesse grupo, o rendimento médio das mulheres corresponde a aproximadamente 82,7% (0,827) do rendimento médio dos homens.

● Diagrama de ramos e folhas

Para garantir a saúde de um bebê em seu nascimento, diversos cuidados devem ser considerados no período de gestação, como a realização de pré-natal. Leia o trecho de um texto a seguir.



► Bebê recém-nascido sendo pesado em uma balança analógica.

[...] A gestação é um período de aproximadamente quarenta semanas que envolve inúmeras mudanças na vida de uma família. O estado nutricional pré-gestacional e a alimentação materna durante essa fase podem influenciar as condições de saúde do feto, como, por exemplo, o peso ao nascer. É importante que haja um acompanhamento pré-natal efetivo para identificar fatores de risco para desvios de crescimento e desenvolvimento intrauterino e assim propor estratégias de prevenção e promoção à saúde do binômio mãe-filho. O peso ao nascer é um parâmetro que avalia as condições de saúde de um recém-nascido. [...]

TOURINHO, Amanda Braga; REIS, Lílian Barros de Souza Moreira. Peso ao nascer: uma abordagem nutricional. **Revista Comunicação em Ciências da Saúde**, Brasília, DF, v. 22. n. 4. p. 19-30, 2013. p. 19. Disponível em: http://bvsmms.saude.gov.br/bvs/periodicos/revista_ESCS_v23_n1_a02_peso_ao_nascer.pdf. Acesso em: 23 jul. 2024.

Observe no quadro a massa, em kilograma, de 32 bebês nascidos em certa semana em um hospital, com valores ordenados de maneira crescente.

0,75	1,36	1,50	1,87	2,10	2,23	2,45	2,64
2,70	2,90	3,15	3,23	3,28	3,36	3,37	3,48
3,50	3,61	3,72	3,86	3,92	4,10	4,25	4,35
4,52	4,60	4,65	4,72	4,81	4,84	4,90	5,54

Fonte: Dados fictícios.

Para analisar a distribuição da massa desses recém-nascidos, resumindo o conjunto de valores, podemos usar o diagrama de **ramos e folhas**. Nesse diagrama, é traçada uma linha reta vertical e cada valor do conjunto é dividido em duas partes: os **ramos**, colocados à esquerda da linha, e as **folhas**, colocadas à direita da linha.

Em relação ao exemplo apresentado, podemos considerar como ramo a parte inteira da massa do recém-nascido, em kilograma, e a folha, a parte decimal correspondente. Acompanhe.

0	75										
1	36	50	87								
2	10	23	45	64	70	90					
3	15	23	28	36	37	48	50	61	72	86	92
4	10	25	35	52	60	65	72	81	84	90	
5	54										

► Legenda: 0 | 75 = 0,75 kg.

DICA

Não há uma regra preestabelecida na construção de um diagrama de ramos e folhas. Por exemplo, a definição das partes dos valores correspondentes aos ramos e às folhas depende da natureza dos dados e de como se deseja expressá-los. No entanto, a quantidade de folhas deve corresponder à quantidade de valores do conjunto de dados.

DICA

O símbolo * indica os ramos cujas folhas têm valor menor que 50 e o símbolo ', os ramos cujas folhas têm valor maior ou igual a 50.

Pelo diagrama apresentado anteriormente, fica evidente que 0,75 kg e 5,54 kg correspondem à menor e à maior massa, respectivamente. Além disso, é possível visualizar que a maior parte dos recém-nascidos tem massa concentrada entre 2,10 kg e 4,90 kg.

Outro modo de representar esses dados é duplicando cada ramo. Nesse caso, podemos organizar, em ramos diferentes, as folhas com valor menor que 50 e, em outro ramo, as folhas com valor maior ou igual a 50. Analise.

0*							
0'	75						
1*	36						
1'	50	87					
2*	10	23	45				
2'	64	70	90				
3*	15	23	28	36	37	48	
3'	50	61	72	86	92		
4*	10	25	35				
4'	52	60	65	72	81	84	90
5*							
5'	54						

PARA PENSAR

Como você representaria a massa de 2,85 kg nesse diagrama?

Resposta esperada: No ramo 2', seria colocada uma folha de valor 85 entre os valores 70 e 90, que já estão indicados.

► Legenda: 0' | 75 = 0,75 kg.

Para a construção de um diagrama de ramos e folhas, é sempre necessário incluir uma legenda, pois os dados podem representar diferentes ordens de grandeza. Por exemplo, em um diagrama, o valor 3 | 25 pode indicar tanto 3,25 cm quanto 325 cm, caso não haja uma legenda para esclarecer a interpretação correta.

ATIVIDADES

Não escreva no livro.

19. Em relação aos diagramas apresentados, resolva as questões a seguir.

- Quantos ramos tem cada diagrama? primeiro diagrama: 6 ramos; segundo diagrama: 12 ramos
- Qual é o ramo com a maior quantidade de folhas no primeiro diagrama apresentado? E no segundo? ramo 3; ramo 4'
- Quantos recém-nascidos têm massa igual ou maior que 4,7 kg? 5 recém-nascidos
- O baixo peso ao nascer (massa inferior a 2 500 g) é um dos principais fatores de risco associado à mortalidade infantil. Determine o percentual aproximado dos recém-nascidos dessa semana que podem ser considerados de baixo peso. 22%
 - Realize uma pesquisa sobre a mortalidade infantil na região em que você mora, analisando a taxa dessa mortalidade, a existência de programas ou políticas públicas para redução dessas taxas, entre outros aspectos. Depois, elabore um material para divulgar os dados obtidos, como cartaz, vídeo, publicação em algum meio digital, entre outros. Você pode organizar alguns dos resultados em gráficos ou tabelas. Resposta pessoal.

20. b) Resposta esperada: Considerar como ramo o algarismo da dezena da frequência cardíaca de cada estudante, em batimentos por minuto, e, como folha, o algarismo da unidade correspondente.

20. d) Resposta esperada: O ramo 7, indicando que há mais estudantes com frequência cardíaca aferida de 70 a 79 bpm do que nos demais intervalos representados.

20. Observe, no diagrama de ramos e folhas a seguir, a frequência cardíaca, em batimentos por minuto (bpm), aferida nos estudantes de uma turma de Ensino Médio.

6	4	5	8						
7	1	2	5	5	5	7	8	9	9
8	0	3	3	4	6	7	7		
9	0	1	2	3	9	9			

► Legenda: 6 | 4 = 64 bpm.

- a)** Quantos estudantes dessa turma tiveram a frequência cardíaca aferida? **25 estudantes**
- b)** Qual regra você imagina que tenha sido preestabelecida para a construção desse diagrama?
- c)** Quantos estudantes tiveram a frequência cardíaca aferida em 83 bpm? **2 estudantes**
- d)** Qual ramo desse diagrama apresenta a maior quantidade de folhas? O que isso indica?
- e)** Qual é a frequência cardíaca que foi apresentada por mais estudantes nessas aferições? **75 bpm**
- f)** Organize essas mesmas informações em um novo diagrama de ramos e folhas de maneira que cada ramo seja duplicado. Em seguida, explique como foi feita essa organização.

Respostas nas **Orientações para o professor**.

21. O Cadastro Geral de Empregados e Desempregados (Caged) é o órgão do governo federal responsável pelo controle de registros de admissões, dispensas e transferências de trabalhadores com contrato de trabalho regido pela Consolidação das Leis do Trabalho (CLT). Um importante indicador medido pelo Caged é a variação relativa de estoque, que corresponde à razão entre as quantidades de vínculos de emprego regidos pela CLT em dois períodos consecutivos, em porcentual. Observe, a seguir, as variações relativas de estoque de cada Unidade da Federação do Brasil, em porcentual, de janeiro a dezembro de 2023.

4,25	4,94	4,64	6,89	5,27	7,45	6,08
3,81	6,43	4,35	4,94	4,28	3,75	5,93
4,51	3,78	3,15	4,19	4,74	2,99	3,00
2,67	1,79	4,69	4,88	3,64	4,22	

Fonte dos dados: BRASIL. Ministério do Trabalho e Emprego. **Novo Caged**: estatísticas mensais do emprego formal: referência dezembro de 2023. Brasília, DF: MTE: PDET, [2024]. p. 14. Disponível em: https://www.gov.br/trabalho-e-emprego/pt-br/assuntos/estatisticas-trabalho/novo-caged/novo-caged-2023/dezembro/sumario-executivo_dezembro-de-2023.pdf. Acesso em: 6 set. 2024.

Com base nesses dados, resolva os itens a seguir. **Respostas nas Orientações para o professor.**

- a)** Construa um diagrama de ramos e folhas, indicando a regra preestabelecida para essa construção.
- b)** Escreva um texto com sua análise sobre esses dados, considerando, por exemplo, se há valores mais frequentes, onde esses valores mais se concentram no diagrama, o porcentual de Unidades da Federação que têm variação relativa de estoque menor que 3,5, entre outras.
- c)** Ao final, compare sua análise e o diagrama que você construiu com os de um colega.

INTEGRANDO COM...

CIÊNCIAS HUMANAS E SOCIAIS APLICADAS



Bullying

O que você conhece a respeito de *bullying*? É um termo em inglês utilizado para situações caracterizadas por agressões ou humilhações constantes a outra pessoa.

1. Pode ocorrer:



2. Alguns tipos de *bullying*:

- Verbal** → apelidos, xingamentos e provocações
- Físico** → beliscar, chutar e empurrar
- Escrito** → bilhetes, desenhos e pichações depreciativos
- Moral** → imitar, difamar e caluniar
- Social** → ignorar, excluir e criar rumores
- Virtual** → mensagens, fofocas ou mentiras manifestadas por meio do uso de tecnologias e da internet

3. De acordo com uma pesquisa:



Fonte dos dados: INSTITUTO BRASILEIRO DE GEOGRAFIA E ESTATÍSTICA. **Pesquisa nacional de saúde do escolar:** 2019. Rio de Janeiro: IBGE, 2021. p. 41. Disponível em: <https://biblioteca.ibge.gov.br/visualizacao/livros/liv101852.pdf>. Acesso em: 23 jul. 2024.

* Estudantes de 13 a 17 anos que afirmaram que em duas ou mais vezes se sentiram humilhados por provocações dos colegas nos 30 dias anteriores à pesquisa. Dados de 2019.

4. As pessoas envolvidas no *bullying*:

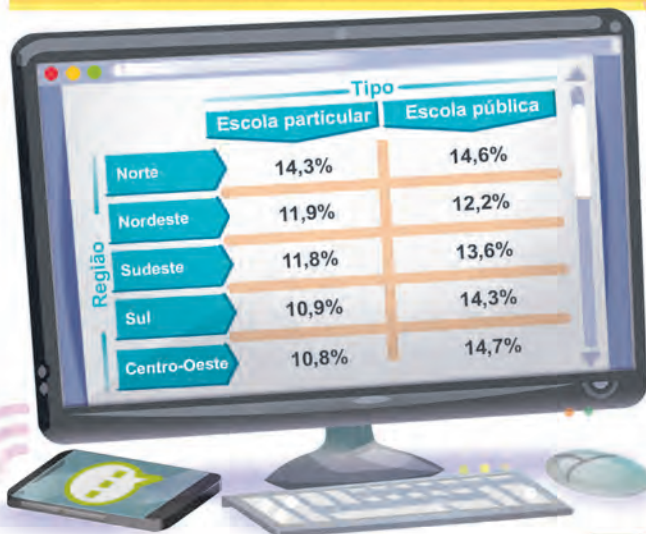
- Agressor:** É quem agride com a intenção de magoar ou ameaçar a outra pessoa. O agressor pode sentir que tem poder e força.
- Vítima:** É o alvo de comportamentos incômodos ou intimidação. A vítima pode sentir que a culpa é dela, pode apresentar baixa autoestima e ansiedade.
- Testemunha:** É quem presencia o assédio. A testemunha pode sentir medo e culpa.

Algumas dicas para evitar o *bullying*:

- Incentivar as pessoas a informar os casos.
- Dialogar com os envolvidos.
- Implantar regras contra o *bullying*.

FABIO EUGENIO

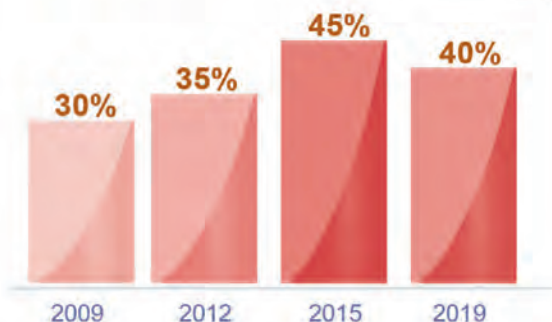
6. Estudantes de 13 a 17 anos que se sentiram ameaçados, ofendidos ou humilhados nas redes sociais ou aplicativo de celular, nos 30 dias anteriores à pesquisa, por região do Brasil e dependência administrativa da escola, 2019



Fonte dos dados: INSTITUTO BRASILEIRO DE GEOGRAFIA E ESTATÍSTICA. **Pesquisa nacional de saúde do escolar**: tabelas 2019. Rio de Janeiro: IBGE, [2019]. Localizável em: Escolares de 13 a 17 anos: Tema 2: Tabela 2.9.1. Disponível em: <https://www.ibge.gov.br/estatisticas/sociais/educacao/9134-pesquisa-nacional-de-saude-do-escolar.html?edicao=31442&t=resultados>. Acesso em: 23 jul. 2024.

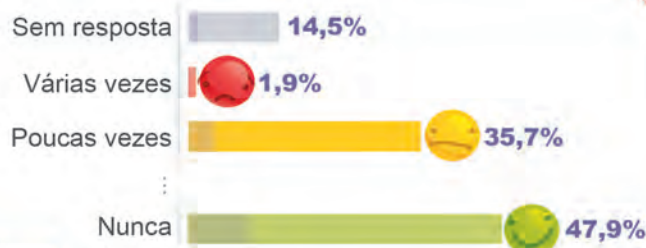
7.

Porcentual de estudantes do 9º ano do Ensino Fundamental que sofreram *bullying* nas capitais brasileiras, 2009-2019



Fonte dos dados: INSTITUTO BRASILEIRO DE GEOGRAFIA E ESTATÍSTICA. **Pesquisa nacional de saúde do escolar**: análise de indicadores comparáveis dos escolares do 9º ano do ensino fundamental: município das capitais: 2009/2019. Rio de Janeiro: IBGE, 2022. (Estudos & Pesquisas: Informação Demográfica e Socioeconômica, n. 46, p. 46). Disponível em: <https://biblioteca.ibge.gov.br/visualizacao/livros/liv101955.pdf>. Acesso em: 23 jul. 2024.

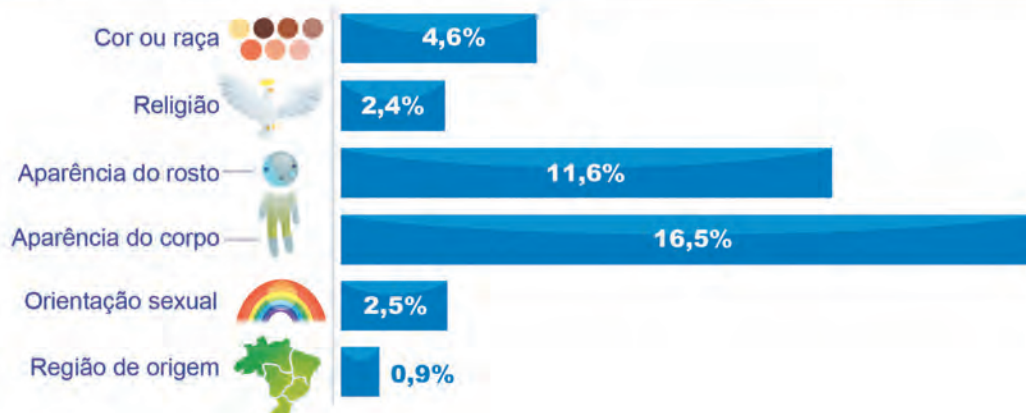
8. Percepção de diretores sobre a ocorrência de situações de *bullying* na escola em que trabalham, no Brasil, 2021



Fonte dos dados: ANUÁRIO BRASILEIRO DE SEGURANÇA PÚBLICA. São Paulo: Fórum Brasileiro de Segurança Pública, ano 17, 2023. p. 346. Disponível em: <https://forumseguranca.org.br/wp-content/uploads/2023/07/anuario-2023.pdf>. Acesso em: 23 jul. 2024.

9.

Estudantes de 13 a 17 anos de idade que afirmaram ter sofrido *bullying* na escola, de acordo com os motivos mais frequentes, no Brasil, 2019



Fonte dos dados: INSTITUTO BRASILEIRO DE GEOGRAFIA E ESTATÍSTICA. **Pesquisa nacional de saúde do escolar**: tabelas 2019. Rio de Janeiro: IBGE, [2019]. Localizável em: Escolares de 13 a 17 anos: Tema 2: Tabela 2.6.1. Disponível em: <https://www.ibge.gov.br/estatisticas/sociais/educacao/9134-pesquisa-nacional-de-saude-do-escolar.html?edicao=31442&t=resultados>. Acesso em: 23 jul. 2024.

FABIO EUGENIO

O bullying e a autoestima

Autoestima é uma avaliação efetuada pelo indivíduo e que ele habitualmente mantém sobre si mesmo. É considerada um importante indicador de saúde mental das pessoas e que afeta o comportamento e a participação em sociedade.

No início da adolescência, os indivíduos têm maior tendência à inconstância dos sentimentos sobre si e podem estar mais fragilizados. Nessa etapa da vida, os adolescentes envolvidos em *bullying* podem ter sua autoestima afetada, resultando em diversas consequências, a curto e a longo prazo, como baixo rendimento escolar, transtornos alimentares, comportamentos antissociais etc.

Leia mais informações sobre esse assunto no trecho de um texto seguir.

[...] A autoestima também afeta o adolescente na forma de lidar com o ambiente. Crianças e adolescentes com boa autoestima persistem mais e fazem mais progressos diante de tarefas difíceis que aqueles com uma baixa autoestima. A posição que as crianças e os adolescentes ocupam entre seus pares é extremamente importante, uma vez que a autoestima é uma função deste *status* dentro do grupo. As crianças cujos pares não gostam dela têm menos oportunidades de desenvolver suas habilidades sociais [...]. A autoestima está relacionada à saúde mental e ao bem-estar psicológico e sua carência está relacionada a certos fenômenos mentais negativos, como depressão e suicídio. [...]

BANDEIRA, Cláudia de Moraes; HUTZ, Claudio Simon. As implicações do *bullying* na autoestima de adolescentes. *Revista Semestral da Associação Brasileira de Psicologia Escolar e Educacional*, São Paulo, v. 14, n. 1, p. 131-138, jan./jun. 2010. p. 133. Disponível em: www.scielo.br/pdf/pee/v14n1/v14n1a14. Acesso em: 23 jul. 2024.



SEVENTYFOUR/SHUTTERSTOCK.COM

- ▶ Grupo de adolescentes em momento descontraído. Mesmo nos momentos alegres e divertidos, devemos tomar cuidado para não magoar ou ofender nossos colegas. Exercitar a empatia, valorizar a diversidade e cuidar da saúde emocional são atitudes fundamentais para vencer o *bullying*.

PARA AMPLIAR

Acesse este [site](#) para obter mais informações sobre *bullying* e o *cyberbullying*.

- SANTA CATARINA. Ministério Público. **Bullying**: isso não é brincadeira! Florianópolis: MPSC, [2017]. Disponível em: www.mpsc.mp.br/campanhas/bullying. Acesso em: 23 jul. 2024.

PENSANDO NO ASSUNTO

Não escreva no livro.

1. O *bullying* ocorre apenas nas escolas? Justifique sua resposta. Não, pois pode ocorrer também no ônibus, entre outros locais, e por meio da internet, por exemplo.
2. Cite tipos de agressão que podem ocorrer no *bullying*. Algumas respostas possíveis: Verbal, física, por escrito, moral, social, virtual.
3. Converse com os colegas e o professor sobre os itens a seguir.
 - a) Você já praticou *bullying* ou presenciou algum caso? Em caso afirmativo, relate como lidou com essa situação. Respostas pessoais.
 - b) Explique o que é *cyberbullying*. Se necessário, faça uma pesquisa. ofensivas ou difamatórias em redes sociais.
4. De acordo com dados de pesquisas estatísticas e os textos apresentados nas páginas anteriores, resolva os itens a seguir.
 - a) Em 2019, entre os estudantes brasileiros de 13 a 17 anos, quem mais sofreu com *bullying*: meninas ou meninos? meninas
 - b) Na região em que você mora, que porcentagem dos estudantes de escolas públicas pesquisados em 2019 se sentiram ameaçados, ofendidos ou humilhados nas redes sociais ou em aplicativo de celular? A resposta depende da região do Brasil em que o estudante mora.
 - c) Em 2019, no Brasil, qual motivo/causa fez que os adolescentes se sentissem mais humilhados? Qual foi esse percentual? aparência do corpo; 16,5%
 - d) De acordo com as informações apresentadas, o que é possível fazer para evitar o *bullying*?
 - e) Que danos podem ser causados à autoestima de adolescentes envolvidos em *bullying*?
5. Junte-se a dois colegas, leiam a seguinte questão e façam o que se pede em cada um dos itens.

Como é possível realizar uma campanha a fim de melhorar a convivência com os colegas da escola e evitar o *bullying*?

Vocês vão elaborar uma peça publicitária para compor uma campanha *antibullying* da turma. Para isso, podem produzir cartaz, folheto, anúncio, *jingle* ou vídeo, por exemplo. É importante que essa peça publicitária contenha informações, como:

- tipos de agressão que os estudantes presenciaram;
- gráfico ou tabela representando, por exemplo, a quantidade de estudantes da turma que sofreram *bullying*;
- relação entre o *bullying* e a autoestima;
- atitudes que podem ser tomadas para combater o *bullying* na escola em que você estuda.

Se for possível, divulguem as peças publicitárias produzidas para a comunidade escolar de diferentes maneiras: apresentações, exposições ou em redes sociais. Resposta pessoal.

PARA AMPLIAR

Acesse este *site* para ler o texto da lei nº 13.185, de 6 de novembro de 2015, que institui o Programa de Combate à Intimidação Sistemática (*bullying*).

- BRASIL. **Lei nº 13.185, de 6 de novembro de 2015.** Institui o Programa de Combate à Intimidação Sistemática (*Bullying*). Brasília, DF: Presidência da República, 2015. Disponível em: www.planalto.gov.br/ccivil_03/_ato2015-2018/2015/lei/l13185.htm. Acesso em: 23 jul. 2024.

4. e) Baixo rendimento escolar, transtornos alimentares, comportamentos antissociais, depressão.

Distribuição de frequência

Atualmente, em diversos municípios brasileiros, são ofertados cursos de robótica nos quais os estudantes constroem projetos e programam robôs, por exemplo.

PARA AMPLIAR

Acesse este *site* para obter informações sobre a Olimpíada Brasileira de Robótica (OBR).

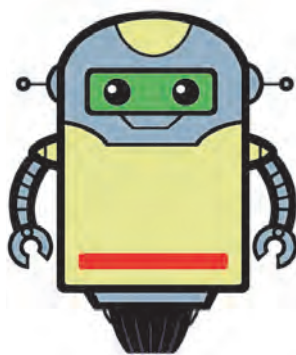
- OLIMPÍADA BRASILEIRA DE ROBÓTICA. [S. l.], c2024. *Site*. Disponível em: <https://obr.robocup.org.br/>. Acesso em: 23 jul. 2024.

Em certa escola de robótica, os cursos são ofertados de acordo com o nível de conhecimento dos estudantes: iniciante, básico, intermediário e avançado. Com o objetivo de planejar os cursos do próximo semestre, a direção da escola identificou a quantidade de estudantes em cada nível de conhecimento. Observe.

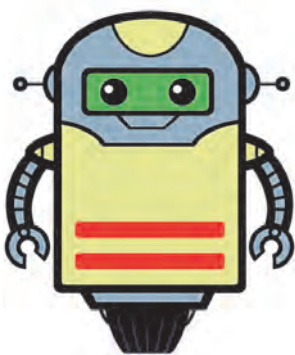


SDI PRODUCTIONS/GETTY IMAGES

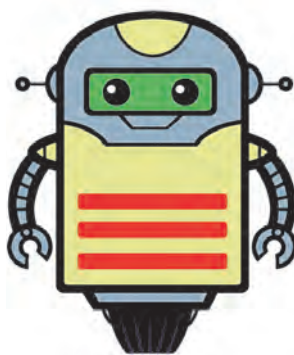
► Professor e estudante em uma aula de robótica.



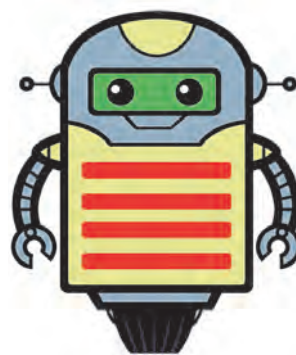
Iniciante:
35 estudantes



Básico:
30 estudantes



Intermediário:
40 estudantes



Avançado:
20 estudantes

ARTUR FUJITA

NO MUNDO

DO TRABALHO

Robótica e o mercado de trabalho

A robótica está cada vez mais presente em nosso cotidiano, tendo uma variedade de aplicações. Por exemplo, linhas de montagem nas indústrias, realização de cirurgias, exploração do espaço e de outros ambientes de difícil acesso ao ser humano, auxílio em operações militares de busca e resgate.

Com os avanços tecnológicos e a busca pela eficiência de processos, a área de robótica também está em constante ascensão, implicando maior demanda por profissionais qualificados, como engenheiro mecatrônico, programador de robôs, especialista em inteligência artificial.

Assista a este vídeo para obter mais informações acerca da robótica, suas aplicações e tendências.

- ROBÓTICA: tendências, fundamentos e o futuro que nos aguarda. [S. l.: s. n.], 2024. 1 vídeo (5 min). Publicado pelo canal Senai Play. Disponível em: www.youtube.com/watch?v=fVVdB7nmmdl. Acesso em: 23 jul. 2024.

Quando temos disponível um conjunto de dados, podemos estudar como esses dados estão distribuídos, se há uma ocorrência maior de determinado valor, entre outros aspectos. Para isso, é possível organizar esse conjunto de dados em uma **tabela de distribuição de frequência**. Acompanhe as etapas que podem ser realizadas para essa organização.

- 1ª) Indicamos a **frequência absoluta** (f), que corresponde à quantidade de estudantes em cada nível, e a **frequência acumulada absoluta** (fa), que corresponde à quantidade total de estudantes até o nível que está sendo considerado.

Estudantes nos cursos de robótica

Nível de conhecimento	Frequência absoluta (f)	Frequência acumulada absoluta (fa)
Iniciante	35	35
Básico	30	65
Intermediário	40	105
Avançado	20	125
Total	125	

Iniciante
 $fa: 35$

Básico
 $fa: 35 + 30 = 65$

Intermediário
 $fa: 65 + 40 = 105$

Avançado
 $fa: 105 + 20 = 125$

Fonte: Dados fictícios.

PARA PENSAR

É evidente para você que, de acordo com essa classificação, um estudante que está, por exemplo, no nível intermediário, domina todas as competências inerentes ao nível básico e ao nível iniciante?

Resposta pessoal.

- 2ª) Indicamos a **frequência relativa** (fr), que corresponde à porcentagem de estudantes em cada nível, e a **frequência acumulada relativa** (far), que corresponde à porcentagem total de estudantes até o nível que está sendo considerado.

Estudantes nos cursos de robótica

Nível de conhecimento	Frequência absoluta (f)	Frequência acumulada absoluta (fa)	Frequência relativa (fr)	Frequência acumulada relativa (far)
Iniciante	35	35	28%	28%
Básico	30	65	24%	52%
Intermediário	40	105	32%	84%
Avançado	20	125	16%	100%
Total	125		100%	

Resposta esperada: Indica que 84% dos estudantes dessa escola estão em nível intermediário, básico ou iniciante em relação ao conhecimento sobre robótica.

Fonte: Dados fictícios.

PARA PENSAR

Explique o que indica o valor 84%, na coluna referente à far , de acordo com a situação apresentada.

PARA PENSAR

Resposta pessoal.

Dê exemplos da importância das frequências acumulada absoluta, relativa e acumulada relativa para identificar informações no contexto apresentado.

$$fr: \frac{35}{125} = 0,28 \rightarrow 28\%$$

$$far: 28\%$$

$$fr: \frac{30}{125} = 0,24 \rightarrow 24\%$$

$$far: 28\% + 24\% = 52\%$$

$$fr: \frac{40}{125} = 0,32 \rightarrow 32\%$$

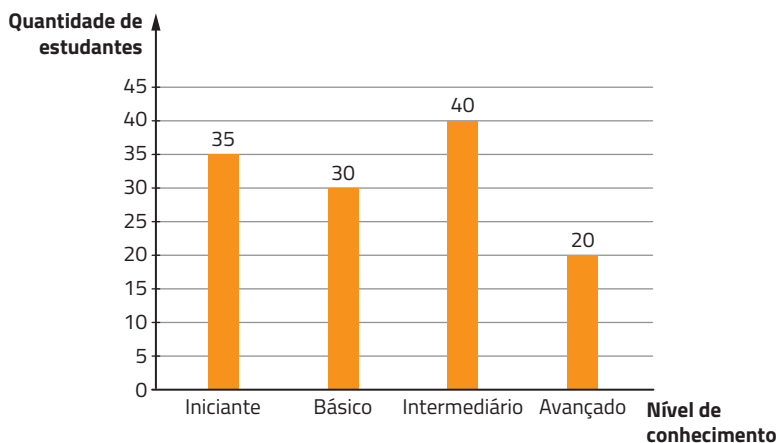
$$far: 52\% + 32\% = 84\%$$

$$fr: \frac{20}{125} = 0,16 \rightarrow 16\%$$

$$far: 84\% + 16\% = 100\%$$

A partir da tabela construída anteriormente, podemos elaborar diferentes tipos de gráfico, que auxiliam na interpretação dos dados. Analise alguns exemplos.

Estudantes nos cursos de robótica



Fonte: Dados fictícios.

GRÁFICOS: CBOOK PRODUÇÕES

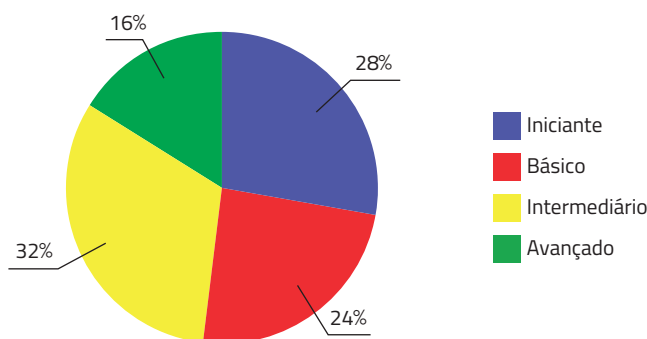
Resposta esperada: Para construir o gráfico de colunas, foram utilizadas as frequências absolutas e, para construir o gráfico de setores, as frequências relativas. Resposta pessoal.

PARA PENSAR

Quais dados da tabela foram utilizados para elaborar cada um desses gráficos? Você sabe construir gráficos como esses em uma planilha eletrônica?

Fonte: Dados fictícios.

Nível de conhecimento dos estudantes nos cursos de robótica



Atividades

Não escreva no livro.

22. c) Resposta esperada: Sim, pois 52% dos estudantes estão nos níveis de conhecimento básico ou iniciante, ou seja, mais da metade do total (50%).

22. Em relação à situação apresentada sobre a oferta de cursos de robótica em certa escola, resolva as questões a seguir.

- Nessa escola, qual nível de conhecimento apresenta a maior quantidade de estudantes? E a menor quantidade? **nível intermediário; nível avançado**
- Qual é o percentual de estudantes com nível de conhecimento avançado? **16%**
- Podemos afirmar que mais da metade dos estudantes dessa escola estão nos níveis de conhecimento básico ou iniciante? Justifique sua resposta.
- A diretora dessa escola vai organizar uma turma com os estudantes que estão no nível de conhecimento intermediário e nos níveis inferiores a fim de prepará-los para uma olimpíada de robótica. Qual será a quantidade máxima de estudantes que vão formar essa turma? Qual é o percentual correspondente a essa quantidade de estudantes? Explique onde é possível identificar essas informações na tabela de distribuição de frequência apresentada.

105 estudantes; 84%. Resposta esperada: A quantidade de estudantes está indicada na célula correspondente à *fa* do nível de conhecimento intermediário, e o percentual, na célula correspondente à *far* desse mesmo nível de conhecimento.

23. b) Resposta nas **Orientações para o professor**.

23. c) Respostas nas **Orientações para o professor**.

23. O Índice de Desenvolvimento Humano (IDH) é uma medida que considera três fatores de uma população: renda, educação e saúde. Anualmente, esse índice é publicado no **Relatório de Desenvolvimento Humano (RDH)**, no qual os países são organizados em uma lista de acordo com uma classificação: muito elevado, elevado, médio ou baixo. Observe a lista a seguir com a classificação do IDH de 2021 de cada país da América.

ME: muito elevado **M:** médio
E: elevado **B:** baixo

E	ME	ME	E	E	M	E
M	E	M	B	M	E	M
E	E	ME	E	E	E	ME
ME	E	ME	E	E	ME	E
E	M	E	M	E	ME	ME

Fonte dos dados: PROGRAMA DAS NAÇÕES UNIDAS PARA O DESENVOLVIMENTO. **Relatório do desenvolvimento humano 2021/2022:** tempos incertos, vidas instáveis: a construir o nosso futuro num mundo em transformação. Nova York: Pnud, c2022. p. 272-276.
Localizável em: *Download*. Disponível em: <https://www.undp.org/sites/g/files/zskgke326/files/2023-05/hdr2021-22ptpdf.pdf>. Acesso em: 23 jul. 2024.

- a) Qual frase a seguir expressa um fato verdadeiro sobre esses dados? **frase II**
- I) A maior parte dos países tem IDH médio.
II) Mais de um quinto desses países tem IDH muito elevado.
III) Nenhum desses países tem IDH baixo.
- b) Construa uma tabela e indique a frequência absoluta, a frequência acumulada absoluta, a frequência relativa e a frequência acumulada relativa da classificação do IDH de 2021 desses países.
- c) Construa dois gráficos com os dados da tabela que você elaborou no item anterior.
- Explique por que você optou por esses tipos de gráfico.
 - Quais dados da tabela foram utilizados para elaborar cada gráfico?

24. Com um colega, pesquisem o IDH do Brasil, da unidade da Federação e do município onde vocês moram. Em seguida, com base nesses dados e nas informações apresentadas na atividade anterior, elaborem três questões. Depois, troquem essas questões com outra dupla para que uma resolva as da outra. Juntos, verifiquem se as respostas estão corretas.

24. Resposta pessoal.

● Intervalo de classes e histograma

As taxas de rendimento escolar – aprovação, reprovação e abandono – são coletadas anualmente pelo Censo Escolar e utilizadas no cálculo do Índice de Desenvolvimento da Educação Básica (Ideb).

Observe, a seguir, a taxa de aprovação escolar do Ensino Médio de cada um dos 62 municípios do Amazonas, organizadas em ordem crescente, divulgada no **Censo Escolar 2022**.

71,7	73,2	75,1	75,3	76,6	77,2	77,8	78,1	78,7	79,7
79,8	80,1	80,4	80,6	82,3	82,3	82,5	82,8	82,8	82,9
83,3	83,8	84,3	84,4	84,7	84,8	84,9	84,9	85,0	85,4
85,5	85,6	85,9	85,9	85,9	86,1	86,3	87,0	87,0	87,1
88,0	88,3	88,4	88,5	88,7	88,8	89,1	89,3	89,6	89,9
90,2	90,5	90,6	91,4	91,6	92,3	92,4	92,8	93,4	95,8
96,1	98,5								

Fonte dos dados: BRASIL. Ministério da Educação. Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira. **Taxas de rendimento escolar por município:** 2022. Brasília, DF: Inep, 2022. Disponível em: https://download.inep.gov.br/informacoes_estatisticas/indicadores_educacionais/2022/tx_rend_municipios_2022.zip. Acesso em: 23 jul. 2024.

Conforme estudamos, podemos organizar esses dados em uma tabela de distribuição de frequência. No entanto, como poucos municípios apresentaram a mesma taxa de aprovação escolar, essa tabela não é uma alternativa adequada para resumir esse conjunto de dados. Em situações como essa, podemos agrupar os dados por faixas, denominadas **intervalos de classe**.

Para agrupar os dados por faixas, é necessário definir de maneira conveniente a amplitude dos intervalos de classe e a quantidade desses intervalos que vão compor a tabela. Em relação à situação apresentada, observe as etapas que podemos realizar para definir esses intervalos de classe.

1ª) Vamos determinar a amplitude total dos dados, que corresponde à diferença entre a maior e a menor taxa de aprovação escolar.

$$98,5 - 71,7 = 26,8$$

2ª) Para determinar a amplitude dos intervalos de classe, vamos considerar um valor conveniente maior ou igual à amplitude total dos dados, por exemplo, 30. Também vamos definir a quantidade de intervalos de classe, por exemplo, 5. Assim, para determinar a amplitude de cada intervalo de classe, calculamos a razão a seguir.

$$\frac{30}{5} = 6$$

3ª) Definimos um valor conveniente para a extremidade esquerda do primeiro intervalo de classe, de maneira que seja menor ou igual à menor das taxas de aprovação escolar apresentadas. Em seguida, basta determinar cada intervalo de classe. A notação $70 \vdash 76$ indica que 70 pertence e que 76 não pertence a esse intervalo de classe.

$70 \vdash 76$ $70 + 6$	$76 \vdash 82$ $76 + 6$	$82 \vdash 88$ $82 + 6$	$88 \vdash 94$ $88 + 6$	$94 \vdash 100$ $94 + 6$
----------------------------	----------------------------	----------------------------	----------------------------	-----------------------------

DICA

O intervalo de classe indicado por $70 \vdash 76$ também pode ser representado pelo intervalo real $[70, 76[$.

Agora, para construir a tabela de distribuição de frequência, inicialmente vamos determinar a frequência absoluta (f) correspondente a cada intervalo de classe. Depois, determinar a frequência acumulada absoluta (fa), a frequência relativa (fr) e a frequência acumulada relativa (far) correspondentes a esses intervalos de classe, conforme a tabela a seguir.

Taxa de aprovação escolar no Ensino Médio nos municípios do Amazonas, 2022

Taxa de aprovação escolar	Frequência absoluta (f)	Frequência acumulada absoluta (fa)	Frequência relativa (fr)	Frequência acumulada relativa (far)
$70 \vdash 76$	4	4	6,5%	6,5%
$76 \vdash 82$	10	14	16,1%	22,6%
$82 \vdash 88$	26	40	41,9%	64,5%
$88 \vdash 94$	19	59	30,7%	95,2%
$94 \vdash 100$	3	62	4,8%	100%
Total	62		100%	

Esta frequência absoluta indica que 10 municípios amazonenses apresentaram taxa de aprovação escolar maior ou igual a 76 e menor que 82.

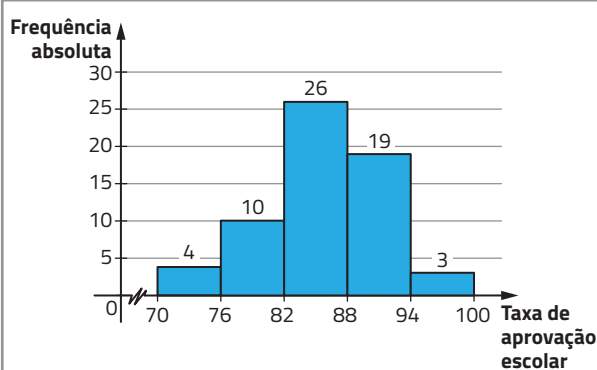
DICA

Não há uma regra para determinar a escolha dos intervalos de classe; ela depende da natureza dos dados pesquisados. No entanto, uma grande quantidade de intervalos não colabora para o resumo dos dados, e uma pequena quantidade de intervalos dificulta a preservação de características desses dados.

Fonte dos dados: BRASIL. Ministério da Educação. Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira. **Taxas de rendimento escolar por município**: 2022. Brasília, DF: Inep, 2022. Disponível em: https://download.inep.gov.br/informacoes_estatisticas/indicadores_educacionais/2022/tx_rend_municipios_2022.zip. Acesso em: 23 jul. 2024.

Podemos utilizar um tipo de gráfico denominado **histograma** para representar as frequências absoluta ou relativa de uma tabela de distribuição de frequência com dados agrupados em intervalos de classe. Nesse tipo de gráfico, as classes são representadas por retângulos justapostos (colunas). Em cada retângulo, a largura corresponde à amplitude do intervalo, e a altura é proporcional à frequência (absoluta ou relativa) correspondente. Analise.

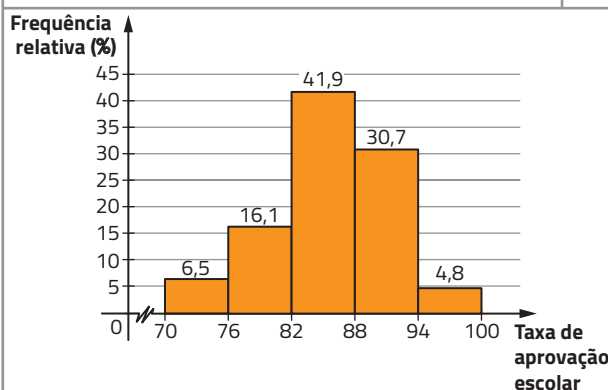
Taxa de aprovação escolar no Ensino Médio nos municípios do Amazonas, com dados absolutos, 2022



Fonte dos dados: BRASIL. Ministério da Educação. Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira.

Taxas de rendimento escolar por município: 2022. Brasília, DF: Inep, 2022. Disponível em: https://download.inep.gov.br/informacoes_estatisticas/indicadores_educacionais/2022/tx_rend_municipios_2022.zip. Acesso em: 23 jul. 2024.

Taxa de aprovação escolar no Ensino Médio nos municípios do Amazonas, com dados relativos, 2022



Fonte dos dados: BRASIL. Ministério da Educação. Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira.

Taxas de rendimento escolar por município: 2022. Brasília, DF: Inep, 2022. Disponível em: https://download.inep.gov.br/informacoes_estatisticas/indicadores_educacionais/2022/tx_rend_municipios_2022.zip. Acesso em: 23 jul. 2024.

ILUSTRAÇÕES: CBOOK PRODUÇÕES

ATIVIDADES

Não escreva no livro.

25. Em relação à taxa de aprovação escolar apresentada, resolva as questões a seguir.

- Quantos municípios apresentaram taxa de aprovação escolar menor que 82? Qual é o percentual correspondente a essa quantidade de municípios amazonenses? **14 municípios; 22,6%**
- Qual foi o percentual de municípios amazonenses que apresentaram taxa de aprovação escolar maior ou igual a 94? **4,8%**
- Em 2022, a taxa de aprovação escolar de Manaus, capital do Amazonas, foi 85,5. Em qual intervalo de classe essa taxa foi representada na tabela? **82–88**
- Observando apenas a tabela, é possível listar a taxa de aprovação escolar de cada município do Amazonas? Justifique sua resposta.

26. Leia o trecho de um texto e analise as informações a seguir para responder às questões.

Acidente escorpiônico ou escorpionismo é o quadro clínico de envenenamento provocado quando um escorpião injeta sua peçonha através do ferrão (télson). Os escorpiões são representantes da classe dos aracnídeos, predominantes nas zonas tropicais e subtropicais do mundo, com maior incidência nos meses em que ocorre aumento de temperatura e umidade.

BRASIL. Ministério da Saúde. **Acidentes por escorpiões.** Brasília, DF: MS, [2024]. Disponível em: <https://www.gov.br/saude/pt-br/assuntos/saude-de-a-a-z/a/animais-peconhentos/acidentes-por-escorpioes>. Acesso em: 23 jul. 2024.

PARA AMPLIAR

Acesse este *site* para obter mais informações sobre acidentes por animais peçonhentos.

- BRASIL. Ministério da Saúde. **Acidentes por animais peçonhentos.** Brasília, DF: MS, [2024]. Disponível em: <https://www.gov.br/saude/pt-br/assuntos/saude-de-a-a-z/a/animais-peconhentos>. Acesso em: 23 jul. 2024.

Acidentes escorpiônicos notificados no Brasil, por faixa etária, 2023

Faixa etária	Frequência absoluta (f)	Frequência acumulada absoluta (fa)	Frequência relativa (fr)	Frequência acumulada relativa (far)
0– 20	46 984	46 984	24%	24%
20– 40	57 371	104 355	29%	53%
40– 60	56 004	160 359	28%	81%
60–	36 525	196 884	19%	100%
Total	196 884		100%	

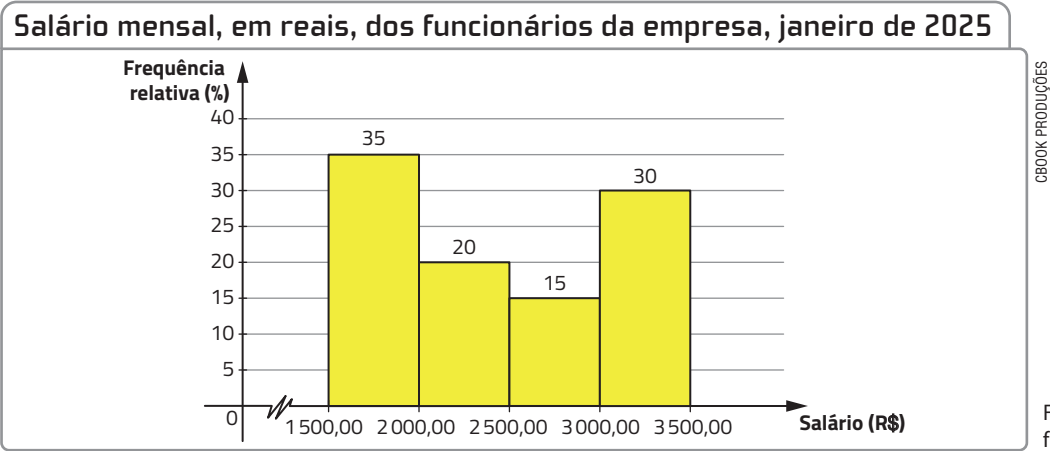
Fonte dos dados: BRASIL. Ministério da Saúde. **Acidente por animais peçonhentos**. Brasília, DF: Datasus, 2024. Disponível em: <http://tabnet.datasus.gov.br/cgi/tabcgi.exe?sinannet/cnv/animaisbr.def>. Acesso em: 23 jul. 2024.

- a) Em qual faixa etária foi notificada a maior quantidade de acidentes escorpiônicos? E a menor quantidade de acidentes? **igual ou maior que 20 anos e menor que 40 anos; 60 anos ou mais**
- b) Qual foi o percentual de acidentes notificados com pessoas de idade igual ou superior a 40 anos e inferior a 60 anos? **28%**
- c) Ao todo, quantos acidentes escorpiônicos foram notificados? **196 884 acidentes**
- d) Que percentual dos acidentes foram notificados com pessoas de idade inferior a 40 anos? **53%**
- e) Com base nos dados da tabela, elabore três questões e troque-as com um colega para que um resolva as do outro. Ao final, confiram juntos as resoluções. **Resposta pessoal.**
- f) Pesquise e escreva um texto com algumas medidas de prevenção de acidentes envolvendo animais peçonhentos. **Resposta pessoal.**

DICA

A notação 60 – corresponde à faixa etária de 60 anos ou mais.

27. Observe, no histograma representado a seguir, informações sobre o salário mensal dos 60 funcionários de uma empresa.



- a) Com base nesse histograma, construa uma tabela de distribuição de frequência com dados agrupados em intervalos de classe. **Resposta nas Orientações para o professor.**
- b) Quantos funcionários têm salário mensal menor que R\$ 3.000,00? **42 funcionários**
- c) Em qual intervalo de classe salarial está concentrada a maior quantidade de funcionários dessa empresa? **1 500,00– 2 000,00**
- d) Qual percentual dos funcionários tem salário mensal maior ou igual a R\$ 2.000,00 e menor que R\$ 2.500,00? **20%**
- e) Podemos afirmar que há funcionários que recebem salário mensal de R\$ 1.750,00? Justifique sua resposta. **Resposta esperada: Não, pois os salários dos funcionários não foram listados. No entanto, existe a possibilidade de isso ocorrer, pois 21 funcionários têm salário mensal maior ou igual a R\$ 1.500,00 e menor que R\$ 2.000,00.**

28. Com um colega, leiam o trecho de um texto a seguir para resolver esta atividade.



O saneamento básico é um direito garantido pela Constituição, e uma ferramenta estratégica essencial para o desenvolvimento da qualidade de vida no País. Mas além de ser essencial para a saúde das pessoas, o saneamento é vital para a sustentabilidade dos nossos rios, que hoje sofrem com toneladas de dejetos despejados em suas águas todos os dias. [...]

INSTITUTO TRATA BRASIL. **O que é saneamento.** São Paulo: ITB, [2024]. Disponível em: <https://tratabrasil.org.br/o-que-e-saneamento/>. Acesso em: 23 jul. 2024.

O estudo **Desafios da Gestão Municipal** (DGM) analisou a evolução dos 100 maiores municípios brasileiros com base no Índice dos Desafios da Gestão Municipal (IDGM), que contempla quatro áreas importantes para a qualidade de vida da população: educação, saúde, segurança e saneamento e sustentabilidade. Analisem, a seguir, os resultados desse índice para a área de saneamento e sustentabilidade, em 2021.

0,984	0,970	0,969	0,965	0,965	0,962	0,960	0,959	0,958	0,949
0,948	0,947	0,946	0,939	0,936	0,934	0,931	0,925	0,925	0,922
0,902	0,902	0,893	0,891	0,880	0,878	0,877	0,876	0,859	0,853
0,850	0,849	0,849	0,849	0,848	0,847	0,845	0,838	0,836	0,834
0,831	0,829	0,824	0,821	0,816	0,814	0,807	0,807	0,805	0,805
0,804	0,799	0,795	0,776	0,773	0,765	0,756	0,754	0,749	0,749
0,745	0,739	0,736	0,732	0,730	0,724	0,723	0,710	0,705	0,703
0,698	0,697	0,696	0,688	0,682	0,681	0,666	0,663	0,662	0,639
0,637	0,632	0,622	0,622	0,597	0,593	0,585	0,575	0,565	0,559
0,508	0,502	0,501	0,476	0,455	0,442	0,348	0,340	0,306	0,259

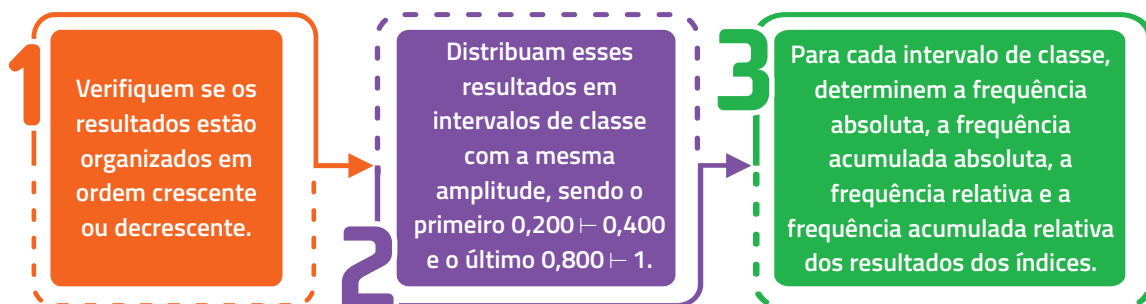


DICA

O IDGM varia de 0 a 1; quanto mais próximo de 1, melhor o desempenho do município.

Fonte dos dados: DESAFIOS DA GESTÃO MUNICIPAL. **IDGM 2021:** ranking por área: 100+: saneamento e sustentabilidade. [S. l.]: DGM: Macroplan, 2021. Disponível em: https://desafiosdosmunicipios.com.br/ranking_saneamento.php. Acesso em: 23 jul. 2024.

- a)** Com base nesses resultados, construam uma tabela de distribuição de frequência com dados agrupados em intervalos de classe. Para isso, sigam estas etapas. **Resposta nas Orientações para o professor.**



- b)** Com base na tabela construída no item anterior, elaborem um histograma para representar a frequência absoluta ou a frequência relativa. **Resposta nas Orientações para o professor.**
- c)** Com base nos itens **a** e **b**, elaborem três questões. Depois, troquem essas questões com outra dupla para que ela as resolva, enquanto vocês resolvem as questões que receberam. Ao final, confirmem juntos as resoluções. **Resposta pessoal.**

Construindo gráficos

Podemos construir diferentes tipos de gráfico, a partir de uma tabela de distribuição de frequências, utilizando a planilha eletrônica **LibreOffice Calc**, disponível para *download* em <https://pt-br.libreoffice.org/baixe-ja/libreoffice-novo/> (acesso em: 25 jun. 2024). Acompanhe os seguintes passos.

A Na planilha eletrônica **LibreOffice Calc**, construímos uma tabela de distribuição de frequência.

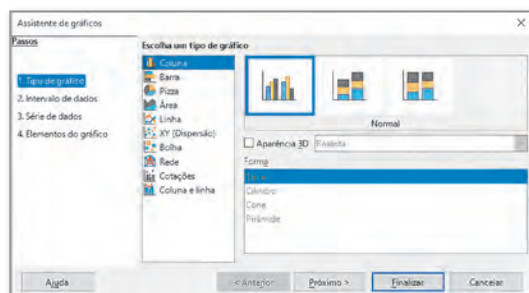
Nascidos vivos no Brasil em 2022, por trimestre				
Trimestre	Frequência absoluta (f)	Frequência acumulada absoluta (fa)	Frequência relativa (fr)	Frequência acumulada relativa (far)
1º	657.532	657.532	25,86%	25,86%
2º	667.308	1.324.840	26,25%	52,11%
3º	612.474	1.937.314	24,09%	76,20%
4º	604.984	2.542.298	23,80%	100,00%
Total	2.542.298		100,00%	

Fonte dos dados: INSTITUTO BRASILEIRO DE GEOGRAFIA E ESTATÍSTICA. **Tabela 2680**: nascidos vivos, ocorridos no ano, por mês do nascimento, sexo, local de nascimento, número de nascidos por parto, idade da mãe na ocasião do parto e lugar do registro. Rio de Janeiro: Sidra, 2022. Disponível em: <https://sidra.ibge.gov.br/tabela/2680#resultado>. Acesso em: 23 jul. 2024.

B Para construir um **gráfico de colunas** que represente a frequência absoluta, selecionamos as células com os trimestres e com a frequência absoluta correspondente e usamos a opção **Inserir gráfico** do *menu*. Ao abrir a caixa de diálogo **Assistente de gráficos**, na opção **1. Tipo de gráfico**, selecionamos as opções **Coluna** e **Normal**. Por fim, clicamos em **Finalizar**.

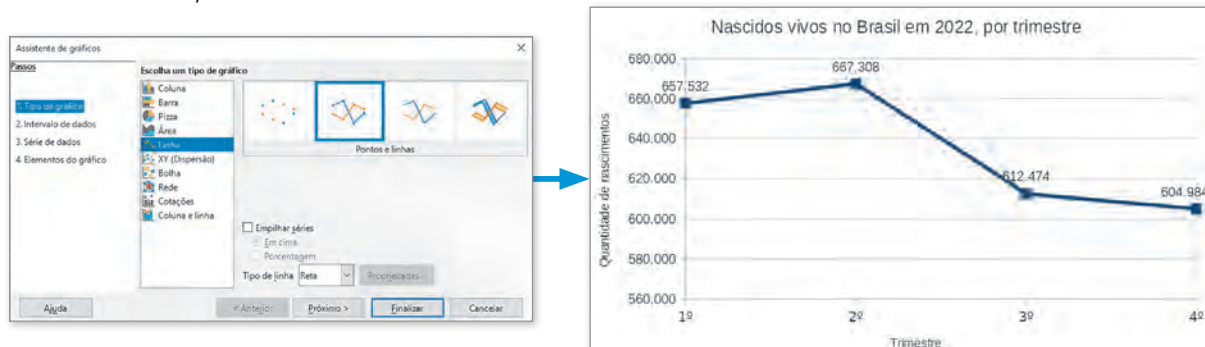
DICA

Para inserir alguns elementos do gráfico, como título, título dos eixos e rótulos, podemos, com o gráfico selecionado, clicar em **Inserir**, no *menu*, e ajustar esses elementos nas opções **Títulos...** e **Rótulos de dados...**



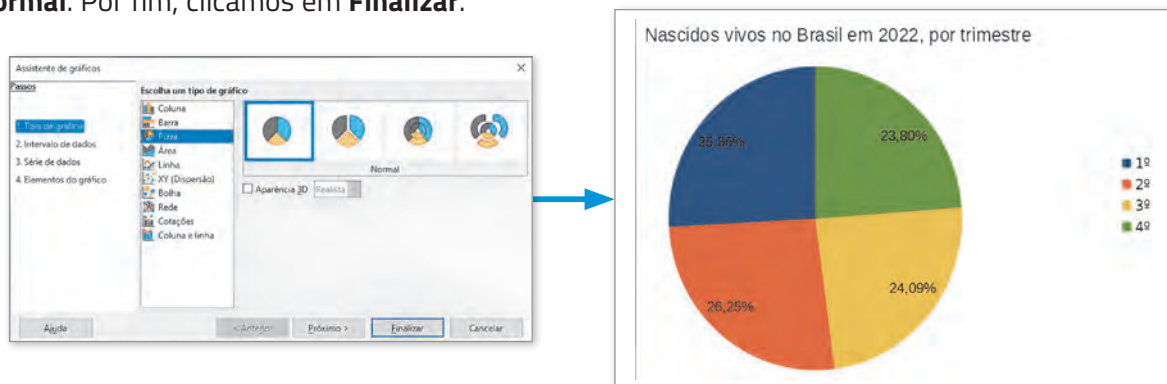
Fonte dos dados: INSTITUTO BRASILEIRO DE GEOGRAFIA E ESTATÍSTICA. **Tabela 2680**: nascidos vivos, ocorridos no ano, por mês do nascimento, sexo, local de nascimento, número de nascidos por parto, idade da mãe na ocasião do parto e lugar do registro. Rio de Janeiro: Sidra, 2022. Disponível em: <https://sidra.ibge.gov.br/tabela/2680#resultado>. Acesso em: 23 jul. 2024.

- C** Ainda utilizando a frequência absoluta, podemos construir um **gráfico de segmentos**. Para isso, fazemos os mesmos procedimentos anteriores, porém, agora, ao abrir a caixa de diálogo **Assistente de gráficos**, na opção **1. Tipo de gráfico**, selecionamos as opções **Linha** e **Pontos e linhas**. Por fim, clicamos em **Finalizar**.



Fonte dos dados: INSTITUTO BRASILEIRO DE GEOGRAFIA E ESTATÍSTICA. **Tabela 2680:** nascidos vivos, ocorridos no ano, por mês do nascimento, sexo, local de nascimento, número de nascidos por parto, idade da mãe na ocasião do parto e lugar do registro. Rio de Janeiro: Sidra, 2022. Disponível em: <https://sidra.ibge.gov.br/tabela/2680#resultado>. Acesso em: 23 jul. 2024.

- D** Para construir um **gráfico de setores**, selecionamos as células com os trimestres e com as frequências relativas correspondentes e usamos a opção **Inserir gráfico** do *menu*. Ao abrir a caixa de diálogo **Assistente de gráficos**, na opção **1. Tipo de gráfico**, selecionamos as opções **Pizza** e **Normal**. Por fim, clicamos em **Finalizar**.



Fonte dos dados: INSTITUTO BRASILEIRO DE GEOGRAFIA E ESTATÍSTICA. **Tabela 2680:** nascidos vivos, ocorridos no ano, por mês do nascimento, sexo, local de nascimento, número de nascidos por parto, idade da mãe na ocasião do parto e lugar do registro. Rio de Janeiro: Sidra, 2022. Disponível em: <https://sidra.ibge.gov.br/tabela/2680#resultado>. Acesso em: 23 jul. 2024.

- 1. Resposta esperada:** Ao suprimir parte do eixo vertical, as colunas do gráfico de colunas não ficaram representadas com as alturas proporcionais entre si e, no gráfico de segmentos, as alturas dos pontos correspondentes à quantidade de nascidos vivos também não ficaram proporcionais entre si.

MÃOS À OBRA

Não escreva no livro.

- No exemplo apresentado, a planilha eletrônica plotou os gráficos de colunas e de segmentos com parte do eixo vertical suprimida. Explique como isso pode induzir um leitor a realizar interpretações incorretas sobre as informações representadas.
- Utilizando a planilha **LibreOffice Calc**, e com base na situação apresentada no exemplo, construa um gráfico de barras para expressar a frequência acumulada absoluta. Depois, responda às questões.
 - O que representa a barra referente ao 3º trimestre do gráfico que você construiu?
 - Como é possível determinar, pelo seu gráfico, a quantidade de nascidos vivos no Brasil no 2º trimestre de 2022? **Resposta esperada:** Calculando a diferença entre os valores correspondentes às barras referentes ao 2º e ao 1º trimestre.
- Retome as atividades **5** e **6** das páginas **255** e **256** e, utilizando a planilha **LibreOffice Calc**, construa dois gráficos de tipos distintos para representar os dados apresentados na tabela e no mapa dessas atividades. Ao final, compare sua produção com as de alguns colegas. **Resposta pessoal.**
 - a) A quantidade de nascidos vivos no Brasil até o 3º trimestre de 2022.

🔍 Gráficos e tabelas: inadequações que podem induzir a erro de interpretação



Você já leu, em algum *site* ou rede social, ou recebeu por mensagem uma notícia aparentemente verdadeira, mas que, posteriormente, descobriu ser falsa? Publicações desse tipo são conhecidas pelo termo inglês ***fake news*** (notícias falsas) e costumam criar polêmica propositalmente em torno de uma situação ou pessoa, espalhar vírus digital ou aplicar golpes.

Para combater as *fake news*, é importante, por exemplo, investigar a fonte ou o autor da notícia e comparar as informações com uma ou mais fontes confiáveis. Conhecer características de diferentes recursos estatísticos, como tabelas e gráficos, também pode auxiliar a analisar se determinada notícia é verdadeira.

STUDIO CANTATH/SHUTTERSTOCK.COM

PARA AMPLIAR

Assista a este vídeo para obter mais informações sobre o combate às *fake news*.

- DOCUMENTÁRIO: iniciativas que buscam combater as *fake news*. [S. l.: s. n.], 2021. 1 vídeo (27 min). Publicado pelo canal Rádio e TV Justiça. Disponível em: <https://www.youtube.com/watch?v=rhevhhUabXA>. Acesso em: 23 jul. 2024.

Analise, por exemplo, os dados a seguir.

População urbana e rural do Brasil

População	Urbana	Rural	Total
Quantidade de habitantes	18 782 891	33 161 506	51 944 397

Note que, no título dessa tabela, **não está indicado o ano** correspondente aos dados da pesquisa. Além disso, **não foi apresentada a fonte** das informações, que indica onde os dados foram obtidos. Isso pode gerar interpretações erradas, como acreditar que os dados são recentes, ou seja, de um ano próximo ao atual.

Agora, observe esses mesmos dados apresentados adequadamente em uma tabela.

População urbana e rural do Brasil, 1950

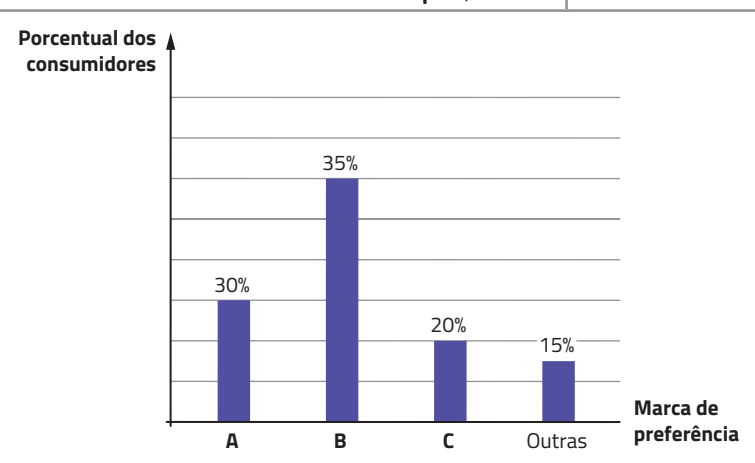
População	Urbana	Rural	Total
Quantidade de habitantes	18 782 891	33 161 506	51 944 397

Fonte dos dados: INSTITUTO BRASILEIRO DE GEOGRAFIA E ESTATÍSTICA. **Censo demográfico**: séries históricas. Rio de Janeiro: IBGE, [2024]. Disponível em: www.ibge.gov.br/estatisticas/sociais/populacao/9662-censo-demografico-2010.html?=&t=series-historicas. Acesso em: 23 jul. 2024.

Com o título e a fonte indicados adequadamente, é possível identificar que os dados foram obtidos no *site* do IBGE e correspondem ao ano de 1950, ou seja, são dados desatualizados e que não refletem o cenário atual sobre o tema.

O gráfico de colunas a seguir indica a participação de diferentes marcas de detergente na preferência dos consumidores. Você consegue identificar algo incorreto nesse gráfico?

Marca de detergente preferida dos consumidores de certo município, 2025



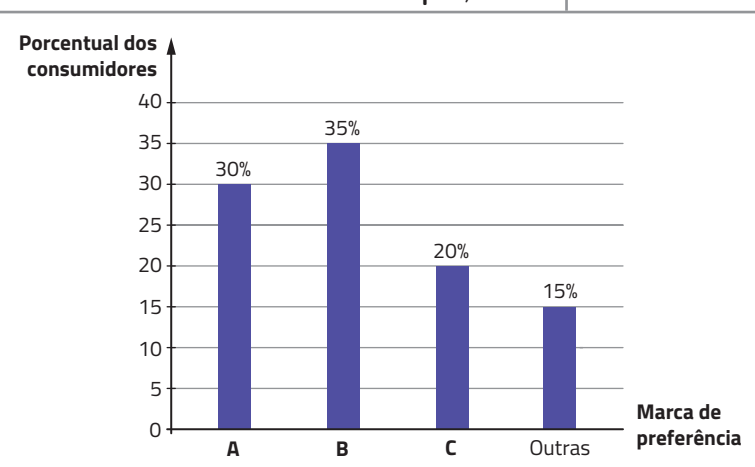
Fonte: Dados fictícios.

Você estudou que os gráficos de colunas ou de barras possibilitam uma análise visual dos dados ao compararem a altura das colunas ou o comprimento das barras, que devem ser proporcionais aos valores representados por elas.

No gráfico anterior, as **alturas das colunas não são proporcionais entre si** e o **eixo vertical não tem a escala indicada**; isso pode induzir leitores a interpretar de maneira errada as informações, como supor uma participação de mercado da marca **B** maior que a participação verdadeira.

Agora, observe esses mesmos dados apresentados adequadamente em um gráfico de colunas.

Marca de detergente preferida dos consumidores de certo município, 2025



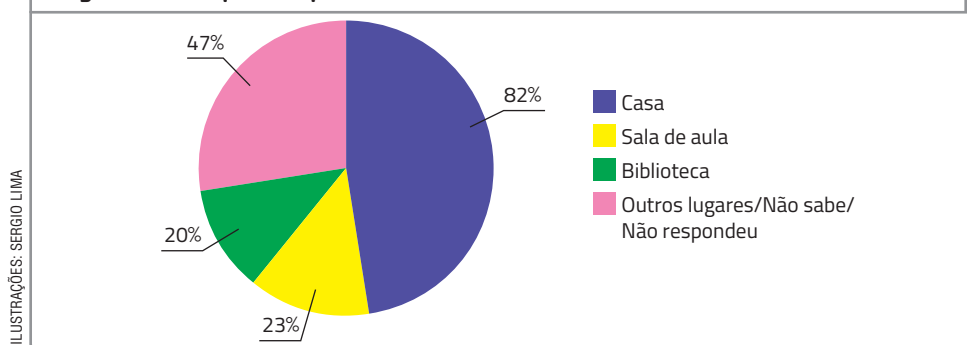
ILUSTRAÇÕES: CBOOK PRODUÇÕES

Fonte: Dados fictícios

Com a indicação da escala no eixo vertical e a representação das colunas com alturas proporcionais entre si, é possível comparar corretamente, de maneira visual, os dados apresentados.

Agora, analise o gráfico de setores a seguir, que apresenta informações sobre a leitura no Brasil.

Lugares em que as pessoas costumavam ler livros no Brasil, 2019

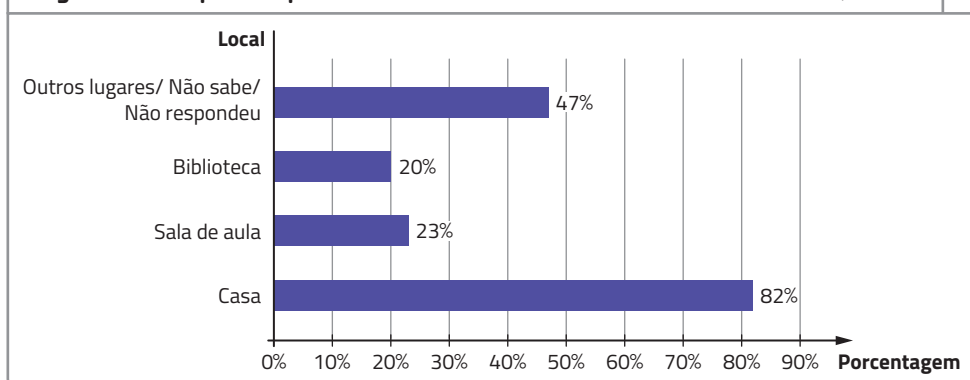


Fonte dos dados:
INSTITUTO PRÓ-LIVRO.
Retratos da leitura no Brasil. 5. ed. São Paulo: IPL: Itaú Cultural, 2020. p. 55. Disponível em: https://www.prolivro.org.br/wp-content/uploads/2020/12/5a_edicao_Retratos_da_Leitura-_IPL_dez2020-compactado.pdf. Acesso em: 23 jul. 2024.

Adicione os percentuais correspondentes a cada setor. Você vai notar que não obtemos 100%, como é esperado nos gráficos de setores. Nesse caso, isso ocorreu porque, na pesquisa, um mesmo entrevistado poderia indicar mais de um lugar em que costumava ler. O setor roxo, por exemplo, indica que 82% dos entrevistados costumavam ler em casa, e, desses, possivelmente alguns também indicaram ler em outros lugares.

Em situações como essa, o gráfico de setores não é o mais indicado para representar os dados, pois prejudica a comparação de cada parte do conjunto de dados com o todo. Uma sugestão, por exemplo, é construir um gráfico de barras, como o apresentado a seguir.

Lugares em que as pessoas costumavam ler livros no Brasil, 2019



Fonte dos dados:
INSTITUTO PRÓ-LIVRO.
Retratos da leitura no Brasil. 5. ed. São Paulo: IPL: Itaú Cultural, 2020. p. 55. Disponível em: https://www.prolivro.org.br/wp-content/uploads/2020/12/5a_edicao_Retratos_da_Leitura-_IPL_dez2020-compactado.pdf. Acesso em: 23 jul. 2024.

NO MUNDO

DO TRABALHO **Jornalista**

O jornalista é um dos responsáveis pelas notícias e reportagens divulgadas em diferentes meios de comunicação. É ele quem coleta, investiga, apura e apresenta informações a ser publicadas. Tendo isso em vista, é importante que esse profissional tenha cuidado em procurar fontes confiáveis e zelo pelos tipos de dado e como eles serão divulgados, incluindo a elaboração adequada de gráficos e tabelas, pois isso pode afetar a vida das pessoas que consomem essas informações.

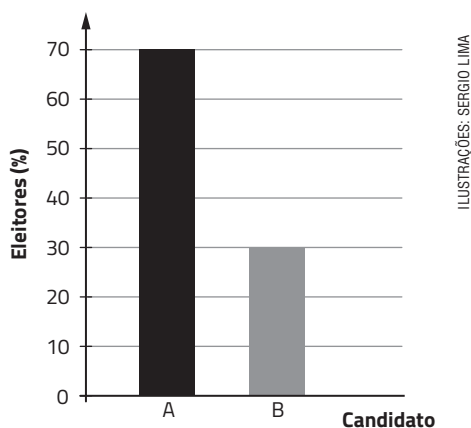
Em geral, a função do jornalista é comunicar uma informação, mas seu trabalho envolve diferentes atividades, e ele pode atuar tanto na redação de jornais ou revistas impressas ou *on-line*, como repórter na televisão, quanto em assessoria de imprensa, em instituições públicas e privadas, escrita de livros e de roteiros de filmes, por exemplo.

Assista a este vídeo para obter mais informações sobre áreas de atuação no jornalismo.

- GUIA de profissões: jornalismo. [S. l.: s. n.], 2017. 1 vídeo (14 min). Publicado pelo canal TV Unesp. Disponível em: https://www.youtube.com/watch?v=teSPNrk_Qh0. Acesso em: 23 jul. 2024.

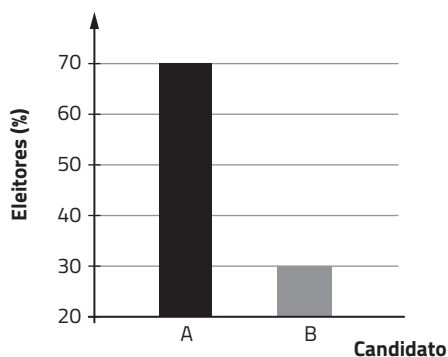
ATIVIDADE RESOLVIDA

R1. (Enem/MEC) O resultado de uma pesquisa eleitoral, sobre a preferência dos eleitores em relação a dois candidatos, foi representado por meio do Gráfico 1.



► Gráfico 1

Ao ser divulgado esse resultado em jornal, o Gráfico 1 foi cortado durante a diagramação, como mostra o Gráfico 2.



► Gráfico 2

Apesar de os valores apresentados estarem corretos e a largura das colunas ser a mesma, muitos leitores criticaram o formato do Gráfico 2 impresso no jornal, alegando que houve prejuízo visual para o candidato B.

A diferença entre as razões da altura da coluna B pela coluna A nos gráficos 1 e 2 é

- a) 0 c) $\frac{1}{5}$ e) $\frac{8}{35}$
 b) $\frac{1}{2}$ d) $\frac{2}{15}$

Resolução

Para resolver esta atividade, podemos realizar as etapas a seguir.

1ª COMPREENDER O ENUNCIADO

Do enunciado, temos as seguintes informações:

- o candidato A teve 70% de preferência, e o candidato B, 30%;
- no gráfico 1, a altura da coluna correspondente ao candidato A foi dividida em 7 partes iguais, e a do candidato B, em 3 partes iguais;
- no gráfico 2, a altura da coluna correspondente ao candidato A foi dividida em 5 partes iguais, e a do candidato B, em 1 parte.

2ª ELABORAR UM PLANO

Podemos expressar a razão da altura da coluna B pela coluna A para cada gráfico e, em seguida, calcular a diferença entre essas razões.

3ª EXECUTAR UM PLANO

Vamos escrever a razão da altura da coluna B pela coluna A para cada gráfico:

- gráfico 1: $\frac{3}{7}$;
- gráfico 2: $\frac{1}{5}$.

Agora, vamos calcular a diferença entre as razões:

$$\frac{3}{7} - \frac{1}{5} = \frac{15 - 7}{35} = \frac{8}{35}$$

4ª VERIFICAR OS RESULTADOS

Podemos utilizar a operação inversa da subtração:

$$\frac{8}{35} + \frac{1}{5} = \frac{8 + 7}{35} = \frac{15}{35} = \frac{3}{7}$$

Portanto, a alternativa e é a correta.

29. a) Respostas esperadas: O ano correspondente aos dados da pesquisa. Crianças e adolescentes, por atividades realizadas na internet e faixa etária, 2022.
29. c) Resposta esperada: Não, pois as barras correspondentes à atividade “Usou redes sociais” não estão com os comprimentos proporcionais aos valores representados por elas.

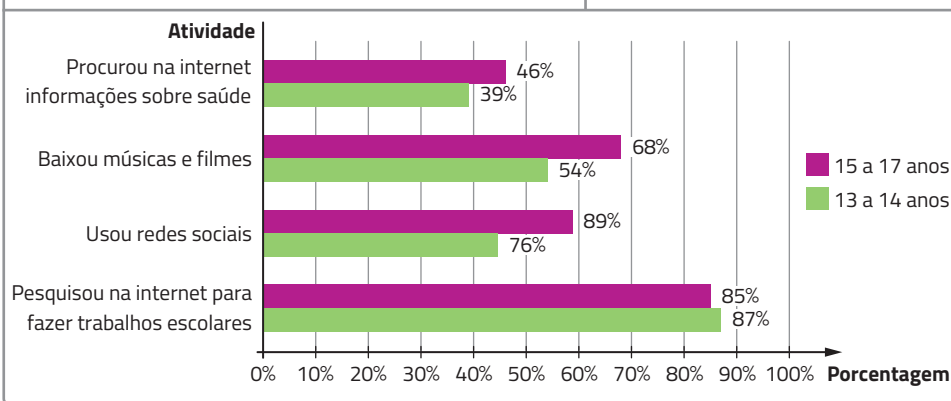
29. b) Pesquisou na internet para fazer trabalhos escolares. Resposta esperada: Comparar os comprimentos das barras de cada atividade e identificar a atividade em que a barra correspondente à faixa etária de 13 a 14 anos é mais comprida que a de 15 a 17 anos.

ATIVIDADES

Não escreva no livro.

29. No gráfico apresentado, os valores indicados estão corretos e referem-se a uma pesquisa de 2022. Porém alguns erros foram cometidos, prejudicando a leitura e a interpretação das informações.

Crianças e adolescentes, por atividades realizadas na internet e faixa etária



Fonte dos dados: CENTRO REGIONAL DE ESTUDOS PARA O DESENVOLVIMENTO DA SOCIEDADE DA INFORMAÇÃO. **TIC Kids Online Brasil 2022**: pesquisa sobre o uso da internet por crianças e adolescentes no Brasil. São Paulo: Cetic.br, 2023. p. 68. Disponível em: https://cetic.br/media/docs/publicacoes/1/20230825142135/tic_kids_online_2022_livro_eletronico.pdf. Acesso em: 23 jul. 2024.

- No título desse gráfico, qual informação deveria ser indicada, mas não foi? Reescreva esse título indicando essa informação.
- Em qual atividade realizada o percentual de crianças e adolescentes na faixa etária de 13 a 14 anos é maior que a de 15 a 17 anos? Explique o que você observou para responder a esta questão.
- Os comprimentos das barras e os valores representados por elas estão proporcionais entre si? Justifique sua resposta.
- Imagine que esse gráfico foi divulgado em um jornal. A que conclusões erradas o leitor pode chegar ao analisar apenas as barras do gráfico? O que isso pode implicar?

30. As informações no quadro ao lado direito da página foram pesquisadas por estudantes para realizar um trabalho sobre a população quilombola. Para apresentar esse trabalho, foram utilizados a tabela e o gráfico representados a seguir.

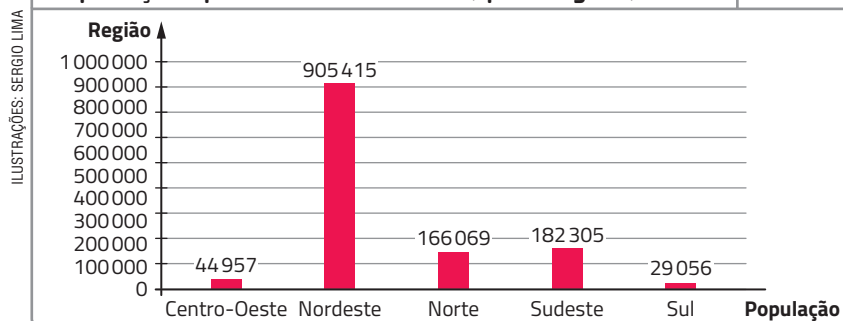
População quilombola no Brasil, por região, 2022

Região	Centro-Oeste	Nordeste	Norte	Sudeste	Sul
População	44 957	166 069	905 415	182 305	29 056

População quilombola no Brasil, por região, 2022

- Centro-Oeste: 44 957;
- Nordeste: 905 415;
- Norte: 166 069;
- Sudeste: 182 305;
- Sul: 29 056.

População quilombola no Brasil, por região, 2023



Fonte dos dados: BRASIL. Serviços e Informações do Brasil. **População quilombola é de 1,3 milhão, indica recorte inédito do censo**. Brasília, DF: SIB, 27 jul. 2023. Disponível em: <https://www.gov.br/pt-br/noticias/assistencia-social/2023/07/populacao-quilombola-e-de-1-3-milhao-indica-recorte-inedito-do-censo>. Acesso em: 23 jul. 2024.

Analise os dados apresentados para identificar os erros cometidos na construção da tabela e do gráfico. Em seguida, represente esses recursos corrigidos. **Resposta nas Orientações para o professor.**

29. d) Resposta esperada: O leitor pode acreditar, de maneira incorreta, que um percentual menor de crianças e adolescentes usou redes sociais em relação ao que realmente foi identificado na pesquisa. Isso, de alguma maneira, pode interferir em tomada de decisões ou ajudar a propagar notícias falsas.

31. Resposta esperada: Não, pois não está indicado o título do pictograma e, como cada figura de garrafa PET representa 500 garrafas PET, as quantidades arrecadadas correspondentes às escolas **B** e **C** foram indicadas incorretamente: a escola **B** deveria ter 16 figuras de garrafas PET (e está com 15), e a escola **C**, 9 garrafas (e está com 10).

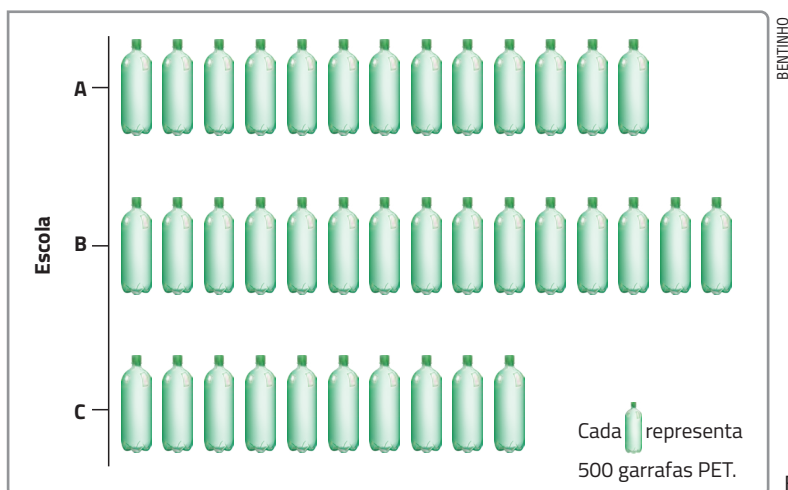
31. A tabela apresenta informações sobre uma campanha de arrecadação de garrafas PET realizada por três escolas de certo município.

Para apresentar esses resultados, os organizadores da campanha elaboraram o pictograma a seguir. Essas informações foram representadas corretamente no pictograma? Justifique sua resposta.

Arrecadação de garrafas PET, março de 2025

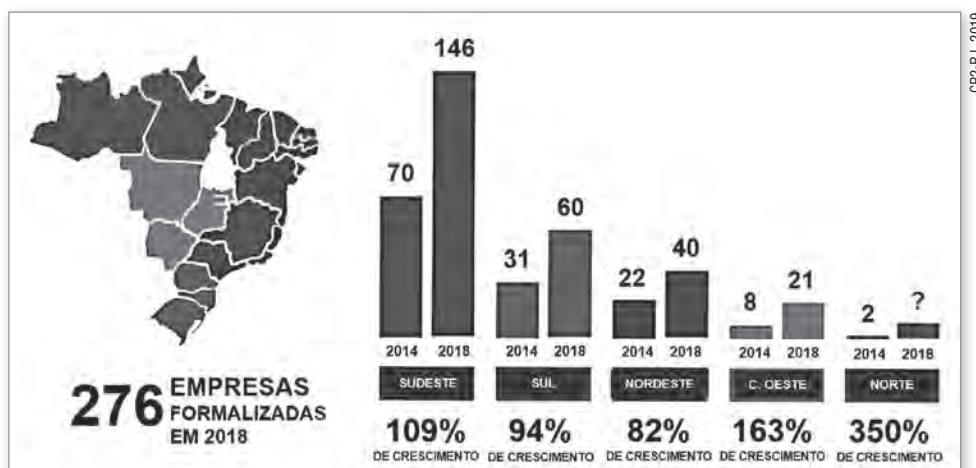
Escola	Quantidade de garrafas
A	6 500
B	8 000
C	4 500

Fonte: Dados fictícios.



Fonte: Dados fictícios.

32. (CP2-RJ) O número de empresas de jogos no Brasil vem crescendo e mais que dobrou nos últimos quatro anos. O gráfico a seguir compara a quantidade de desenvolvedoras de jogos formalizadas, por região, em 2014 e 2018.



Disponível em: <https://canaltech.com.br>. Acesso em: 22 jul. 2019 (adaptado).

Suponha que a quantidade de desenvolvedoras de jogos formalizadas na Região Norte em 2018 não tenha aparecido no gráfico por erro de diagramação.

Essa quantidade é igual a **alternativa c**

a) 7.

b) 8.

c) 9.

d) 10.

33. Com um colega, pesquisem tabelas ou gráficos divulgados em jornais, revistas ou *sites* que apresentem inadequações que possam induzir os leitores a erros de interpretação. Depois, expliquem o que pode ser feito para corrigir essas inadequações. **Resposta pessoal.**

34. a) Resposta esperada: Para construir o gráfico de segmentos, foram utilizadas as frequências absolutas e, para construir o gráfico de setores, as frequências relativas.

34. Leia as informações a seguir.

34. b) Resposta esperada: Não, pois esse tipo de gráfico costuma ser utilizado para representar o comportamento de certa variável no decorrer de determinado intervalo de tempo, o que não é o caso.

A cesta básica é o conjunto de produtos considerados essenciais para uma família durante um mês. Esses produtos e as respectivas quantidades mensais podem ser diferentes, dependendo do local.

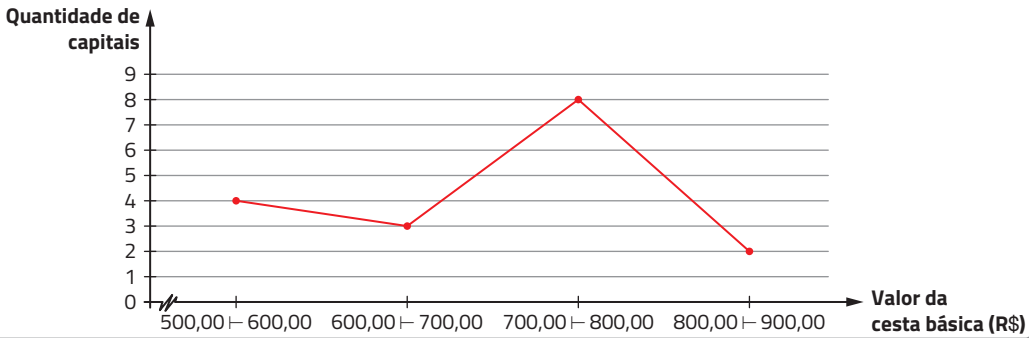
Valor da cesta básica em algumas capitais brasileiras, fevereiro de 2024

Valor da cesta básica (R\$)	Frequência absoluta (f)	Frequência acumulada absoluta (fa)	Frequência relativa (fr)	Frequência acumulada relativa (far)
500–600	4	4	23%	23%
600–700	3	7	18%	41%
700–800	8	15	47%	88%
800–900	2	17	12%	100%
Total	17		100%	

Fonte dos dados: DEPARTAMENTO INTERSINDICAL DE ESTATÍSTICA E ESTUDOS SOCIOECONÔMICOS. **Custo da cesta aumenta em 14 capitais.** São Paulo: Dieese, 7 mar. 2024. Disponível em: <https://www.dieese.org.br/analisecestabasica/2024/202402cestabasica.pdf>. Acesso em: 23 jul. 2024.

Com base nessa tabela, foram elaborados os gráficos a seguir contendo inadequações que prejudicam a interpretação dos dados. Analise.

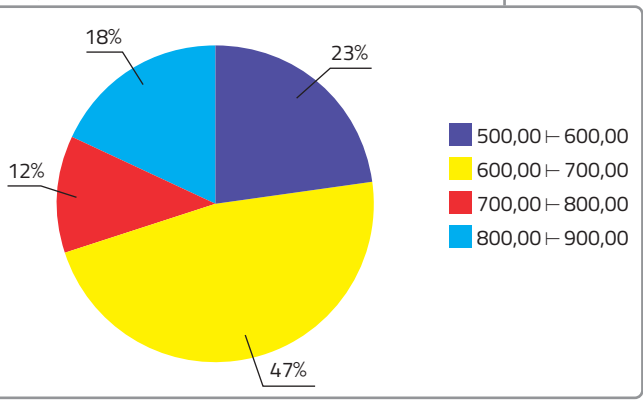
Valor da cesta básica em algumas capitais brasileiras, fevereiro de 2024



ILUSTRAÇÕES: SÉRGIO LIMA

- Que dados da tabela foram utilizados para elaborar cada gráfico?
- Você considera o gráfico de segmentos mais adequado para representar esses dados? Justifique sua resposta.
- Escolha outro tipo de gráfico que você considera ser o mais adequado para representar esses dados e justifique a escolha.
- Identifique, em cada gráfico elaborado, as inadequações que prejudicam a interpretação dos dados e explique o que pode ser feito para corrigi-las.

Valor da cesta básica em algumas capitais brasileiras, fevereiro 2024



34. c) Respostas nas **Orientações para o professor.**

Fonte dos dados: DEPARTAMENTO INTERSINDICAL DE ESTATÍSTICA E ESTUDOS SOCIOECONÔMICOS. **Custo da cesta aumenta em 14 capitais.** São Paulo: Dieese, 7 mar. 2024. Disponível em: <https://www.dieese.org.br/analisecestabasica/2024/202402cestabasica.pdf>. Acesso em: 23 jul. 2024.

Resposta esperada: Histograma, pois esse tipo de gráfico permite representar dados agrupados em intervalos de classe e comparar visualmente esses dados.

O QUE ESTUDEI

Não escreva no livro.

1. Leia com atenção cada frase a seguir e faça uma reflexão sobre seu comportamento durante o estudo desta Unidade. Depois, responda se você: **concorda**, **concorda parcialmente** ou **não concorda** com cada uma das afirmações. *Respostas pessoais.*

a) Ouvi com atenção as explicações do professor.	d) Participei das discussões propostas à turma.	g) Respeitei os colegas nas atividades em grupo.
b) Quando precisei, pedi ajuda ao professor.	e) Fiz as atividades propostas na sala de aula.	h) Auxiliei os colegas quando eles tiveram dúvidas.
c) Auxiliei o professor quando ele me pediu.	f) Fiz as atividades escolares propostas para casa.	i) Levei para a sala de aula os materiais necessários.
2. Nas fichas a seguir, estão indicados os principais conteúdos que estudamos nesta Unidade. Reflita sobre cada um deles e verifique se você precisa retomar algum para melhor compreendê-lo. *Resposta pessoal.*

Tabela simples e tabela de dupla entrada

Gráfico de setores

Intervalo de classes

Gráfico de colunas e gráfico de barras

Diagrama de caixas ou *box-plot*

Histograma

Gráfico de segmentos

Diagrama de ramos e folhas

Pictograma

Distribuição de frequência

Inadequações em gráficos e tabelas

3. Agora, para retomar de maneira colaborativa o estudo de um conteúdo desta Unidade, junte-se a dois colegas, e sigam as etapas. *Respostas pessoais.*

1 SELECIONAR

Consultem os conteúdos indicados na atividade anterior e escolham um deles. Deem preferência a um conteúdo em que foi constatada necessidade de retomada de estudo.

2 REVISAR

Juntos, façam uma revisão do estudo desse conteúdo. É importante a participação de todos os integrantes nessa revisão.

4 APRESENTAR

Na apresentação, é importante usar uma linguagem adequada, simples e objetiva. É necessário oportunizar um momento para que cada integrante do grupo possa contribuir com as explicações. Ao final, vocês podem disponibilizar os materiais produzidos aos demais colegas da turma.

3 PREPARAR

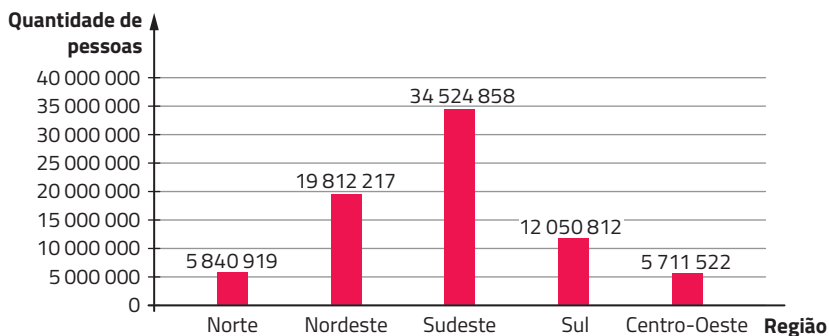
Elaborem uma apresentação sobre esse conteúdo, o que pode ser realizado por meio de *slides*, cartazes, vídeo, entre outros recursos. Na apresentação, podem ser incluídos exemplos e atividades resolvidas. Também podem ser propostas atividades para que os demais colegas da turma resolvam.

4. d) Resposta esperada: Pode-se, inicialmente, calcular o percentual da estimativa de pessoas a ser vacinadas contra a *influenza* correspondente a cada região em relação ao total do país. Em seguida, determinar, de maneira proporcional, a medida do ângulo central de cada setor do gráfico correspondente às regiões. Por fim, colorir os setores do gráfico, elaborar a legenda e indicar o título e a fonte desse gráfico.

4. Na abertura desta Unidade, foram apresentadas algumas informações sobre vacinação. Analise, a seguir, mais informações sobre esse assunto.

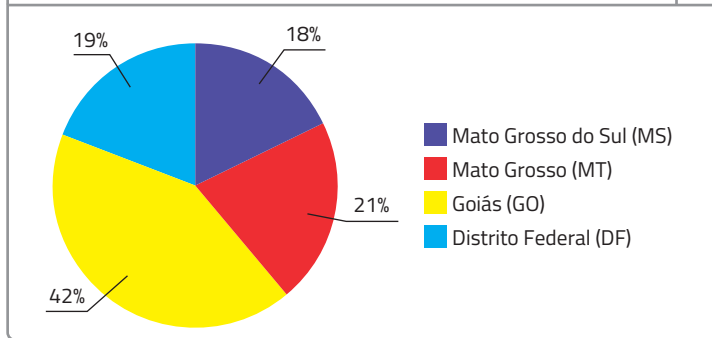
4. b) Mato Grosso do Sul: 1 028 074 pessoas;
Mato Grosso: 1 199 420 pessoas;
Goiás: 2 398 839 pessoas;
Distrito Federal: 1 085 189 pessoas

Estimativa de pessoas a ser vacinadas contra a *influenza* no Brasil, 2022



Fonte dos dados: BRASIL. Ministério da Saúde. **Informe técnico: 24ª** campanha nacional de vacinação contra a *influenza*. Brasília, DF: MS, mar. 2022. p. 18. Disponível em: www.gov.br/saude/pt-br/assuntos/saude-de-a-a-z/c/calendario-nacional-de-vacinacao/arquivos/informe-da-24a-campanha-nacional-de-vacinacao-contra-a-influenza.pdf. Acesso em: 23 jul. 2024.

Distribuição da estimativa de pessoas a ser vacinadas contra a *influenza* na Região Centro-Oeste, por Unidade da Federação, 2022



Fonte dos dados: BRASIL. Ministério da Saúde. **Informe técnico: 24ª** campanha nacional de vacinação contra a *influenza*. Brasília, DF: MS, mar. 2022. p. 18. Disponível em: www.gov.br/saude/pt-br/assuntos/saude-de-a-a-z/c/calendario-nacional-de-vacinacao/arquivos/informe-da-24a-campanha-nacional-de-vacinacao-contra-a-influenza.pdf. Acesso em: 23 jul. 2024.

ILUSTRAÇÕES: SÉRGIO LIMA

Com base nessas informações, resolva as questões a seguir.

- No total, quantas pessoas se estimava vacinar contra *influenza* no Brasil, em 2022? Arredonde o resultado para a unidade de milhão mais próxima. **78 milhões de pessoas**
- Determine a quantidade aproximada de pessoas que se estimava vacinar contra *influenza* em 2022 em cada unidade da Federação da Região Centro-Oeste.
- Organize as informações do item anterior em uma tabela. **Resposta nas Orientações para o professor.**
- Explique como pode ser construído um gráfico de setores para representar os dados do gráfico de colunas apresentado.
- Em certa semana de 2022, foi realizada uma pesquisa em que se determinou a quantidade de pessoas que receberam uma dose da vacina contra a *influenza* em uma unidade básica de saúde, conforme indicado na tabela a seguir.

Dia da semana	dom.	seg.	ter.	qua.	qui.	sex.	sáb.
Quantidade de doses de vacina	32	200	246	82	120	98	25

Resposta esperada: Quantidade de pessoas que receberam uma dose da vacina contra a *influenza* em uma unidade básica de saúde, em determinada

Fonte: Dados fictícios.

- Escreva um título para essa tabela. **semana de 2022.**
- Que tipos de gráfico você considera mais adequados para representar a quantidade de doses da vacina contra a *influenza* aplicadas em cada dia da semana? Por quê? **Uma resposta possível: Gráfico de barras ou de colunas, pois esses tipos de gráfico permitem comparar visualmente a quantidade de pessoas que receberam a vacina em cada dia dessa semana; ou gráfico de segmentos, pois esse tipo de gráfico permite avaliar a variação da quantidade diária de pessoas que receberam a vacina nessa semana.**

PRATICANDO: ENEM E VESTIBULARES

Não escreva no livro.

1. (UFGD-MS) O Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística (IBGE) realiza levantamentos estatísticos que confrontam as produções agrícolas. A tabela a seguir apresenta o volume da produção de cereais, leguminosas e oleaginosas no Brasil e Grandes Regiões.

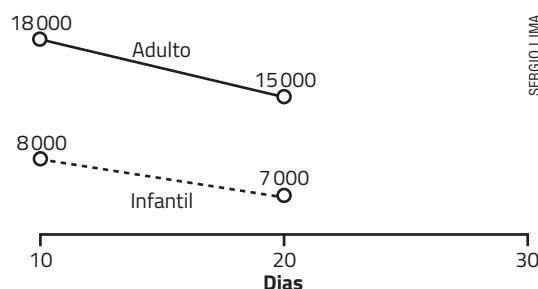
Produção e Variação Anual – Brasil e Grandes Regiões

Grande Região	Produção 2016 (t)	Produção 2017 (t)	Variação (%)
Brasil	184 697 696	240 851 510	30,4
Centro-Oeste	75 120 359	105 051 936	39,8
Sul	73 392 808	85 679 539	16,7
Sudeste	19 649 723	23 494 479	19,6
Nordeste	9 497 437	17 944 178	88,9
Norte	7 037 367	8 681 376	23,4

Fonte: Indicadores da Produção Agrícola, IBGE. Disponível em: ftp.ibge.gov.br/Producao_Agricola/Fasciculo_Indicadores_IBGE/estProdAgr_201708.pdf. Acesso em: 15 set. 2017.

Na avaliação de 2017, esse levantamento também indicou que o estado de Mato Grosso do Sul teve uma participação de 7,9% na produção nacional de grãos. Com base nos dados apresentados, qual é o percentual aproximado de Mato Grosso do Sul na participação da produção 2017 da região Centro-Oeste? **alternativa c**

- a) 8%.
b) 12%.
c) 18%.
d) 39%.
e) 44%.
2. (Enem/MEC) Uma loja de roupas fixou uma meta de vendas de 77 000 reais para um determinado mês de 30 dias. O gráfico mostra o volume de vendas dessa loja, em real, nos dez primeiros dias do mês e entre o dia dez e o dia vinte desse mês, nos seus dois únicos setores (infantil e adulto). Suponha que a variação no volume de vendas, para o período registrado, tenha se dado de forma linear, como mostrado no gráfico, e que essa tendência se mantenha a mesma para os próximos dez dias.



SERGIO LIMA

Ao final do trigésimo dia, quanto faltará no volume de vendas, em real, para que a meta fixada para o mês seja alcançada? **alternativa c**

- a) 5 000
b) 7 000
c) 11 000
d) 18 000
e) 29 000
3. (UEMA) A cada cinco brasileiros, um está obeso. Mais da metade da população está acima do peso. O IMC é o índice internacional mais usado para definir se uma pessoa está abaixo, no peso ideal ou acima dele. O cálculo do IMC é feito dividindo o peso, em kilogramas, pela altura (dada em metros) ao quadrado. Quanto maior o IMC, maior o grau de obesidade e maior o risco de doenças como diabetes, AVC, infarto, pressão alta, trombose, entre outras.

Quadro de IMC

IMC	Situação
Entre 18,5 e 24,9	Peso normal
Entre 25,0 e 29,9	Sobrepeso
Entre 30,0 e 34,9	Obesidade grau I
Entre 35,0 e 39,9	Obesidade grau II
Acima de 40,0	Obesidade graus III e IV

Fonte: Adaptado BBC e Hospital Sirio Libanês.

Uma pessoa com 67 kg e 1,60 metro de altura apresenta, de acordo com o quadro, a situação de **alternativa c**

- a) Obesidade grau II.
b) Obesidade grau III e IV.
c) Sobrepeso.
d) Obesidade grau I.
e) Peso normal.

RESPOSTAS DAS ATIVIDADES

Unidade 1 • Conjuntos

Atividades

1. $A = \{c, h, i, k\}$, $B = \{b, c, e, f, g, j, k\}$ e $C = \{a, c, d, e, f, h\}$
2. a) $A = \{2, 4, 6\}$, $B = \{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$ e $C = \{1, 4, 9, 16, 25\}$
b) Sim, A é subconjunto de B .
3. Respostas possíveis: \emptyset , $\{3, 6, 9\}$, $\{3, 6\}$, $\{3, 9\}$, $\{6, 9\}$, $\{3\}$, $\{6\}$, $\{9\}$.
4. a) \subset
b) $\not\subset$
c) $\not\subset$
d) \subset
e) \subset
f) $\not\subset$
5. Resposta possível: $\emptyset \subset A$; $B \not\subset A$.
6. b) $I \subset V$.
c) $A, V \in R$
7. a) 3 funcionários; 2 funcionários
b) Não.
c) Keila
d) Resposta possível: Selecionar apenas funcionários com idade inferior a 30 anos.
9. a) $\{-4, -2, 0, 2, 4, 5, 7, 9\}$
b) $\{-2\}$
c) \emptyset
d) $\{-2, 0, 2, 4, 5, 7, 9\}$
e) $\{1, 3\}$
f) $\{-4\}$
g) $\{0, 2, 4\}$
h) $\{-4, -2, 1, 3\}$
10. Alternativa b; a: $C - (A \cup B)$; c: $(A \cup B)$; d: C .
11. a) F
b) V
c) V
d) F
e) V
f) F
12. a) Não é possível resolver o problema.
b) Para resolver o problema, é necessário conhecer, além dos dados apresentados, a quantidade de elementos do conjunto B .
13. a) 5 regiões.
b) 27 unidades da Federação.
d) Conjunto formado pelas unidades da Federação localizadas nas regiões do Brasil em que os estudantes não moram.
15. 59 pessoas
16. 380 sócios
17. b) 313 estudantes
c) • 213 estudantes
• 182 estudantes
• 115 estudantes
d) 280 estudantes
e) 100 vacinas Dupla Adulto (dT); 131 vacinas HPV
18. 39 pessoas
20. a) \notin
b) \notin
c) \in
d) \in
e) \in
f) \notin
g) \in
h) \in
21. a) $A = \{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$
b) $B = \{-1, 0, 1, 2, 3\}$
c) $A \cup B = \{-1, 0, 1, 2, 3, 4, 6, 12\}$
d) $A \cap B = \{1, 2, 3\}$
22. a) $0,\overline{7}$
b) 5,2
c) $0,9\overline{2}$
d) 0,068
23. a) $\frac{13}{20}$
b) $\frac{1003}{125}$
c) $\frac{25}{9}$
d) $\frac{178}{45}$
26. a) $\frac{1}{3} + \frac{1}{2} = \frac{5}{6}$
b) $\frac{1}{2} + \frac{1}{15} = \frac{17}{30}$
c) $\frac{1}{10} + \frac{1}{3} = \frac{13}{30}$
27. alternativa c
28. a) Algumas respostas possíveis: 1; 3; 5; 7; 9; 11.
b) II
c) $B = \{x \mid x = 2n, \text{ com } n \in \mathbb{N}\}$
d) Nenhum elemento.
29. $1^2 = 1$; $2^2 = 4$; $3^2 = 9$; $4^2 = 16$; $5^2 = 25$; $6^2 = 36$; $7^2 = 49$; $8^2 = 64$; $9^2 = 81$; $10^2 = 100$; $11^2 = 121$; $12^2 = 144$
b) número par: 342^2 e 2778^2 ; número ímpar: 1655^2 e 81^2
30. a) obesidade
b) 19,1 kg
c) Sim.
31. a) Amazonas: 13,9; Ceará: 11,6; Goiás: 11,4; Santa Catarina: 9,3; Rio de Janeiro: 12,6
b) Sim.
32. a) veículo 1: 8,97 km/L; veículo 2: 7,5 km/L; veículo 3: 8,5 km/L; veículo 4: 6,97 km/L; veículo 5: 9,3 km/L
b) veículo 4
33. a) Ensino Fundamental – Anos iniciais
b) Ensino Fundamental – Anos Iniciais: 5,684; Ensino Fundamental – Anos Finais: 5,232; Ensino Médio: 3,69

34. **a)** valores aproximados: Norte: 4,51 hab./km²; Nordeste: 35,21 hab./km²; Sudeste: 91,76 hab./km²; Sul: 51,91 hab./km²; Centro-Oeste: 10,14 hab./km²
35. números racionais: **b, c e e**; números irracionais: **a, d e f**
38. **a)** $\sqrt{24} \approx 12,5$
 $\sqrt{24} \approx 7$
 $\sqrt{24} \approx 5,5$
 $\sqrt{24} \approx 5$
b) $\sqrt{24} \approx 4,898979$
39. **a)** racional: $\sqrt{1}, \sqrt{4}, \sqrt{9}$ e $\sqrt{16}$; irracional: $\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{5}, \sqrt{6}, \sqrt{7}, \sqrt{8}, \sqrt{10}, \sqrt{11}, \sqrt{12}, \sqrt{13}, \sqrt{14}, \sqrt{15}$ e $\sqrt{17}$
41. **a)** $]-\infty, -7[$ ou $\{x \in \mathbb{R} \mid x < -7\}$
b) $[-3, \sqrt{45}]$ ou $\{x \in \mathbb{R} \mid -3 \leq x \leq \sqrt{45}\}$
c) $]\frac{2}{3}, +\infty[$ ou $\{x \in \mathbb{R} \mid x > \frac{2}{3}\}$
d) $]-\pi, 0]$ ou $\{x \in \mathbb{R} \mid -\pi < x \leq 0\}$
42. **a)** $A \cup B =]-20, 25[$; $A \cap B =]-10, 15[$
b) $A \cup B = \mathbb{R}$; $A \cap B =]5, 10]$
c) $A \cup B =]-\infty, 100[$; $A \cap B =]-35, 0]$
d) $A \cup B = \mathbb{R}$; $A \cap B =]-150, 300[$
43. **a)** -30
b) 28
c) 12
d) 5
e) -3
f) 16
44. $-4,78 < -\sqrt[3]{35} < -\frac{11}{5} < -0,25 < \frac{\pi}{3} < \frac{7}{3} < 5,241 < 3\sqrt{5} < 2\sqrt{19}$
45. alternativa **b**
47. **a)** Respostas possíveis: -19 ou 5.
48. **a)** entre dois números racionais

Praticando: Enem e vestibulares

1. alternativa **b**
2. alternativa **b**
3. alternativa **d**
4. alternativa **e**
5. alternativa **c**
6. alternativa **e**
7. alternativa **e**
8. alternativa **b**
9. alternativa **b**
10. alternativa **c**
11. alternativa **e**
12. alternativa **a**
13. alternativa **e**
14. alternativa **e**
15. 56 funcionários
16. alternativa **b**

Unidade 2 • Relações entre grandezas e noção de função

Atividades

1. **a)** massa; 8 500
b) comprimento; 90 000
c) tempo; 3
d) comprimento; 0,07
e) massa; 1,65
f) tempo; 252
2. **a)** 4 096 GB
b) 0,5 kB
c) 3 MB
d) 524 288 kB
3. 147 arquivos de fotografia
4. **A:** 2,4 g/cm³; **B:** aproximadamente 0,35 cm³; **C:** 42 g
5. **a)** comprimento: diâmetro e distância média do Sol; tempo: período orbital e período de rotação; temperatura: temperatura de superfície
b) • 67 920 hm
• 679 200 000 cm
• 6792 000 m
c) 150 °C
d) 24h37min12s
6. **a)** rotação e translação
b) grandeza: velocidade; unidade de medida: quilometro por hora (km/h)
7. 2,7 g/cm³
8. **a)** de 0,00001 mm ou 10⁻⁵ mm até 0,0003 mm ou 3 · 10⁻⁴ mm
b) 120 nm
c) de 0,0000001 m (10⁻⁷ m) até 0,0000045 m (4,5 · 10⁻⁶ m)
9. 44 s
10. alternativas **b, c ou d**
12. **a)** 1 176 Mb; 147 MB
b) 29,4 s
13. **b)** 131 072 páginas de papel
c) 512 Mbps
14. 450 000 000 L
16. **a)** R\$ 1.123,20
b) 15 m e 30 m
17. **a)** • $p = 4x$ • $a = x^2$
b) perímetro: 20 cm; área: 25 cm²
c) • $x = 14$ • $x = 12$
18. $p = 0,063m$
19. **a)** Sim. Algumas respostas possíveis: $c = \frac{120t}{100}$; $c = \frac{12t}{10}$,
 $c = \frac{6t}{5}$.
b) 9,6 kWh
c) 6 h no máximo
20. alternativa **b**
21. tipo **A:** $c = 1 800 + 600t$; tipo **B:** $c = 1 500 + 200t$
22. **a)** • $s = \frac{3}{80}g$, em que s e g são as quantidades de sapos e de gafanhotos, respectivamente.
• $g = \frac{4}{25}c$, em que g e c são as quantidades de gafanhotos e de plantas de capim, respectivamente.

- b) 21 sapos
c) 6250 plantas de capim
23. alternativa **b**
24. $v = 2a + 25$
25. a) R\$ 1.160,00
b) $V = 150d + 110$
c) 5 dias
26. a) 216 mL
b) $q = 18t$
c) $q = 1080$
d) 4 h
28. alternativas **a e d**
29. $D(f) = \{-3, -2, 0, 1\}$; $CD(f) = \{-5, -3, 0, 1, 3, 5\}$;
 $Im(f) = \{-5, -3, 1, 3\}$
30. a) 14
b) 5
c) 35
d) 20
31. alternativas **b e c**
33. a) • isento • R\$ 29,10 • R\$ 109,60
b) • $f(r) = 0,15r - 370,40$
• $f(r) = 0,225r - 651,73$
• $f(r) = 0,275r - 884,96$
c) $f(r) = \begin{cases} 0, & \text{se } r \leq 2112,00 \\ 0,075r - 158,40, & \text{se } 2112,01 \leq r \leq 2826,65 \\ 0,15r - 370,40, & \text{se } 2826,66 \leq r \leq 3751,05 \\ 0,225r - 651,73, & \text{se } 3751,06 \leq r \leq 4664,68 \\ 0,275r - 884,96, & \text{se } r > 4664,68 \end{cases}$
d) $f(5000) = 490,04$
34. a) $D(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 3\}$
b) $D(f) = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x > -\frac{1}{3}\right\}$
c) $D(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq -9 \text{ e } x \neq 9\}$
d) $D(f) = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x > -\frac{1}{6}\right\}$
e) $D(f) = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \geq \frac{5}{3} \text{ e } x \neq 20\right\}$
f) $D(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 0\}$
g) $D(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid x < -4 \text{ ou } x \geq 3\}$
35. alternativa **d**
36. a) 40 cm^2
b) $A(h) = \frac{20 \cdot h}{2}$ ou $A(h) = 10h$
c) $D(A) = \{h \in \mathbb{R} \mid 0 < h \leq 10\}$
37. b) $f(x) = 24x - x^2$
c) $D(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x < 24\}$
d) dimensões: 8 m e 16 m; área: 128 m^2
38. $D(V) = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x \leq 100\}$
39. a) 4 quadrados vermelhos e 12 verdes
c) 133 quadrados vermelhos e 399 verdes
d) Figura 300. Essa figura é formada por 300 quadrados vermelhos.
e) Não
f) $f(n) = 3n$; $D(f) = \{n \in \mathbb{N} \mid n > 0\}$
g) $g(x) = \frac{x}{3}$; $D(g) = \{x \in \mathbb{N} \mid x \text{ é múltiplo positivo de } 3 \text{ e } x > 0\}$
42. alternativas **a e c**

43. a) $D(f) =]-4, 5]$; $Im(f) = [-1, 2]$
b) $D(g) = [-1, 1]$; $Im(g) = [2, 4]$
c) $D(h) =]-2, 2[$; $Im(h) = [1, 5]$
44. a) $D(f) = [-4, 4]$
b) $Im(f) = [-4, 1]$
c) $[-4, 0]$ e $[3, 4]$
d) $[0, 1]$
e) $[1, 3]$
45. b) III
c) • R\$ 26,90 • R\$ 145,40 • R\$ 101,90
d) $14,62 \text{ m}^3$
46. alternativa **b**
47. a) 500 km
b) $D(c) = [0, 500]$; $Im(c) = [0, 50]$
51. alternativa **c**
52. a) $f(-6) = 1$; $f(1) = 1$; $f(-2) = -2$
b) -4, -1 e 3
c) • $-8 \leq x < -4$ ou $-1 < x < 3$
• $-4 < x < -1$ ou $3 < x < 5$
• $x = -4$ ou $x = -1$ ou $x = 3$
53. a) vermelha; azul
b) função f positiva para $-4 < x < 4$, negativa para $x < -4$ ou $x > 4$ e nula para $x = -4$ ou $x = 4$;
função g positiva para $x < 10$, negativa para $x > 10$ e nula para $x = 10$
c) • $x \in]-\infty, -2[$ ou $x \in]3, +\infty[$
• $x \in]-2, 3[$

Praticando: Enem e vestibulares

- alternativa **c**
- alternativa **c**
- alternativa **b**
- alternativa **d**
- alternativa **b**
- alternativa **b**
- alternativa **b**
- alternativa **c**
- alternativa **b**
- alternativa **c**
- alternativa **a**
- alternativa **a**
- alternativa **c**
- alternativa **b**

Unidade 3 • Função afim e função modular

Atividades

- a) $a = 8$; $b = 10$
b) $a = -2$; $b = -8,4$
c) $a = -6$; $b = 4$
d) $a = 1$; $b = 0$; função linear e função identidade
e) $a = \frac{3}{5}$; $b = 0$; função linear
f) $a = 0$; $b = -37$
g) $a = \sqrt{3}$; $b = \frac{2}{3}$
h) $a = -1$; $b = 0$; função linear

2. a) 42
b) -26
c) -6
d) 94
e) 130
f) -88
g) -3
3. a) $v(t) = 100\,000 - 2\,000t$
b) 70\,000 L
c) 50 h
4. b) IV
c) • 175 °C • 17 min
5. a) $L(t) = 18\,000 - 160t$
b) 1h52min30s
6. a) aproximadamente R\$ 341,91; R\$ 1.071,54
b) 300 dólares; aproximadamente 273,50 euros
c) Sim
d) • $f(x) = 4,8844x$ • $g(p) = 5,3577p$
e) $f(40) = 195,376$; $g(100) = 535,77$
f) Sim
8. a) R\$ 4.305,20
b) $s(v) = 0,03v + 3\,500$
c) R\$ 34.728,00
9. a) 100 m³
b) 68 m³
c) 12,5 h ou 12h30min
10. a) Não
b) $p(t) = 15t + 32$
c) • R\$ 107,00 • R\$ 182,00
d) 3,5 h ou 3h30min
11. a) $R(d) = 2,5d$
b) 18 cm
c) 1 : 250\,000
13. b) automóvel individual
c) motocicleta: $m(x) = 71x$; automóvel individual: $a(x) = 127x$; ônibus: $o(x) = 16x$
d) motocicleta: 3\,550 g; automóvel individual: 6\,350 g; ônibus: 800 g
14. a) 2
b) 4
c) 21
d) $\frac{1}{2}$
16. a) 5; crescente
b) -8; decrescente
c) -1; decrescente
d) $\frac{1}{3}$; crescente
17. a) decrescente
b) crescente
c) decrescente
d) crescente
18. a) Não
b) 5
c) $f: [0, 4] \rightarrow \mathbb{R}$, definida por $f(t) = 5t - 4$.
d) 2 h
20. a) decrescente
b) $x = \frac{5}{2}$
c) eixo x: $(\frac{5}{2}, 0)$; eixo y: (0, 5)
22. a) crescente: II e III; decrescente: I
b) I: $n(x) = -x + 7$; II: $h(x) = 5x$; III: $m(x) = \frac{x}{4} + 2$
23. a) Sim
b) função linear; $q(x) = 3,5x$
c) gráfico II
d) aproximadamente 443\,000 km²
e) aproximadamente 0,052
24. a) decrescente
b) $a = -\frac{2}{3}$
c) $f(x) = -\frac{2}{3}x + 4$
25. a) $m = -2$
b) $m = 1$
c) $m = -5$
26. a) $k = \frac{1}{4}$; $f(x) = -\frac{x}{4} + 6$ e $g(x) = \frac{x}{2} + 3$
b) • $f: (24, 0)$; $g: (-6, 0)$ • $f: (0, 6)$; $g: (0, 3)$
27. a) • $v(c) = 0,70c + 10$ • $v(c) = 0,90c + 10$
• $v(c) = 0,80c + 10$
b)
$$v(c) = \begin{cases} 0,50c + 10, & \text{para } 0 \leq c \leq 50 \\ 0,70c + 10, & \text{para } 50 < c \leq 200 \\ 0,80c + 10, & \text{para } 200 < c \leq 500 \\ 0,90c + 10, & \text{para } c > 500 \end{cases}$$

c) $D(v) = [0, +\infty[$; $\text{Im}(v) = [10, +\infty[$
e) Sim
f) • R\$ 550,00 • R\$ 330,00
• R\$ 25,00 • R\$ 94,00
28. alternativa b
29. f: veículo IV; h: veículo I; m: veículo III; n: veículo II
30. a) loja A: R\$ 200,00; loja B: R\$ 80,00
b) loja B; R\$ 4,50
c) loja A: $P_A(x) = 3,5x + 200$;
loja B: $P_B(x) = 4,50x + 80$. Ambas são funções afins.
e) para quantidades maiores que 120 unidades
31. a) 15 kg
b) janeiro: 0,43 kg; fevereiro: 1,14 kg; março: 1,29 kg;
abril: 0,28 kg; maio: 0,85 kg; junho: 0,58 kg; julho: 0,01 kg
c) 14,58 kg
32. a) A inclinação da reta correspondente ao gráfico da função f será alterada.
b) O gráfico da função f será transladado verticalmente.
33. a) $y = 2x + 3$
b) $y = -3x + 5$
c) $y = 6x - 6$
d) $y = -2x + 5$
34. $P(-1, -3)$
35. a) R\$ 40,00
b) 34,5 km
c) $-10x + 9y - 105 = 0$

36. a) $r: 3x - 4y = -2$; $s: 4x + 3y = 14$
b) (2, 2)
37. a) $y = 3x + 1$
b) $y = 2 - \frac{x}{2}$
38. a) $y = x + 2$
b) $y = -4x + 3$
c) $y = \frac{x}{3} + 6$
d) $y = x - 1$
39. a) $y = 2$
b) $y = 5$
c) $y = -3$
d) $y = -1$
40. a) $f(x) > 0$ para $x > \frac{1}{3}$, $f(x) = 0$ para $x = \frac{1}{3}$ e
 $f(x) < 0$ para $x < \frac{1}{3}$
b) $g(x) < 0$ para $x > \frac{1}{7}$, $g(x) = 0$ para $x = \frac{1}{7}$ e
 $g(x) > 0$ para $x < \frac{1}{7}$
c) $h(x) > 0$ para $x > \frac{1}{3}$, $h(x) = 0$ para $x = \frac{1}{3}$ e
 $h(x) < 0$ para $x < \frac{1}{3}$
d) $m(x) < 0$ para $x > -\frac{4}{5}$, $m(x) = 0$ para $x = -\frac{4}{5}$
e $m(x) > 0$ para $x < -\frac{4}{5}$
e) $n(x) > 0$ para $x > -4$, $n(x) = 0$ para $x = -4$ e
 $n(x) < 0$ para $x < -4$
f) $p(x) > 0$ para $x > 0$, $p(x) = 0$ para $x = 0$ e
 $p(x) < 0$ para $x < 0$
41. a) $f(x) > 0$ para $x < 2$
b) $f(x) > 0$ para $x > \frac{20}{7}$
42. $x \in]-\infty, -4[$
43. positiva: $0 \leq t < 6$; igual a zero: $t = 6$; negativa: $6 < t \leq 10$
45. a) estacionamento A: R\$ 24,00
b) estacionamento A: $V(t) = 12t$;
estacionamento B: $V(t) = 6t + 20$
c) Para períodos de até 3 horas de uso, o estacionamento A é mais vantajoso financeiramente para o motorista. Para períodos a partir de 3 horas, o estacionamento B é mais vantajoso.
46. alternativa a
47. a) heptágono regular
b) $f:]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$, definida por $f(x) = 7x$
c) $f(4) = 28$
48. hexágono regular
49. a) R\$ 630,00; R\$ 750,00
b) $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$, definida por $f(t) = 30t + 600$
50. b) perímetro: $4x$; área: x^2

- c) Não
d) Sim
e) $p(x) = 4x$; $s(x) = x^2$
51. a) A: R\$ 1.200,00; B: R\$ 800,00
b) A: 5%; B: 10%
c) A: $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$, definida por $f(t) = 60t + 1200$;
B: $g: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$, definida por $g(t) = 80t + 800$
d) investimento A; investimento B
52. a) $S(v) = \begin{cases} 2000, & \text{se } v \leq 5000 \\ 0,10v + 1500, & \text{se } 5000 < v \leq 10000 \\ 0,15v + 1000, & \text{se } v > 10000 \end{cases}$
53. a) $V(x) = \begin{cases} 25, & \text{se } 0 < x \leq 3 \\ 5x + 10, & \text{se } 3 < x \leq 5 \\ 10x - 15, & \text{se } x > 5 \end{cases}$
54. a) -20, -15, -10, -5 e 0
b) 5
55. a) $f(x) = -2x + 10$
b) • -8 • -28 • -188
56. 4 meses
57. c) • (1, 4, 9, 16, 25, ..., n^2 , ...)
• (2, 4, 6, 8, 10, ..., $2n$, ...)
d) A sequência numérica (2, 4, 6, 8, 10, ..., $2n$, ...) é uma PA.
60. a) -4
b) 3
c) 9
d) 6
e) 5
f) 6
63. a) $g(x) = |x - 4|$
b) $h(x) = |x| + 3$
c) $m(x) = |x + 2| + 1$
64. a) $g(x) = |x - 2| + 5$
b) (0, 7)
65. a) $g(x) = |x - 7|$
b) o alvo C
c) 7 pontos
66. alternativa d

Praticando: Enem e vestibulares

- alternativa b
- alternativa a
- alternativa c
- alternativa c
- alternativa a
- alternativa d
- alternativa d
- alternativa c
- alternativa c
- alternativa e

Unidade 4 • Função quadrática

Atividades

1. a, b, d e e
2. a) $a = -5; b = 3; c = -9$
b) $a = 1; b = 0; c = -0,4$
c) $a = -\frac{1}{3}; b = \frac{1}{7}; c = 4$
d) $a = 3,5; b = 0; c = 0$
e) $a = \sqrt{3}; b = 0; c = 4$
f) $a = 4; b = 56; c = 196$
3. a) 7
b) -13
c) -27
d) 1,62
e) -134
f) 57
4. a) figura 1: 5 quadrados; figura 2: 8 quadrados; figura 3: 13 quadrados
b) $f(x) = x^2 + 4$
c) 68 quadrados
5. a) $f(x) = x^2$
b) $f(5) = 25; f(3) = 9$
c) afirmativa III
6. a) • 14 diagonais • 77 diagonais • 135 diagonais
b) $a = \frac{1}{2}; b = -\frac{3}{2}; c = 0$
8. a) R\$ 320,00; R\$ 720,00
b) R\$ 780,00
9. a) $f(x) = x^2 - 9x + 20$
b) $g(x) = 6x^2 - 44x + 76$
c) $30 \text{ m}^2; 236 \text{ m}^2$
10. b) $4,9t^2$
c) $f(t) = 4,9t^2$; sim
d) 490 m
e) Não
11. a) $8,1 \text{ m}^2$
b) A rampa estará "admissível", mas abaixo do recomendado.
c) $g(x) = x^2 + 9,9x + 8,1$
d) $g(0,6) = 14,4$
12. b) 210
c) $s(n) = \frac{n(1+n)}{2}$ ou $s(n) = \frac{n^2}{2} + \frac{n}{2}$
d) 8515; 321201
13. a) f não tem zero real.
b) 0 e 4
c) 5
d) f não tem zero real.
e) -2 e $-\frac{2}{3}$
f) -3 e 4
15. a) $m < \frac{7}{4}$
b) $m = \frac{7}{4}$
c) $m > \frac{7}{4}$
16. a) $s(20) = 9$
b) R\$ 1.680,00
c) 10 cadeiras ou 110 cadeiras
17. a) 48 metros cúbicos
b) 45 metros cúbicos
c) 24 h
18. A: $\Delta > 0$? B: $\Delta < 0$?
21. a) eixo x: $(-\frac{3}{2}, 0)$ e $(2, 0)$; eixo y: $(0, -12)$
b) eixo x: $(-1, 0)$ e $(\frac{7}{3}, 0)$; eixo y: $(0, 7)$
c) eixo x: $(5, 0)$ e $(10, 0)$; eixo y: $(0, 10)$
d) eixo x: $(2, 0)$; eixo y: $(0, -8)$
22. a) $a < 0, b < 0, c < 0$
b) $a > 0, b > 0, c = 0$
c) $a > 0, b < 0, c > 0$
d) $a < 0, b = 0, c > 0$
23. $f(x) = \frac{x^2}{4} + x - 3$
24. a) $V(2, 5)$. Respostas possíveis: $(0, 4)$ e $(4, 4)$; $(-2, 1)$ e $(6, 1)$.
25. b) $f(x) = 6x$
c) $g(x) = \frac{3\sqrt{3}}{2}x^2$
d) f : função afim e função linear; g : função quadrática
e) Perímetro: 24 cm ; área: $24\sqrt{3} \text{ cm}^2$. Perímetro: 48 cm ; área: $96\sqrt{3} \text{ cm}^2$.
26. a) A: 4; B: -2; C: $\frac{1}{2}$
c) $f: a > 0, b = 0$ e $c = 0$; $g: a < 0, b = 0$ e $c = 0$;
 $h: a > 0, b = 0$ e $c = 0$
d) $f(x) = x^2; g(x) = -2x^2; h(x) = \frac{x^2}{2}$
27. Respostas possíveis:
 $f(x) = -2x^2 - 3x; f(x) = -x^2 - x + 3$
28. 5
29. a) -7
b) -9
c) 31
d) 5
30. c) 17,1 m
d) 100 km/h
e) $d(v) = \frac{v^2}{200} - \frac{v}{40} + \frac{3}{5}$
f) Não
31. b) $600 : 600 = 1$ e $1 = 1^2$; $2400 : 600 = 4$ e $4 = 2^2$;
 $5400 : 600 = 9$ e $9 = 3^2$; $9600 : 600 = 16$ e $16 = 4^2$;
 $15000 : 600 = 25$ e $25 = 5^2$
c) $600\ell^2$
d) $q(\ell) = 600\ell^2$; sim
e) • 3750 BTUs
• 21600 BTUs
• 60000 BTUs
f) 9 m

32. a) $V(20, -38)$
 b) $V(1, 11)$
 c) $V(-2, -8)$
 d) $V(-1, 2)$
33. a) $\text{Im}(f) = \{y \in \mathbb{R} \mid y \geq -5\}$
 b) $\text{Im}(f) = \left\{y \in \mathbb{R} \mid y \leq -\frac{31}{8}\right\}$
 c) $\text{Im}(f) = \{y \in \mathbb{R} \mid y \leq 10\}$
 d) $\text{Im}(f) = \left\{y \in \mathbb{R} \mid y \geq \frac{5}{2}\right\}$
34. a) f é decrescente para $x < -3$ e crescente para $x > -3$.
 b) f é decrescente para $x < -1$ e crescente para $x > -1$.
 c) f é crescente para $x < 3$ e decrescente para $x > 3$.
35. a) $\bullet x < -1,5$
 $\bullet x > -1,5$
 b) $f(x) = -x^2 - 3x + 10$
 c) $(-1,5; 12,25)$
 d) $\text{Im}(f) = \{y \in \mathbb{R} \mid y \leq 12,25\}$
36. alternativa **d**
37. a) valor máximo; $-6,875$
 b) valor mínimo; aproximadamente $-0,14$
 c) valor mínimo; 0
 d) valor máximo; 36
38. alternativa **d**
39. a) $1,9 \text{ m}$; $2,7 \text{ m}$
 b) $3,15 \text{ m}$; $1,25 \text{ s}$
 c) $0,4$
40. 28 m de comprimento e 28 m de largura
41. $0,5 \text{ m}$; $2,5 \text{ s}$
42. a) 70 BPM ; 126 BPM
 b) 198 BPM ; 20 min
 c) entre 5 min e 35 min do treino
43. alternativa **d**
44. a) $\text{R\$ } 36,00$; $\text{R\$ } 7.200,00$
 b) É mais vantajoso que compareçam 400 convidados.
 c) $\text{R\$ } 7.840,00$; 280 convidados
45. a) $1,3 \text{ m}$
 b) $21,6 \text{ s}$
 c) $g(x) = -0,1x^2 + 2,1x + 1,3$; $D(g) = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x \leq 21,6\}$
 d) $12,325 \text{ m}$
 e) $\text{Im}(g) = [0; 12,325]$
47. a) $f(x) = \begin{cases} -2x^2 - 2x + 6, & \text{se } x < 1 \\ -x + 3, & \text{se } x \geq 1 \end{cases}$
 b) $6,5$
49. a) $f(x) > 0$ para $x < -4$ ou $x > 3$; $f(x) = 0$ para $x = -4$ ou $x = 3$; $f(x) < 0$ para $-4 < x < 3$
 b) $f(x) > 0$ para $-8 < x < 0$; $f(x) = 0$ para $x = -8$ ou $x = 0$; $f(x) < 0$ para $x < -8$ ou $x > 0$
 c) $\nexists x \in D(f)$ tal que $f(x) > 0$; $f(x) = 0$ para $x = 3$; $f(x) < 0$ para $x \neq 3$
50. a) $f(x) > 0$ para todo $x \in D(f)$; $\nexists x \in D(f) \mid f(x) \leq 0$
 b) $f(x) > 0$ para $0,5 < x < 3$; $f(x) = 0$ para $x = 0,5$ ou $x = 3$; $f(x) < 0$ para $x < 0,5$ ou $x > 3$

- c) $\nexists x \in D(f) \mid f(x) > 0$; $f(x) = 0$ para $x = -3$; $f(x) < 0$ para $x \neq -3$
 d) $f(x) > 0$ para $x < -2$ ou $x > 4$; $f(x) = 0$ para $x = -2$ ou $x = 4$; $f(x) < 0$ para $-2 < x < 4$
 e) $f(x) > 0$ para $x \neq 2,5$; $f(x) = 0$ para $x = 2,5$; $\nexists x \in D(f) \mid f(x) < 0$
 f) $\nexists x \in D(f) \mid f(x) \geq 0$; $f(x) < 0$ para todo $x \in D(f)$
51. a) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 1 \text{ ou } x > 3\}$
 b) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid -30 \leq x \leq 10\}$
 c) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x < -8,5 \text{ ou } x > -1,5\}$
 d) $S = \emptyset$
53. $k < \frac{2}{3}$
54. a) $f(x) = x^2 - 2x - 8$; $g(x) = -2x + 1$
 b) $\bullet -3 < x < 3$ $\bullet x = -3$ ou $x = 3$
 $\bullet x < -3$ ou $x > 3$
55. a) \bullet entre 10 min e 240 min
 \bullet entre 0 min e 10 min e entre 240 min e 250 min
 b) $264,5^\circ\text{C}$; 125 min
57. a) $y^2 - 4x + 8y = -16$
 b) $x^2 + 2x + 8y = 7$
58. algumas possíveis respostas: $(-1, 0)$, $(-1, 4)$, $(2, -2)$, $(2, 6)$, $(7, -4)$, $(7, 8)$; $y_p = 2(\sqrt{2} + 1) \approx 4,83$
59. $x^2 - 4x - 8y = 12$

Praticando: Enem e vestibulares

- alternativa **c**
- alternativa **b**
- alternativa **d**
- alternativa **e**
- alternativa **c**
- alternativa **c**
- alternativa **d**
- alternativa **c**
- alternativa **b**
- alternativa **d**
- alternativa **b**
- alternativa **d**
- 10 m
- alternativa **b**
- alternativa **c**
- alternativa **c**
- a) 16 m
 b) 76 km/h

Unidade 5 • Relações métricas e trigonometria no triângulo

Atividades

- a) $x = 117 \text{ cm}$
 b) $x = 2 \text{ m}$
- Não
- alternativa **a**

4. alternativa **b**
5. R\$ 6.840,00
7. sim; 4
8. **a e c:** caso **LAL**; **b e e:** caso **LLL**; **d e f:** caso **AA**
9. $x \approx 2,07$ cm e $y = 4$ cm
10. **b)** 4 m
11. **a)** • **A, B e D**
• **C e E**
b) Sim
13. **a)** 16 cm
b) aproximadamente 45 mm
c) aproximadamente 6,67 m
d) 9 dm
14. alternativa **a**
15. **a)** 4,8 cm
b) 2,88 cm
c) 2,16 cm e 3,84 cm
16. **a)** 28π cm ou aproximadamente 87,92 cm
b) $98\sqrt{3}$ cm² ou aproximadamente 169,74 cm²
17. 300 cm
19. $\sin \alpha = \frac{35}{43}$; $\cos \alpha = \frac{4\sqrt{39}}{43}$; $\tan \alpha = \frac{35\sqrt{39}}{156}$
20. **a)** triângulo **ABC**: 28,8 m; triângulo **DEF**: 14,4 m
b) $\sin \alpha = \frac{4}{5}$; $\cos \alpha = \frac{3}{5}$; $\tan \alpha = \frac{4}{3}$
c) $\sin \beta = \frac{3}{5}$; $\cos \beta = \frac{4}{5}$; $\tan \beta = \frac{3}{4}$
21. **a)** $\frac{12}{13}$
b) $\frac{5}{13}$
c) 1
• infinitos triângulos retângulos
22. **a)** $\tan \beta = \frac{2}{3}$
b) 3 m
c) 27 m²
23. aproximadamente 6,19 m
24. seno: $\frac{\sqrt{2}}{2}$; cosseno: $\frac{\sqrt{2}}{2}$; tangente: 1
26. **a)** $x = 22$ cm e $y = 11\sqrt{2}$ cm
b) $x \approx 3,76$ m e $y \approx 1,37$ m
27. **a)** $\alpha = 60^\circ$ e $\beta = 30^\circ$
b) $\alpha \approx 32^\circ$ e $\beta \approx 58^\circ$
28. aproximadamente 5,2 m
29. **b)** $1100\sqrt{2}$ m ou aproximadamente 1 556 m
30. **a)** aproximadamente 235,85 m
b) aproximadamente 125 m
31. **a)** **I e III**
b) mínimo: aproximadamente 3,89 m;
máximo: aproximadamente 5 m

32. **b)** aproximadamente 21,20 m
c) aproximadamente 13,25 m
33. $68\sqrt{2}$ m ou aproximadamente 96 m
34. aproximadamente 87,4 m
35. **a)** aproximadamente 59°
b) aproximadamente 40°
c) 45°
36. de 28,8 m até 43,2 m
39. **a)** 4 m²
b) Guarapuava (PR)
40. **a)** aproximadamente 13,61 cm
b) aproximadamente 22,79 m
41. **b)** 481,41 m
42. aproximadamente 276,76 m
43. **a)** Respostas possíveis: $\alpha = 60^\circ$ e $\beta = 75^\circ$ ou $\alpha = 120^\circ$ e $\beta = 15^\circ$
b) $\alpha \approx 46^\circ$ e $\beta \approx 56^\circ$
c) $\alpha \approx 44^\circ$ e $\beta \approx 59^\circ$
d) $\alpha \approx 82^\circ$ e $\beta \approx 38^\circ$
45. Maurício: aproximadamente 10,78 m; Pâmela: aproximadamente 9,14 m
46. $x = 25$ m
47. 135°
48. $\sqrt{1280494}$ cm ou aproximadamente 35,78 cm
49. **a)** $3\sqrt{3}$ cm
b) 8 cm
c) $4\sqrt{109}$ cm ou aproximadamente 41,8 cm
50. **a)** aproximadamente 187,7 m
b) $\text{med}(\widehat{ACB}) \approx 53^\circ$ e $\text{med}(\widehat{ABC}) \approx 39^\circ$
51. 15 cm
52. **a)** • $\vec{B}, \vec{E}, \vec{F}$ e \vec{H} ; \vec{A} e \vec{D} ; \vec{C}, \vec{G} e \vec{I}
• \vec{B} e \vec{F} ; \vec{E} e \vec{H} ; \vec{C} e \vec{I}
• \vec{A} e \vec{D} ; \vec{B} e \vec{G} ; \vec{C} e \vec{H} ; \vec{E}, \vec{F} e \vec{I}
c) $d \approx 20,26$ m

Praticando: Enem e vestibulares

1. alternativa **d**
2. alternativa **d**
3. alternativa **e**
4. alternativa **c**
5. alternativa **b**
6. **a)** $PR = 5$ cm; $QS = 37,5$ mm
b) $\frac{769}{32}$ cm²
7. alternativa **b**
8. alternativa **a**
9. alternativa **b**
10. alternativa **b**
11. 40°
12. alternativa **b**
13. alternativa **e**
14. alternativa **c**

Unidade 6 • Estatística: gráficos e tabelas

Atividades

1. **a)** 2023
2. **a)** verdadeira
b) falsa
c) falsa
d) verdadeira
3. **a)** de 2017 até 2022
b) site do INEP
c) aproximadamente 75,5%; aproximadamente 64%
d) aproximadamente 0,47%
4. **b)** Ensino Médio; setor verde
c) aproximadamente 67,1 milhões de eleitores
5. **a)** 148 920 333 pessoas
b) 44 108 417 pessoas
c) 47,9%
6. **b)** Piauí; 1 928 sítios arqueológicos
c) 6 064 sítios arqueológicos
7. alternativa **b**
8. **a)** Representa que 65% das crianças e adolescentes de 11 e 12 anos utilizaram a internet para enviar mensagem instantânea em 2023 no Brasil.
b) entre 9 e 10 anos
c) enviar mensagem instantânea
e) A coluna verde mais alta corresponderia ao percentual de crianças e adolescentes de 15 a 17 anos (95%) que usou rede social, e a coluna amarela mais baixa, ao percentual de crianças e adolescentes de 9 a 10 anos (45%) que enviou mensagem instantânea no Brasil em 2023.
9. **a)** 17,6%
b) aproximadamente 23°
c) alternativa **II**
10. **a)** Representa que 44,3% dos estudantes de 13 a 15 anos que participaram da pesquisa responderam ter consumido dois ou mais itens de biscoitos e sobremesas industrializadas no dia anterior à pesquisa.
b) • 24%
• 28,9%
• 39,4%
11. **a)** Não
b) 4,5 cm
12. **a)** 3,4 anos. A redução ocorreu por causa da pandemia de covid-19.
b) 1991; 2010
13. **a)** O setor azul tem área maior que o setor roxo.
b) Paraná: 31 grupos e entidades; Rio Grande do Sul: 27 grupos e entidades; Santa Catarina: 22 grupos e entidades.
c) setor verde: 139,5°; setor azul: 121,5°; setor roxo: 99°
14. **a)** quantidade de denúncias em 2018
b) aproximadamente 7,8%
15. **a)** motocicleta; automóvel
b) automóveis: velocidade mínima de 20 km/h e máxima de 70 km/h; motocicletas: velocidade mínima de 30 km/h e máxima entre 70 km/h e 80 km/h
c) 50%
d) 25%
e) 85 motocicletas
17. **a)** A estimativa das quantidades de novas vagas de emprego nas áreas de formação industrial com maior demanda por técnicos, em 2023.
c) logística e transporte; 38 911 vagas
18. **a)** trabalhadores de apoio administrativo; razão: aproximadamente 0,827
b) gráfico de colunas
c) As figuras de pilhas de dinheiro utilizadas remetem a valores monetários, associados ao rendimento médio de trabalhos realizados por homens e mulheres, que é o tema tratado no pictograma.
19. **a)** primeiro diagrama: 6 ramos;
segundo diagrama: 12 ramos
b) ramo 3; ramo 4'
c) 5 recém-nascidos
d) 22%
20. **a)** 25 estudantes
c) 2 estudantes
d) o ramo 7
e) 75 bpm
22. **a)** nível intermediário; nível avançado
b) 16%
c) Sim
d) 105 estudantes; 84%
23. **a)** **II**
25. **a)** 14 municípios; 22,6%
b) 4,8%
c) 82 — 88
d) Não
26. **a)** igual ou maior que 20 anos e menor que 40 anos; 60 anos ou mais
b) 28%
c) 196 884 acidentes
d) 53%
27. **b)** 42 funcionários
c) 1500,00 — 2000,00
d) 20%
e) Não
29. **a)** O ano correspondente aos dados da pesquisa.
b) Pesquisou na internet para fazer trabalhos escolares.
c) Não
31. Não
32. alternativa **c**

Praticando: Enem e vestibulares

1. alternativa **c**
2. alternativa **c**
3. alternativa **c**
4. alternativa **d**
5. alternativa **c**
6. alternativa **a**
7. alternativa **d**

SIGLAS DOS EXAMES OFICIAIS

Cefet-MG: Centro Federal de Educação Tecnológica de Minas Gerais

CP2-RJ: Colégio Pedro II do Rio de Janeiro

Enem/MEC: Exame Nacional do Ensino Médio

Famerp-SP: Faculdade de Medicina de São José do Rio Preto

Fatec-SP: Faculdade de Tecnologia

Fuvest-SP: Fundação Universitária para o Vestibular

Ifal: Instituto Federal de Alagoas

Ifam: Instituto Federal do Amazonas

IFBA: Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia da Bahia

IFRS: Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Rio Grande do Sul

IFSul-RS: Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia Sul-rio-grandense

ITA-SP: Instituto Tecnológico de Aeronáutica

Udesc: Universidade do Estado de Santa Catarina

UEA-AM: Universidade do Estado do Amazonas

UECE: Universidade Estadual do Ceará

UEFS-BA: Universidade Estadual de Feira de Santana

UEG-GO: Universidade Estadual de Goiás

UEMA: Universidade Estadual do Maranhão

UEMG: Universidade do Estado de Minas Gerais

UERJ: Universidade do Estado do Rio de Janeiro

UFAM: Universidade Federal do Amazonas

UFGD-MS: Universidade Federal da Grande Dourados

UFG-GO: Universidade Federal de Goiás

UFJF-MG: Universidade Federal de Juiz de Fora

UFMS: Universidade Federal do Mato Grosso do Sul

UFPA: Universidade Federal do Pará

UFPR: Universidade Federal do Paraná

UFRGS-RS: Universidade Federal do Rio Grande do Sul

UFRR: Universidade Federal de Roraima

UFSC: Universidade Federal de Santa Catarina

Unesp: Universidade Estadual Paulista

Unicamp-SP: Universidade Estadual de Campinas

Unifesp-SP: Universidade Federal de São Paulo

Unitins-TO: Fundação Universidade do Tocantins

UTFPR: Universidade Tecnológica Federal do Paraná

BIBLIOGRAFIA COMENTADA

ALMEIDA, Lourdes Werle de; SILVA, Karina Pessoa da; VERTUAN, Rodolfo Eduardo. **Modelagem matemática na educação básica**. São Paulo: Contexto, 2012.

- Aborda diferentes possibilidades de trabalho com atividades de modelagem matemática em sala de aula.

AUSUBEL, David Paul; NOVAK, Joseph Donald; HANESIAN, Helen. **Psicologia educacional**. 2. ed. Rio de Janeiro: Interamericana, 1980.

- Discute o papel da psicologia educacional na concepção de ensino e aprendizagem significativa.

ÁVILA, Geraldo. **Cálculo das funções de uma variável**. 7. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2003. v. 1.

- Apresenta os principais tópicos da Matemática elementar por meio de uma abordagem em que os conceitos mais complexos são construídos a partir das noções mais básicas.

BACICH, Lilian; MORAN, José (org.). **Metodologias ativas para uma educação inovadora**: uma abordagem teórico-prática. Porto Alegre: Penso, 2018.

- Aborda diferentes metodologias ativas que podem ser aplicadas na condução de atividades pedagógicas.

BOLDRINI, José Luiz *et al.* **Álgebra linear**. 3. ed. São Paulo: Harbra, 1980.

- Apresenta conceitos básicos de Álgebra linear.

BORBA, Marcelo de Carvalho; PENTEADO, Miriam Godoy. **Informática e educação matemática**. 5. ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2016. (Tendências em Educação Matemática).

- Expõe resultados de estudos sobre a informática educativa nas aulas de Matemática.

BOYER, Carl Benjamin; MERZBACH, Uta Caecilia. **História da matemática**. Tradução: Elza Furtado Gomide. 3. ed. São Paulo: Blucher, 2010.

- Apresenta tópicos sobre a história da Matemática, com destaque para os estudiosos que a desenvolveram ao longo do tempo.

BRACKMANN, Christian Puhlmann. **Desenvolvimento do pensamento computacional através de atividades desplugadas na educação básica**. 2017. Tese (Doutorado em Informática na Educação) – Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2017. Disponível em: <https://lume.ufrgs.br/bitstream/handle/10183/172208/001054290.pdf?sequence=1&isAllowed=y>. Acesso em: 29 set. 2024.

- A pesquisa tem como objetivo verificar a possibilidade de desenvolver o Pensamento Computacional na Educação Básica por meio de atividades “desplugadas” (sem o uso de computadores).

BUSSAB, Wilton de Oliveira; MORETTIN, Pedro Alberto. **Estatística básica**. 4. ed. São Paulo: Atual, 1987. (Métodos qualitativos).

- Trata de conceitos básicos de Estatística, como análise de dados, probabilidades e variáveis aleatórias, e apresenta tópicos sobre inferência estatística.

CARAÇA, Bento de Jesus. **Conceitos fundamentais da matemática**. Lisboa: Gradiva, 2012. (Ciência aberta).

- Apresenta conceitos de Matemática elementar, bem como a relação entre esses conceitos e seu contexto histórico.

CHANG, Raymond. **Química geral**: conceitos essenciais. Tradução: Maria José Ferreira Rebelo *et al.* 4. ed. Porto Alegre: AMGH, 2010.

- Trata de conceitos e princípios de Química, bem como de suas aplicações na vida prática.

COHEN, Elizabeth G.; LOTAN, Rachel A. **Planejando o trabalho em grupo**: estratégias para salas de aula heterogêneas. 3. ed. Porto Alegre: Penso, 2017. *E-book*.

- Nesse livro, são discutidas ideias do trabalho em grupo em turmas heterogêneas como uma estratégia potencialmente eficaz de ensino e aprendizagem.

D'AMBROSIO, Ubiratan. **Educação matemática**: da teoria à prática. 12. ed. Campinas: Papyrus, 2005. (Perspectivas em Educação Matemática).

- Aborda aspectos da cognição, da natureza da Matemática e questões teóricas da educação, além de discutir temas ligados à sala de aula e às inovações na prática docente.

D'AMBROSIO, Ubiratan. **Etnomatemática**: elo entre as tradições e a modernidade. 2. ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2005. (Tendências em Educação Matemática).

- A abordagem feita nesse livro proporciona uma visão geral da Etnomatemática.

DANZA, Hanna Cebel. **Projetos de vida e educação moral**: um estudo na perspectiva da teoria dos modelos organizadores do pensamento. 2014. Dissertação (Mestrado em Educação) – Programa de Pós-Graduação em Educação, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2014. Disponível em: https://www.teses.usp.br/teses/disponiveis/48/48134/tde-14102014-112835/publico/HANNA_CEBEL_DANZA.pdf. Acesso em: 29 set. 2024.

- Dissertação de mestrado em que são apresentados estudos de projetos de vida de jovens em idade escolar.

EVES, Howard. **Introdução à história da Matemática**. Tradução: Hygino Hugueros Domingues. 3. ed. Campinas: Editora da Unicamp, 2004.

- Narra trechos da história da Matemática desde a Antiguidade até os tempos modernos.

GARDNER, Howard. **Inteligências múltiplas**: a teoria na prática. Tradução: Maria Adriana Veríssimo Veronese. Porto Alegre: Artmed, 1995.

- Apresenta ideias fundamentais da teoria das inteligências múltiplas, bem como sugestões de como aplicá-las em sala de aula.

HALLIDAY, David; RESNICK, Robert; WALKER, Jearl. **Fundamentos de física**: eletromagnetismo. 8. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2009. v. 3.

HALLIDAY, David; RESNICK, Robert; WALKER, Jearl. **Fundamentos de física**: gravitação, ondas e termodinâmica. 9. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2012. v. 2.

HALLIDAY, David; RESNICK, Robert; WALKER, Jearl. **Fundamentos de física**: mecânica. 10. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2016. v. 1.

- Série de livros que aborda diversas áreas da Física, como Mecânica, Ondulatória, Termodinâmica, Eletromagnetismo, Óptica e Relatividade.

HAZZAN, Samuel. **Fundamentos de matemática elementar**: combinatória, probabilidade. 8. ed. São Paulo: Atual, 2013. v. 5.

- Aborda o estudo da análise combinatória e do cálculo de probabilidade.

HEWITT, Paul G. **Física conceitual**. 11. ed. Porto Alegre: Bookman, 2011.

- Apresenta conceitos e princípios da Física.

HUGHES-HALLETT, Deborah *et al.* **Cálculo e aplicações**. Tradução: Elza Furtado Gomide. São Paulo: Blucher, 1999.

- Exemplifica o uso da tecnologia no trabalho com os conceitos para o cálculo de uma variável.

IFRAH, Georges. **História universal dos algarismos**: a inteligência dos homens contada pelos números e pelo cálculo. Tradução: Alberto Muñoz e Ana Beatriz Katinsky. Rio de Janeiro: Nova Fronteira, 1997.

- Aprofunda o tratamento de aspectos das simbolizações concretas, orais e escritas dos números ao longo da história.

LIMA, Elon Lages *et al.* **A matemática do ensino médio**. 6. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2006. (Coleção do Professor de Matemática, v. 1).

- Aborda uma variedade de temas matemáticos do Ensino Médio, por meio de discussões conceituais, exemplos e atividades.

LIMA, Elon Lages. **Geometria analítica e álgebra linear**. 1. ed. Rio de Janeiro: Impa, 2014. (Coleção matemática universitária).

- Abrange conceitos de álgebra linear e de geometria analítica, plana e espacial.

MAGALHÃES, Marcos Nascimento; LIMA, Antônio Carlos Pedroso de. **Noções de probabilidade e estatística**. 7. ed. São Paulo: Edusp, 2023. (Acadêmica, v. 1).

- Introduce conceitos de probabilidade e de estatística, destacando relações entre estatística descritiva, probabilidade e variáveis aleatórias.

MORAIS FILHO, Daniel Cordeiro de. **Manual de redação matemática**. 2. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2018. (Coleção do Professor de Matemática).

- Além de apresentar considerações gerais sobre a boa redação matemática, abrange a estruturação das frases, sugestões técnicas, dicas de gramática, uso correto de termos, de ortografia e de notações em Matemática.

NEVES, Iara Conceição Bitencourt *et al* (org.). **Ler e escrever**: compromisso de todas as áreas. 9. ed. Porto Alegre: Editora da UFRGS, 2011.

- Reúne textos de diversas áreas do conhecimento que destacam a maneira como cada uma delas pode se engajar em uma proposta de ensino interdisciplinar.

ONUCHIC, Lourdes de La Rosa; ALLEVATO, Norma Suely Gomes. Novas reflexões sobre o ensino-aprendizagem de matemática através da resolução de problemas. *In*: BICUDO, Maria Aparecida Viggiani; BORBA, Marcelo de Carvalho (org.). **Educação matemática**: pesquisa em movimento. 4. ed. São Paulo: Cortez, 2012.

- Reúne uma coletânea de textos com diferentes perspectivas sobre o movimento da pesquisa em educação matemática.

PAIS, Luiz Carlos. **Educação escolar e as tecnologias da informática**. Belo Horizonte: Autêntica, 2007. (Coleção Trajetória).

- Organiza um conjunto de ensaios referentes a várias questões sobre a inserção da informática na educação escolar.

PARRA, Cecília; SAIZ, Irma (org.). **Didática da matemática**: reflexões psicopedagógicas. Porto Alegre: Artmed, 1996.

- Propõe reflexões acerca de aspectos da Matemática estudada na Educação Básica e apresenta propostas didáticas que buscam oportunizar conceitualizações, reflexões e questionamentos na sala de aula.

POLYA, George. **A arte de resolver problemas**: um novo aspecto do método matemático. Tradução e adaptação: Heitor Lisboa de Araújo. Rio de Janeiro: Interciência, 1995.

- Descreve métodos para resolver problemas e propõe quatro princípios da resolução de problemas.

PONTE, João Pedro da; BROCARD, Joana; OLIVEIRA, Hélia. **Investigações matemáticas na sala de aula**. 4. ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2019. (Tendências em Educação Matemática).

- Analisa práticas de investigação desenvolvidas por matemáticos e que podem ser transpostas para a sala de aula.

REECE, Jane B. *et al*. **Biologia de Campbell**. 10. ed. Porto Alegre: Artmed, 2015.

- Aborda conceitos de diversas áreas das Ciências Biológicas.

RIDPATH, Ian. **Astronomia**. Tradução: Maria Luiza X. de A. Borges. 4. ed. Rio de Janeiro: Zahar, 2014. (Guia Ilustrado Zahar).

- Apresenta informações sobre Astronomia, como sua história, a formação do Sistema Solar, as constelações, entre outros tópicos.

SILVEIRA, Paulo; ALMEIDA, Adriano. **Lógica de programação**: crie seus primeiros programas usando JavaScript e HTML. São Paulo: Casa do Código, 2014.

- Apresenta conceitos básicos de programação e de lógica de programação.

SOUZA, Michel Figueiredo de; COSTA, Christine Sertã. **Scratch**: guia prático para aplicação na educação básica. Rio de Janeiro: Imperial, 2018. Disponível em: <https://educapes.capes.gov.br/bitstream/capes/566023/2/Produto%20-%20Michel%20de%20Souza%202019.pdf>. Acesso em: 29 set. 2024.

- Guia que apresenta algumas possibilidades de práticas pedagógicas escolares que visam favorecer o desenvolvimento do pensamento computacional por meio do uso da linguagem de programação Scratch.

TOMAZ, Vanessa Sena; DAVID, Maria Manuela Martins Soares. **Interdisciplinaridade e aprendizagem da matemática em sala de aula**. Belo Horizonte: Autêntica, 2008. (Tendências em Educação Matemática).

- Trata de questões sobre interdisciplinaridade e aprendizagem no ensino de Matemática e apresenta situações ocorridas em sala de aula que exemplificam diferentes abordagens interdisciplinares.

VERAS, Lília Ladeira. **Matemática financeira**. 6. ed. São Paulo: Atlas, 2007.

- Apresenta conceitos relacionados à Matemática financeira, abordando o uso da calculadora.

Documentos oficiais

BRASIL. [Constituição (1988)]. **Constituição da República Federativa do Brasil de 1988**. Brasília, DF: Presidência da República, [2024]. Disponível em: http://www.planalto.gov.br/ccivil_03/constituicao/constituicao.htm. Acesso em: 29 set. 2024.

- Atual conjunto de leis fundamentais que organiza o estado brasileiro.

BRASIL. **Lei nº 14.945, de 31 de julho de 2024**. Altera a Lei nº 9.394, de 20 de dezembro de 1996 (Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional), a fim de definir diretrizes para o ensino médio, e as Leis nºs 14.818, de 16 de janeiro de 2024, 12.711, de 29 de agosto de 2012, 11.096, de 13 de janeiro de 2005, e 14.640, de 31 de julho de 2023. Brasília, DF: Presidência da República, 2024. Disponível em: https://www.planalto.gov.br/ccivil_03/_ato2023-2026/2024/lei/l14945.htm. Acesso em: 27 set. 2024.

- Legislação que altera a lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional, com definição de diretrizes para o Ensino Médio.

BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular**: educação é a base. Brasília, DF: MEC, 2018. Disponível em: http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC_EI_EF_110518_versaofinal_site.pdf. Acesso em: 29 set. 2024.

- Documento que regulamenta as aprendizagens essenciais na Educação Básica.

BRASIL. Ministério da Educação. **Parâmetros Curriculares Nacionais**: ensino médio. Brasília, DF: MEC, 2000. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/blegais.pdf>. Acesso em: 9 set. 2024.

- Conjunto de textos que norteiam a elaboração dos currículos escolares do Ensino Médio.

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Básica. **Ciências da natureza, matemática e suas tecnologias**. Brasília, DF: MEC: SEB, 2006. (Orientações curriculares para o ensino médio, v. 2). Disponível em: http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/book_volume_02_internet.pdf. Acesso em: 29 set. 2024.

- Documento com orientações que buscam atender às necessidades e às expectativas das escolas e dos professores na estruturação do currículo para o Ensino médio.

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Básica. **Ciências da natureza, matemática e suas tecnologias**. Brasília, DF: MEC: SEB: [200-]. (Orientações educacionais complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais). Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/CienciasNatureza.pdf>. Acesso em: 29 set. 2024.

- Documento que visa complementar os Parâmetros Curriculares Nacionais (Ensino Médio) apresentando orientações que têm em vista a escola em sua totalidade.

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Básica. Diretoria de Currículos e Educação Integral. **Diretrizes Curriculares Nacionais Gerais da Educação Básica**. Brasília, DF: SEB: Dicei, 2013. Disponível em: https://www.gov.br/mec/pt-br/aceso-a-informacao/media/seb/pdf/d_c_n_educacao_basica_nova.pdf. Acesso em: 29 set. 2024.

- Documento normativo obrigatório que orienta a estrutura do currículo das escolas da Educação Básica.

ORIENTAÇÕES PARA O PROFESSOR

Apresentação

As mudanças que vêm ocorrendo no mundo têm causado significativo impacto sobre as sociedades. As novas tecnologias da informação e da comunicação, por exemplo, produziram profundas mudanças nas relações interpessoais, na democratização da informação, na cultura juvenil e no mundo do trabalho. Essas tecnologias tornaram possível o acesso a conhecimentos, que, até pouco tempo atrás, eram restritos a determinados grupos de estudiosos.

Todas essas mudanças afetaram diretamente a educação, sobretudo na sala de aula.

Esta coleção foi elaborada considerando esse ambiente em transformação nos aspectos social, tecnológico e cultural. Acreditamos que o estudo da Matemática é de fundamental importância na formação de cidadãos aptos a viver em sociedade, fazendo valer seus direitos e deveres individuais e coletivos.

Modelos de práticas de aula mais atuais, que buscam considerar os estudantes e os professores como protagonistas do processo de ensino-aprendizagem, têm sido cada vez mais adotados. Nesse sentido, estudos em educação matemática têm produzido um amplo e variado repertório de concepções, ideias e teorias que buscam promover o ensino da Matemática. Nestas **Orientações gerais para o professor**, procuramos incluir elementos que compõem essa produção acadêmica.

Considerando também que o Livro do estudante exige complementos que potencializem as aulas, propusemos recursos importantes, como comentários específicos, que ampliam as discussões sobre os conceitos em estudo, complementam as atividades propostas e indicam elementos externos ao livro didático, como *sites*, vídeos, aplicativos, entre outros recursos.

Com isso, esperamos que a efetivação do uso dos livros da coleção em sala de aula seja a mais completa possível, valorizando o trabalho docente e incentivando a participação e o comprometimento dos estudantes.

O autor.

SUMÁRIO

Orientações gerais307

Conhecendo a coleção307

Estrutura do Livro do estudante307

Estrutura das

Orientações específicas308

O Ensino Médio308

A Base Nacional Comum

Curricular (BNCC)309

As competências gerais309

A área de Matemática e
suas Tecnologias310

Os Temas Contemporâneos
Transversais (TCTs)313

**Fundamentos teóricos e
metodológicos da coleção**313

O ensino de Matemática314

Aprendizagem matemática314

Metodologias ativas e
algumas tendências em
educação matemática316

Orientações para avaliação317

Alguns instrumentos de avaliação318

**O papel do professor
de Matemática**320

Saberes docentes para
o ensino de Matemática320

Os estudantes no Ensino Médio320

Dimensões física, social,
emocional e cultural dos estudantes320

Reflexos da violência no
âmbito escolar e local320

Culturas juvenis321

Projeto de vida e
mundo do trabalho321

Gestão da sala de aula321

Ambiente educacional321

Leitura e argumentação
nas aulas de Matemática323

Estratégias de cálculo
e o uso da calculadora323

Relações com outras áreas
do conhecimento e seus
componentes curriculares323

**Referências bibliográficas
comentadas**324

Indicações para o professor327

Trabalhos327

Instituições e grupos de estudo para
a formação continuada do professor327

Revistas327

Sites328

Cursos e plataformas328

**Orientações específicas
para este Volume**329

Unidade 1 Conjuntos330

Unidade 2 Relação entre grandezas
e noção de função333

Unidade 3 Função afim e
função modular337

Unidade 4 Função quadrática341

Unidade 5 Relações métricas
e trigonometria
no triângulo345

Unidade 6 Estatística: gráficos
e tabelas350

Transcrições dos podcasts do 1º ano354

**Resolução das atividades propostas
no Livro do estudante**356

Orientações gerais

Conhecendo a coleção

Esta coleção é composta de três livros da área de Matemática e suas Tecnologias destinados ao Ensino Médio. Nas **Orientações gerais para o professor**, estão presentes informações sobre o Ensino Médio, a Base Nacional Comum Curricular (BNCC), os fundamentos teóricos e metodológicos da coleção, orientações para avaliação, o papel do professor de Matemática, os estudantes no Ensino Médio, gestão da sala de aula, referências bibliográficas comentadas e indicações para o professor, comuns aos três livros da coleção, e são apresentadas, para cada volume, as orientações específicas e as resoluções das atividades propostas no Livro do estudante.

Na parte comum aos três volumes, é apresentada uma visão detalhada da estrutura do Livro do estudante e das orientações específicas, assim como os pressupostos teórico-metodológicos que fundamentam a coleção e trazem reflexões acerca do ensino e da aprendizagem na área de Matemática e suas Tecnologias, explorando algumas tendências em educação matemática e metodologias ativas. A **Base Nacional Comum Curricular (BNCC)**¹ é um dos documentos que nortearam as reflexões e a elaboração desta coleção.

Nas orientações específicas, são apresentados comentários, complementos e orientações didáticas correspondentes às atividades propostas e aos conteúdos disponíveis nas páginas do Livro do estudante. Além disso, são apresentadas informações gerais sobre o Volume da coleção, com sugestões de cronograma bimestral, trimestral e semestral e comentários referentes a cada uma de suas seis Unidades.

Estrutura do Livro do estudante

Cada um dos três Livros do estudante desta coleção é organizado em seis Unidades que contêm abertura, atividades, seções e boxes. A seguir, serão apresentadas informações sobre alguns desses elementos.

Seções

Na **Abertura** de cada Unidade, são apresentados recursos, como imagens, textos e infografias. Além disso, são propostas questões com o objetivo de identificar a compreensão dos estudantes em relação ao tema da Unidade e a aspectos de seu conhecimento prévio sobre algum conceito que será estudado. É importante propor o trabalho com a abertura da Unidade de acordo com as características próprias da turma ou com os objetivos específicos para a aula, como a realização de leitura individual ou coletiva e discussão acerca das questões. Sempre que julgar oportuno, retomar com os estudantes a abertura no decorrer do estudo da Unidade.

A seção **Integrando com...** propõe o estudo de temas que relacionam a área de Matemática e suas Tecnologias às outras áreas do conhecimento, em especial à área de Ciências da Natureza e suas Tecnologias, o que possibilita a integração de conceitos de diferentes perspectivas. Sugere-se dialogar com professores das áreas relacionadas para planejar as aulas em que a seção será realizada.

Na seção **Você conectado**, são propostas atividades que envolvem o estudo de conceitos matemáticos com o apoio do *software* de geometria dinâmica GeoGebra ou da planilha eletrônica LibreOffice Calc, ambos de livre acesso na internet. As atividades propostas devem ser realizadas de acordo com a realidade na qual a escola está inserida, ou seja, podem ser desenvolvidas em um laboratório de informática ou coletivamente em um computador portátil, que o professor pode levar para a sala de aula, acompanhado de um projetor ou, ainda, como uma atividade extraclasse.

A seção **O que estudei**, apresentada ao final de cada Unidade, propõe um momento de reflexão e de autoavaliação tanto para os estudantes como para o professor. Em relação aos estudantes, são consideradas suas atitudes comportamentais e sua compreensão dos conceitos estudados na Unidade. Em relação ao professor, sua autoavaliação é condicionada às respostas dadas pelos estudantes, as quais podem ser objetos de reflexão a respeito de sua prática docente. Essa reflexão, por sua vez, pode propiciar ajustes nos planejamentos de aula das Unidades seguintes.

Na questão 1, os estudantes devem fazer um retrospecto de seu comportamento nas aulas de Matemática. As respostas aos itens dessa questão devem ser individuais, de maneira a evidenciar, da melhor maneira possível, suas atitudes comportamentais. Os estudantes podem eleger alguns itens para os quais responderam “concorda parcialmente” ou “não concorda” como pontos de atenção, de modo que devam mudar a sua atitude para que, no estudo das próximas Unidades, a resposta a tais itens seja “concorda”. No decorrer do ano, sugere-se reservar momentos para que os estudantes possam comparar suas respostas a essa questão e verificar como seu comportamento evoluiu. Do ponto de vista do professor, além das análises individuais, cabe uma análise do todo para identificar ações que poderão ser desenvolvidas para uma correção de rota coletiva.

A questão 2 pode ser, em um primeiro momento, trabalhada de maneira individual, de modo que os estudantes identifiquem, entre os conteúdos apresentados, quais eles não compreenderam satisfatoriamente. A partir das respostas dos estudantes, em um segundo momento, o professor, ao identificar conteúdos que uma parte significativa da turma pode não ter compreendido, tem a possibilidade de estabelecer um plano de ação para a turma, no qual podem ser propostas monitorias, grupos de estudo, aulas de reforço, entre outras ações.

A questão 3 possibilita aos estudantes, de maneira coletiva, produzir materiais que contribuam com a retomada de conteúdos estudados na Unidade. Nessa proposta, que utiliza elementos da metodologia ativa “sala de aula invertida”, o objetivo é que os estudantes se preparem e estudem para ministrar um conteúdo escolhido *a priori*. Sugere-se distribuir os conteúdos entre os grupos para que sejam contemplados todos aqueles indicados nas fichas da questão 2. A metodologia ativa mencionada será tratada mais adiante, no tópico **Metodologias ativas e algumas tendências em educação matemática**.

A questão 4 tem como objetivo obter indícios em relação à compreensão dos conceitos matemáticos estudados na Unidade, com base na retomada do tema abordado na página de abertura.

¹ BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular**: educação é a base. Brasília, DF: MEC, 2018. Disponível em: <http://basenacionalcomum.mec.gov.br>. Acesso em: 9 set. 2024.

Espera-se, nessa questão, que os estudantes resolvam os itens propostos usando os conceitos matemáticos estudados na Unidade. No entanto, caso os estudantes empreguem procedimentos e estratégias nos quais sejam utilizados conceitos diferentes dos estudados, é importante que o professor os valorize e, se possível, compartilhe com a turma.

Na seção **Praticando: Enem e vestibulares**, apresentada ao final de cada Unidade, são propostas questões do Enem e de vestibulares aplicadas nas diferentes regiões do Brasil e que tratam de conceitos estudados em cada Unidade. Sugere-se propor as questões dessa seção ao final do trabalho com cada Unidade a fim de verificar se os estudantes compreenderam os conceitos abordados, o que pode constituir um momento de avaliação somativa. Para isso, propor a eles que realizem as questões em um tempo predeterminado durante a aula e individualmente, uma vez que questões de avaliações de larga escala são propostas nesse formato. A correção das questões pode ser realizada com toda a turma, constituindo, assim, momentos de aprendizagem.

Boxes

Os boxes estão distribuídos no decorrer das Unidades e cada um tem uma finalidade. O box **Dica** apresenta informações complementares ao texto principal ou fornece informações que auxiliem os estudantes na resolução de alguma atividade. No box **Para ampliar**, são indicados materiais complementares, como *sites*, vídeos, livros, documentos, que visam enriquecer a abordagem apresentada no Livro do estudante. No box **Para Pensar**, são apresentadas questões cujo objetivo é desencadear reflexões acerca da teoria ou de algum exemplo apresentado. O box **Matemática na história** tem como objetivo apresentar fatos que mostrem a Matemática como uma ciência construída socialmente, por diversos membros da comunidade científica, no decorrer da história. O box **No mundo do trabalho** explora as profissões e suas características, destacando as *soft skills* – habilidades comportamentais essenciais para os profissionais atuais. Além disso, oferece informações sobre o mercado de trabalho.

Estrutura das Orientações específicas

Orientações Unidade a Unidade

Em cada Unidade, é apresentado um **Quadro-síntese** contendo as competências gerais, competências específicas e habilidades da área de Matemática e suas Tecnologias, os Temas Contemporâneos Transversais e os conteúdos abordados. Quando pertinente, também são citadas competências específicas de outras áreas do conhecimento, em especial, da área Ciências da Natureza e suas Tecnologias. Na sequência, são apresentados os **Objetivos da Unidade** e as **Orientações didáticas**.

Nas **Orientações didáticas**, são apresentados comentários referentes à **Abertura da Unidade** e aos tópicos trabalhados no Livro do estudante. Nesses comentários, são abordadas orientações sobre os conteúdos propostos, bem como maneiras de articular a abordagem

desses conteúdos ao desenvolvimento das competências e habilidades da BNCC e sugestões de momentos em que o professor pode avaliar os estudantes. Ainda, são apresentados comentários específicos em relação a cada uma das seções trabalhadas no Livro do estudante.

No decorrer das **Orientações didáticas**, também são propostas sugestões de atividades extras, como complemento de conteúdo ou de atividade, e são apresentadas, no box **Conexões**, indicação de materiais complementares para pesquisa ou consulta (*sites*, vídeos, livros, documentos etc.), diferentes daqueles que estão disponíveis no Livro do estudante no box **Para ampliar**.

O Ensino Médio

A Educação Básica brasileira é dividida em três etapas: Educação Infantil, Ensino Fundamental e Ensino Médio. A última etapa, à qual esta coleção se destina, vem passando por várias mudanças nos últimos anos e é regulamentada, atualmente, pela resolução nº 3, de 21 de novembro de 2018², e pela lei nº 14.945, de 31 de julho de 2024, que trazem um conjunto de alterações na legislação³.

Essa legislação e a BNCC propõem uma renovação curricular das instituições públicas e privadas que oferecem vagas para esse segmento de ensino. A proposta constitui uma renovação resultante de um longo debate educacional. A seguir, são relembrados alguns momentos históricos que fizeram parte desse debate e que contribuíram para a estruturação do atual Ensino Médio.

- **1988:** Fica estabelecido pela Constituição da República Federativa do Brasil de 1988, em seu artigo 205, que a educação é um direito de todos, “visando ao pleno desenvolvimento da pessoa, seu preparo para o exercício da cidadania e sua qualificação para o trabalho”⁴.
- **1996:** A lei nº 9.394 estabelece as Leis de Diretrizes e Bases da Educação Nacional (LDB)⁵, na qual se define o Ensino Médio com duração mínima de três anos, cujas finalidades são consolidar e aprofundar conhecimentos adquiridos no Ensino Fundamental; preparar para o trabalho e a cidadania do educando; aprimorar o educando como pessoa humana; e tornar o educando capaz de compreender os fundamentos científico-tecnológicos dos processos produtivos.
- **1998:** A resolução da Câmara de Educação Básica (CEB) nº 3 institui as Diretrizes Curriculares Nacionais (DCN)⁶ para o Ensino Médio, contendo definições que dizem respeito à organização pedagógica e curricular das unidades escolares dos sistemas de ensino.
- **2000:** Publicam-se os Parâmetros Curriculares Nacionais – Ensino Médio, com a finalidade de “difundir os princípios da reforma curricular e orientar o professor, na busca de novas abordagens e metodologias”⁷.
- **2014:** O Ministério da Educação lança o Plano Nacional da Educação, lei nº 13.005⁸, para o período de 2014 a 2024, cujas metas 3 e 6 preveem, respectivamente, universalizar o atendimento escolar de jovens de 15 a 17 anos e ampliar a oferta de educação em tempo integral.

2 BRASIL. Ministério da Educação. Conselho Nacional de Educação. **Resolução CNE/CEB nº 3, de 21 de novembro de 2018.** Atualiza as Diretrizes Curriculares Nacionais para o Ensino Médio. Brasília, DF: MEC: CNE, 2018. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/docman/novembro-2018-pdf/102481-rceb003-18/file>. Acesso em: 9 set. 2024.

3 BRASIL. **Lei nº 14.945, de 31 de julho de 2024.** Altera a Lei nº 9.394, de 20 de dezembro de 1996 (Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional), a fim de definir diretrizes para o ensino médio, e as Leis nºs 14.818, de 16 de janeiro de 2024, 12.711, de 29 de agosto de 2012, 11.096, de 13 de janeiro de 2005, e 14.640, de 31 de julho de 2023. Brasília, DF: Presidência da República, 2024. Disponível em: https://www.planalto.gov.br/ccivil_03/_ato2023-2026/2024/lei/14945.htm. Acesso em: 9 set. 2024.

4 BRASIL. [Constituição (1988)]. **Constituição da República Federativa do Brasil de 1988.** Brasília, DF: Presidência da República, [2024]. Disponível em: http://www.planalto.gov.br/ccivil_03/constituicao/constituicao.htm. Acesso em: 9 set. 2024.

5 BRASIL. **Lei nº 9.394, de 20 de dezembro de 1996.** Estabelece as diretrizes e bases da educação nacional. Brasília, DF: Presidência da República, [2024]. Disponível em: https://www.planalto.gov.br/ccivil_03/leis/l9394.htm. Acesso em: 9 set. 2024.

6 BRASIL. Ministério da Educação. Conselho Nacional de Educação. **Resolução CNE/CEB nº 3, de 26 de junho de 1998.** Institui as Diretrizes Curriculares Nacionais para o Ensino Médio. Brasília, DF: MEC: CNE, 1998. Disponível em: http://portal.mec.gov.br/cne/arquivos/pdf/rceb03_98.pdf. Acesso em: 9 set. 2024.

7 BRASIL. Ministério da Educação. **Parâmetros Curriculares Nacionais: ensino médio.** Brasília, DF: MEC, 2000, p. 4. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/blegais.pdf>. Acesso em: 9 set. 2024.

8 BRASIL. **Lei nº 13.005, de 25 de junho de 2014.** Aprova o Plano Nacional da Educação – PNE e dá outras providências. Brasília, DF: Presidência da República, [2024]. Disponível em: https://www.planalto.gov.br/ccivil_03/_ato2011-2014/2014/lei/l13005.htm. Acesso em: 9 set. 2024.

- **2017:** A lei nº 13.415 apresenta alterações para até a atual legislação vigente⁹, estabelecendo a ampliação da carga horária mínima, e propõe um currículo composto da BNCC e dos itinerários formativos.
- **2018:** A publicação da resolução nº 3¹⁰ atualiza as Diretrizes Curriculares Nacionais para o Ensino Médio, de 1998. Entre as alterações na organização curricular, estão que os currículos serão compostos de uma formação geral básica, com carga horária máxima de 1800 horas, e por itinerários formativos, com carga horária de 1200 horas. A formação geral básica será composta de competências e habilidades previstas na BNCC. A partir dessa resolução e da lei de 2017, fica estabelecido o chamado Novo Ensino Médio.
- **2023:** O Novo Ensino Médio é suspenso, e são abertas consultas públicas para estabelecer a nova estrutura do Ensino Médio.
- **2024:** Pela lei nº 14.945¹¹, fica estabelecido que o Ensino Médio será composto de uma formação geral básica, com carga horária de 2400 horas, e pelos itinerários formativos, com carga horária prevista de 600 horas.

Na atual estrutura do Ensino Médio, os componentes curriculares Língua Portuguesa, Matemática, Língua Inglesa, Arte, Educação Física, Biologia, Física, Química, História, Geografia, Filosofia e Sociologia deverão ser obrigatórios nos três anos, e os itinerários formativos vão se restringir às áreas previstas na BNCC.

A Base Nacional Comum Curricular (BNCC)

A BNCC define um conjunto de aprendizagens essenciais que os estudantes brasileiros devem desenvolver durante a Educação Básica, independentemente da região onde vivem. Com isso, busca-se reduzir as desigualdades históricas estabelecidas, além de orientar a elaboração de um currículo específico de cada escola ou rede escolar, pública ou privada, e instruir as matrizes de referência das avaliações e dos exames externos. O principal objetivo é garantir que todos os estudantes brasileiros tenham a mesma oportunidade de aprender o que é considerado essencial. O documento é exclusivo à educação escolar e está orientado por princípios que visam a uma formação humana integral e a uma sociedade mais justa, democrática e inclusiva.

Uma das características desse documento é que ele não define o modo como ensinar nem impede que sejam contempladas, no dia a dia escolar, as especificidades regionais. Assim, a BNCC estabelece um conjunto de conhecimentos básicos que devem ser assegurados, sem interferir na diversidade cultural e regional e na autonomia dos educadores.

Essas aprendizagens essenciais devem coexistir para assegurar aos estudantes o desenvolvimento de dez competências gerais no decorrer da Educação Básica.

Em articulação com as competências gerais e com as áreas do conhecimento em que o Ensino Médio está organizado, nomeadamente, Linguagens e suas Tecnologias, Matemática e suas Tecnologias, Ciências da Natureza e suas Tecnologias e Ciências Humanas e Sociais Aplicadas, a BNCC define competências específicas para cada uma dessas áreas e habilidades que lhes correspondem.

Nesta coleção, buscou-se articular, em diversos momentos, abordagens que integrassem o desenvolvimento de competências gerais e competências específicas e habilidades da área de Matemática e suas Tecnologias. Nas **Orientações específicas**, serão apresentadas essas articulações e como elas estão sendo contempladas no Livro do estudante.

As competências gerais

A seguir, estão listadas as dez competências gerais da Educação Básica definidas pela BNCC.

- 1 Valorizar e utilizar os conhecimentos historicamente construídos sobre o mundo físico, social, cultural e digital para entender e explicar a realidade, continuar aprendendo e colaborar para a construção de uma sociedade justa, democrática e inclusiva.
- 2 Exercitar a curiosidade intelectual e recorrer à abordagem própria das ciências, incluindo a investigação, a reflexão, a análise crítica, a imaginação e a criatividade, para investigar causas, elaborar e testar hipóteses, formular e resolver problemas e criar soluções (inclusive tecnológicas) com base nos conhecimentos das diferentes áreas.
- 3 Valorizar e fruir as diversas manifestações artísticas e culturais, das locais às mundiais, e também participar de práticas diversificadas da produção artístico-cultural.
- 4 Utilizar diferentes linguagens – verbal (oral ou visual-motora, como Libras, e escrita), corporal, visual, sonora e digital –, bem como conhecimentos das linguagens artística, matemática e científica, para se expressar e partilhar informações, experiências, ideias e sentimentos em diferentes contextos e produzir sentidos que levem ao entendimento mútuo.
- 5 Compreender, utilizar e criar tecnologias digitais de informação e comunicação de forma crítica, significativa, reflexiva e ética nas diversas práticas sociais (incluindo as escolares) para se comunicar, acessar e disseminar informações, produzir conhecimentos, resolver problemas e exercer protagonismo e autoria na vida pessoal e coletiva.

⁹ BRASIL. **Lei nº 13.415, de 16 de fevereiro de 2017.** Altera as Leis nº 9.394, de 20 de dezembro de 1996, que estabelece as diretrizes e bases da educação nacional, e 11.494, de 20 de junho 2007, que regulamenta o Fundo de Manutenção e Desenvolvimento da Educação Básica e de Valorização dos Profissionais da Educação, a Consolidação das Leis do Trabalho [...]. Brasília, DF: Presidência da República, [2023]. Disponível em: https://www.planalto.gov.br/ccivil_03/_Ato2015-2018/2017/Lei/L13415.htm?msclid=99fb7879d0c211ec91a329a85274182b. Acesso em: 7 set. 2024.

¹⁰ BRASIL, ref. 2.

¹¹ BRASIL, ref. 3.

- 6 Valorizar a diversidade de saberes e vivências culturais e apropriar-se de conhecimentos e experiências que lhe possibilitem entender as relações próprias do mundo do trabalho e fazer escolhas alinhadas ao exercício da cidadania e ao seu projeto de vida, com liberdade, autonomia, consciência crítica e responsabilidade.
- 7 Argumentar com base em fatos, dados e informações confiáveis, para formular, negociar e defender ideias, pontos de vista e decisões comuns que respeitem e promovam os direitos humanos, a consciência socioambiental e o consumo responsável em âmbito local, regional e global, com posicionamento ético em relação ao cuidado de si mesmo, dos outros e do planeta.
- 8 Conhecer-se, apreciar-se e cuidar de sua saúde física e emocional, compreendendo-se na diversidade humana e reconhecendo suas emoções e as dos outros, com autocrítica e capacidade para lidar com elas.
- 9 Exercitar a empatia, o diálogo, a resolução de conflitos e a cooperação, fazendo-se respeitar e promovendo o respeito ao outro e aos direitos humanos, com acolhimento e valorização da diversidade de indivíduos e de grupos sociais, seus saberes, identidades, culturas e potencialidades, sem preconceitos de qualquer natureza.
- 10 Agir pessoal e coletivamente com autonomia, responsabilidade, flexibilidade, resiliência e determinação, tomando decisões com base em princípios éticos, democráticos, inclusivos, sustentáveis e solidários¹².

A BNCC e os currículos

Considerando os múltiplos conhecimentos desenvolvidos pela humanidade ao longo do tempo, o currículo escolar é aquele que seleciona e organiza o que os estudantes devem aprender, regulando as práticas didáticas que se desenvolvem na sala de aula¹³. Nesse sentido, existem diversos fatores que contribuem para a elaboração do currículo escolar, como as políticas educativas nacionais, as secretarias de Educação de estados e municípios, as escolas e os professores. Embora cada um desses fatores assuma a responsabilidade de concretizar o currículo nos diversos níveis, todos eles deveriam trabalhar para atingir as mesmas metas educacionais.

Considerada uma das principais políticas curriculares nacionais, a BNCC é o documento que define as **aprendizagens essenciais** que todos os estudantes devem desenvolver ao longo da Educação Básica¹⁴. Com base nesse documento, são as redes de ensino e as escolas as encarregadas de definir seu currículo escolar. Para isso, devem adequar as orientações da BNCC às realidades de cada localidade e contexto escolar, assim como às características dos estudantes. Cada estado, por exemplo, tem autonomia para elaborar o próprio currículo, desde que siga as orientações propostas pela BNCC.

Nesse processo, as redes e as instituições escolares podem tomar decisões relativas a como vão contextualizar os conteúdos, definir as diversas formas de organização dos componentes curriculares, elaborar procedimentos de avaliação formativa, selecionar e produzir materiais e recursos para apoiar o processo de ensino-aprendizagem, entre outras ações. Assim, a BNCC e os currículos escolares desempenham papéis diferentes, mas complementares, e ambos reconhecem o compromisso da educação na formação e no desenvolvimento global do ser humano.

Considerando as especificidades e os desafios do Ensino Médio, a BNCC organiza as aprendizagens essenciais para esse nível em **áreas do conhecimento**, definindo, para cada uma delas, **competências específicas** e **habilidades** a ser desenvolvidas. Esse modo de organização, que privilegia a integração dos componentes curriculares, tem impacto na formulação do currículo sem excluir, necessariamente, componentes curriculares; o objetivo é fortalecer as relações e a integração entre eles para que os estudantes possam melhor compreender a complexidade da realidade e nela intervir. Tal organização impacta no trabalho dos professores, que são chamados a desenvolver atividades de planejamento e implementação de maneira cooperativa e conjunta com os de outros componentes curriculares.

A área de Matemática e suas Tecnologias

Na BNCC, a Matemática é destacada como uma área do conhecimento essencial para os estudantes da Educação Básica tanto por suas aplicações como por suas potencialidades na formação de cidadãos críticos e engajados. Para o Ensino Médio, a proposta é a de que as aprendizagens desenvolvidas na etapa anterior sejam consolidadas, ampliadas e aprofundadas¹⁵, com foco na construção de uma visão integrada da Matemática e de sua aplicação à realidade, bem como com outras áreas do conhecimento.

O documento também apresenta o compromisso que se deve ter no Ensino Médio com a ampliação do letramento matemático, definido como: “[...] as competências e habilidades de raciocinar, representar, comunicar e argumentar matematicamente, de modo a favorecer o estabelecimento de conjecturas, a formulação e a resolução de problemas em uma variedade de contextos, utilizando conceitos, procedimentos, fatos e ferramentas matemáticas”¹⁶.

¹² BRASIL, ref. 1, p. 9-10.

¹³ SACRISTÁN, José Gimeno. **Saberes e incertezas sobre o currículo**. Porto Alegre: Penso, 2013.

¹⁴ BRASIL, ref. 1.

¹⁵ BRASIL, ref. 1.

¹⁶ BRASIL, ref. 1, p. 266.

Dessa maneira, a proposta é a de que sejam desenvolvidas as habilidades mencionadas, visando à ampliação dos conhecimentos matemáticos e maior reflexão e abstração dos estudantes para resolver problemas mais complexos a fim de que sejam capazes de compreender o mundo e nele atuar.

Para isso, a BNCC cita os processos matemáticos de resolução de problemas, de investigação, de desenvolvimento de projetos e de modelagem. Esses processos podem ser tomados como formas de organização da aprendizagem matemática e consideram a análise de situações do cotidiano, de outras áreas do conhecimento e da própria Matemática.

Com base no que foi apresentado, a BNCC delimita competências específicas e habilidades relacionadas a cada uma delas para a área de Matemática e suas Tecnologias. Diferentemente do que é apresentado para o Ensino Fundamental, as competências específicas e habilidades para o Ensino Médio não focam conteúdos específicos, mas a formação geral dos estudantes para a cidadania e o protagonismo no mundo em que vivem. Essas competências não têm uma ordem preestabelecida, e a mobilização de uma ou mais delas pode ocorrer em determinadas situações. As habilidades podem contribuir para o desenvolvimento de uma ou mais competências específicas.

Competências específicas e habilidades da área de Matemática e suas Tecnologias para o Ensino Médio

Competência específica 1

Utilizar estratégias, conceitos e procedimentos matemáticos para interpretar situações em diversos contextos, sejam atividades cotidianas, sejam fatos das Ciências da Natureza e Humanas, das questões socioeconômicas ou tecnológicas, divulgados por diferentes meios, de modo a contribuir para uma formação geral¹⁷.

Essa competência propõe aos estudantes que utilizem seus conhecimentos matemáticos como ferramenta para interpretar e compreender as mais diversas situações e analisar criticamente e refletir acerca das informações relacionadas a elas.

Habilidades

(EM13MAT101) Interpretar criticamente situações econômicas, sociais e fatos relativos às Ciências da Natureza que envolvam a variação de grandezas, pela análise dos gráficos das funções representadas e das taxas de variação, com ou sem apoio de tecnologias digitais.

(EM13MAT102) Analisar tabelas, gráficos e amostras de pesquisas estatísticas apresentadas em relatórios divulgados por diferentes meios de comunicação, identificando, quando for o caso, inadequações que possam induzir a erros de interpretação, como escalas e amostras não apropriadas.

(EM13MAT103) Interpretar e compreender textos científicos ou divulgados pelas mídias, que empregam unidades de medida de diferentes grandezas e as conversões possíveis entre elas, adotadas ou não pelo Sistema Internacional (SI), como as de armazenamento e velocidade de transferência de dados, ligadas aos avanços tecnológicos.

(EM13MAT104) Interpretar taxas e índices de natureza socioeconômica (índice de desenvolvimento humano, taxas de inflação, entre outros), investigando os processos de cálculo desses números, para analisar criticamente a realidade e produzir argumentos.

(EM13MAT105) Utilizar as noções de transformações isométricas (translação, reflexão, rotação e composições destas) e transformações homotéticas para construir figuras e analisar elementos da natureza e diferentes produções humanas (fractais, construções civis, obras de arte, entre outras).

(EM13MAT106) Identificar situações da vida cotidiana nas quais seja necessário fazer escolhas levando-se em conta os riscos probabilísticos (usar este ou aquele método contraceptivo, optar por um tratamento médico em detrimento de outro etc.)¹⁸.

Competência específica 2

Propor ou participar de ações para investigar desafios do mundo contemporâneo e tomar decisões éticas e socialmente responsáveis, com base na análise de problemas sociais, como os voltados a situações de saúde, sustentabilidade, das implicações da tecnologia no mundo do trabalho, entre outros, mobilizando e articulando conceitos, procedimentos e linguagens próprios da Matemática¹⁹.

O desenvolvimento dessa competência visa contribuir para que os estudantes sejam atuantes na sociedade e possam identificar e investigar eventuais problemas na comunidade em que vivem, buscando e propondo ações para solucioná-los individual ou coletivamente.

Habilidades

(EM13MAT201) Propor ou participar de ações adequadas às demandas da região, preferencialmente para sua comunidade, envolvendo medições e cálculos de perímetro, de área, de volume, de capacidade ou de massa.

(EM13MAT202) Planejar e executar pesquisa amostral sobre questões relevantes, usando dados coletados diretamente ou em diferentes fontes, e comunicar os resultados por meio de relatório contendo gráficos e interpretação das medidas de tendência central e das medidas de dispersão (amplitude e desvio padrão), utilizando ou não recursos tecnológicos.

(EM13MAT203) Aplicar conceitos matemáticos no planejamento, na execução e na análise de ações envolvendo a utilização de aplicativos e a criação de planilhas (para o controle de orçamento familiar, simuladores de cálculos de juros simples e compostos, entre outros), para tomar decisões²⁰.

Competência específica 3

Utilizar estratégias, conceitos, definições e procedimentos matemáticos para interpretar, construir modelos e resolver problemas em diversos contextos, analisando a plausibilidade dos resultados e a adequação das soluções propostas, de modo a construir argumentação consistente²¹.

Essa competência está relacionada à ação de resolver situações-problema, contemplando tanto contextos próprios da Matemática

17 BRASIL, ref. 1, p. 532.

18 BRASIL, ref. 1, p. 533.

19 BRASIL, ref. 1, p. 534.

20 BRASIL, ref. 1, p. 534.

21 BRASIL, ref. 1, p. 535.

como de outras áreas do conhecimento e do cotidiano dos estudantes. Além da resolução, é proposto aos estudantes que elaborem problemas a fim de mobilizar os conceitos estudados e refletir sobre eles.

Habilidades

(EM13MAT301) Resolver e elaborar problemas do cotidiano, da Matemática e de outras áreas do conhecimento, que envolvem equações lineares simultâneas, usando técnicas algébricas e gráficas, com ou sem apoio de tecnologias digitais.

(EM13MAT302) Construir modelos empregando as funções polinomiais de 1ª ou 2ª graus, para resolver problemas em contextos diversos, com ou sem apoio de tecnologias digitais.

(EM13MAT303) Interpretar e comparar situações que envolvam juros simples com as que envolvem juros compostos, por meio de representações gráficas ou análise de planilhas, destacando o crescimento linear ou exponencial de cada caso.

(EM13MAT304) Resolver e elaborar problemas com funções exponenciais nos quais seja necessário compreender e interpretar a variação das grandezas envolvidas, em contextos como o da Matemática Financeira, entre outros.

(EM13MAT305) Resolver e elaborar problemas com funções logarítmicas nos quais seja necessário compreender e interpretar a variação das grandezas envolvidas, em contextos como os de abalos sísmicos, pH, radioatividade, Matemática Financeira, entre outros.

(EM13MAT306) Resolver e elaborar problemas em contextos que envolvem fenômenos periódicos reais (ondas sonoras, fases da lua, movimentos cíclicos, entre outros) e comparar suas representações com as funções seno e cosseno, no plano cartesiano, com ou sem apoio de aplicativos de álgebra e geometria.

(EM13MAT307) Empregar diferentes métodos para a obtenção da medida da área de uma superfície (reconfigurações, aproximação por cortes etc.) e deduzir expressões de cálculo para aplicá-las em situações reais (como o remanejamento e a distribuição de plantações, entre outros), com ou sem apoio de tecnologias digitais.

(EM13MAT308) Aplicar as relações métricas, incluindo as leis do seno e do cosseno ou as noções de congruência e semelhança, para resolver e elaborar problemas que envolvem triângulos, em variados contextos.

(EM13MAT309) Resolver e elaborar problemas que envolvem o cálculo de áreas totais e de volumes de prismas, pirâmides e corpos redondos em situações reais (como o cálculo do gasto de material para revestimento ou pinturas de objetos cujos formatos sejam composições dos sólidos estudados), com ou sem apoio de tecnologias digitais.

(EM13MAT310) Resolver e elaborar problemas de contagem envolvendo agrupamentos ordenáveis ou não de elementos, por meio dos princípios multiplicativo e aditivo, recorrendo a estratégias diversas, como o diagrama de árvore.

(EM13MAT311) Identificar e descrever o espaço amostral de eventos aleatórios, realizando contagem das possibilidades, para resolver e elaborar problemas que envolvem o cálculo da probabilidade.

(EM13MAT312) Resolver e elaborar problemas que envolvem o cálculo de probabilidade de eventos em experimentos aleatórios sucessivos.

(EM13MAT313) Utilizar, quando necessário, a notação científica para expressar uma medida, compreendendo as noções de

algarismos significativos e algarismos duvidosos, e reconhecendo que toda medida é inevitavelmente acompanhada de erro.

(EM13MAT314) Resolver e elaborar problemas que envolvem grandezas determinadas pela razão ou pelo produto de outras (velocidade, densidade demográfica, energia elétrica etc.).

(EM13MAT315) Investigar e registrar, por meio de um fluxograma, quando possível, um algoritmo que resolve um problema.

(EM13MAT316) Resolver e elaborar problemas, em diferentes contextos, que envolvem cálculo e interpretação das medidas de tendência central (média, moda, mediana) e das medidas de dispersão (amplitude, variância e desvio padrão)²².

Competência específica 4

Compreender e utilizar, com flexibilidade e precisão, diferentes registros de representação matemáticos (algébrico, geométrico, estatístico, computacional etc.), na busca de solução e comunicação de resultados de problemas²³.

Essa competência trata da utilização e da compreensão de diferentes tipos de registro na resolução de situações-problema, buscando expressar ideias matemáticas relacionadas e possibilitando a ampliação da capacidade dos estudantes de pensar matematicamente.

Habilidades

(EM13MAT401) Converter representações algébricas de funções polinomiais de 1ª grau em representações geométricas no plano cartesiano, distinguindo os casos nos quais o comportamento é proporcional, recorrendo ou não a *softwares* ou aplicativos de álgebra e geometria dinâmica.

(EM13MAT402) Converter representações algébricas de funções polinomiais de 2ª grau em representações geométricas no plano cartesiano, distinguindo os casos nos quais uma variável for diretamente proporcional ao quadrado da outra, recorrendo ou não a *softwares* ou aplicativos de álgebra e geometria dinâmica, entre outros materiais.

(EM13MAT403) Analisar e estabelecer relações, com ou sem apoio de tecnologias digitais, entre as representações de funções exponencial e logarítmica expressas em tabelas e em plano cartesiano, para identificar as características fundamentais (domínio, imagem, crescimento) de cada função.

(EM13MAT404) Analisar funções definidas por uma ou mais sentenças (tabela do Imposto de Renda, contas de luz, água, gás etc.), em suas representações algébrica e gráfica, identificando domínios de validade, imagem, crescimento e decréscimo, e convertendo essas representações de uma para outra, com ou sem apoio de tecnologias digitais.

(EM13MAT405) Utilizar conceitos iniciais de uma linguagem de programação na implementação de algoritmos escritos em linguagem corrente e/ou matemática.

(EM13MAT406) Construir e interpretar tabelas e gráficos de frequências com base em dados obtidos em pesquisas por amostras estatísticas, incluindo ou não o uso de *softwares* que inter-relacionem estatística, geometria e álgebra.

(EM13MAT407) Interpretar e comparar conjuntos de dados estatísticos por meio de diferentes diagramas e gráficos (histograma, de caixa (*box-plot*), de ramos e folhas, entre outros), reconhecendo os mais eficientes para sua análise²⁴.

22 BRASIL, ref. 1, p. 536-537.

23 BRASIL, ref. 1, p. 538.

24 BRASIL, ref. 1, p. 539.

Competência específica 5

Investigar e estabelecer conjecturas a respeito de diferentes conceitos e propriedades matemáticas, empregando estratégias e recursos, como observação de padrões, experimentações e diferentes tecnologias, identificando a necessidade, ou não, de uma demonstração cada vez mais formal na validação das referidas conjecturas²⁵.

O desenvolvimento dessa competência possibilita aos estudantes perceberem a natureza do raciocínio hipotético-dedutivo da Matemática e se apropriarem dessa ideia para raciocinar logicamente e validar proposições. Ao investigar, formular hipóteses e realizar tentativas de validá-las ou refutá-las, os estudantes buscam utilizar os conceitos matemáticos estudados em suas argumentações e, dessa maneira, estabelecer relações entre eles.

Habilidades

(EM13MAT501) Investigar relações entre números expressos em tabelas para representá-los no plano cartesiano, identificando padrões e criando conjecturas para generalizar e expressar algebricamente essa generalização, reconhecendo quando essa representação é de função polinomial de 1º grau.

(EM13MAT502) Investigar relações entre números expressos em tabelas para representá-los no plano cartesiano, identificando padrões e criando conjecturas para generalizar e expressar algebricamente essa generalização, reconhecendo quando essa representação é de função polinomial de 2º grau do tipo $y = ax^2$.

(EM13MAT503) Investigar pontos de máximo ou de mínimo de funções quadráticas em contextos envolvendo superfícies, Matemática Financeira ou Cinemática, entre outros, com apoio de tecnologias digitais.

(EM13MAT504) Investigar processos de obtenção da medida do volume de prismas, pirâmides, cilindros e cones, incluindo o princípio de Cavalieri, para a obtenção das fórmulas de cálculo da medida do volume dessas figuras.

(EM13MAT505) Resolver problemas sobre ladrilhamento do plano, com ou sem apoio de aplicativos de geometria dinâmica, para conjecturar a respeito dos tipos ou composição de polígonos que podem ser utilizados em ladrilhamento, generalizando padrões observados.

(EM13MAT506) Representar graficamente a variação da área e do perímetro de um polígono regular quando os comprimentos de seus lados variam, analisando e classificando as funções envolvidas.

(EM13MAT507) Identificar e associar progressões aritméticas (PA) a funções afins de domínios discretos, para análise de propriedades, dedução de algumas fórmulas e resolução de problemas.

(EM13MAT508) Identificar e associar progressões geométricas (PG) a funções exponenciais de domínios discretos, para análise de propriedades, dedução de algumas fórmulas e resolução de problemas.

(EM13MAT509) Investigar a deformação de ângulos e áreas provocada pelas diferentes projeções usadas em cartografia (como a cilíndrica e a cônica), com ou sem suporte de tecnologia digital.

(EM13MAT510) Investigar conjuntos de dados relativos ao comportamento de duas variáveis numéricas, usando ou não tecnologias da informação, e, quando apropriado, levar em conta a variação e utilizar uma reta para descrever a relação observada.

(EM13MAT511) Reconhecer a existência de diferentes tipos de espaços amostrais, discretos ou não, e de eventos, equiprováveis ou não, e investigar implicações no cálculo de probabilidades²⁶.

Os Temas Contemporâneos Transversais (TCTs)

De acordo com o documento **Temas Contemporâneos Transversais na BNCC**²⁷, os TCTs têm como objetivo contextualizar o que é ensinado, contribuindo com temas que sejam interessantes e relevantes para a formação dos cidadãos. Ao todo, são 15 temas distribuídos em seis macroáreas: Cidadania e Cívismo (Vida Familiar e Social; Educação para o Trânsito; Educação em Direitos Humanos; Direitos da Criança e do Adolescente; Processo de envelhecimento, respeito e valorização do Idoso); Meio Ambiente (Educação Ambiental; Educação para o Consumo); Saúde (Saúde; Educação Alimentar e Nutricional); Multiculturalismo (Diversidade Cultural; Educação para valorização do multiculturalismo nas matrizes históricas e culturais Brasileiras); Economia (Trabalho; Educação Financeira; Educação Fiscal); Ciência e Tecnologia (Ciência e Tecnologia).

Nas aulas de Matemática, as abordagens de questões sociais, por meio de conhecimentos matemáticos, ao mesmo tempo que possibilitam estabelecer relações com outras áreas do conhecimento, permitem contextualizações e reflexões críticas, além de conferir ao trabalho do professor a possibilidade de contribuir para a formação cidadã dos estudantes.

De acordo com a BNCC,

[...] cabe aos sistemas e redes de ensino, assim como às escolas, em suas respectivas esferas de autonomia e competência, incorporar aos currículos e às propostas pedagógicas a abordagem de temas contemporâneos que afetam a vida humana em escala local, regional e global, preferencialmente de forma transversal e integradora²⁸.

Nessa perspectiva, busca-se romper com a ideia de que a Matemática é uma ciência restrita à sala de aula e que não está relacionada à realidade dos estudantes. Assim, espera-se que os estudantes percebam a Matemática presente nos mais diferentes contextos de vida deles.

Nesta coleção, os TCTs são discutidos em diversos momentos, sempre conectando-os aos conceitos matemáticos em estudo e, por vezes, estabelecendo relações com outras áreas do conhecimento. Por exemplo, em uma proposta de estudo de conceitos estatísticos, envolvendo a situação de *bullying*, em especial no ambiente escolar, tratou-se também dos TCTs Direitos da Criança e do Adolescente e Saúde.

Fundamentos teóricos e metodológicos da coleção

Em uma sociedade globalizada, o ensino de Matemática tem papel fundamental na formação de cidadãos conscientes, críticos e participativos. O incentivo a práticas reflexivas no estudo da Matemática escolar pode favorecer o desenvolvimento de estratégias para a resolução de problemas do dia a dia e a quebra de paradigmas.

25 BRASIL, ref. 1, p. 540.

26 BRASIL, ref. 1, p. 541.

27 BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Básica. **Temas Contemporâneos Transversais na BNCC**: contexto histórico e pressupostos pedagógicos. Brasília, DF: MEC/SEB, 2019. Disponível em: http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/implementacao/contextualizacao_temas_contemporaneos.pdf. Acesso em: 9 set. 2024.

28 BRASIL, ref. 1, p. 19.

A proposta didático-pedagógica desta coleção tem por objetivo contribuir para uma formação ampla dos estudantes, não apenas em aspectos cognitivos mas também em sua formação cidadã e na observância no mundo do trabalho. Nela, procurou-se articular, sempre que possível, temas contemporâneos e interdisciplinares a conceitos matemáticos, oferecendo ao professor diferentes estratégias metodológicas e o aprimoramento de sua prática pedagógica. O tratamento dado aos conteúdos matemáticos, em sala de aula, deve considerar os recursos disponíveis para que o trabalho seja efetuado.

A fim de sinalizar a proposta didático-pedagógica que fundamentou a elaboração desta coleção, apresentam-se abordagens relacionadas à concepção de ensino e de aprendizagem de Matemática no Ensino Médio.

O ensino de Matemática

O ensino de Matemática precisa privilegiar a exploração de uma variedade de noções matemáticas que contribuam para que os estudantes construam e desenvolvam seu conhecimento matemático, sem perder o prazer, o interesse e a curiosidade. Por isso, é importante que esse trabalho seja realizado com abordagens que valorizem a integração entre a Matemática e outras áreas do conhecimento, a proposição de temáticas sociais nas atividades a ser desenvolvidas e o incentivo ao uso adequado das novas tecnologias da informação e comunicação no estudo.

De acordo com a BNCC, deve-se ter o compromisso de promover ações que ampliem o letramento matemático, o qual, segundo o Programme for International Student Assessment (Pisa), conforme definição publicada pelo Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira (Inep) no **Relatório Nacional do PISA 2012**, consiste na

[...] capacidade do indivíduo de formular, aplicar e interpretar a matemática em diferentes contextos, o que inclui o raciocínio matemático e a aplicação de conceitos, procedimentos, ferramentas e fatos matemáticos para descrever, explicar e prever fenômenos. Além disso, o letramento em matemática ajuda os indivíduos a reconhecer a importância da matemática do mundo, e agir de maneira consciente ao ponderar e tomar decisões necessárias a todos os cidadãos construtivos, engajados e reflexivos²⁹.

Para isso, é necessário criar um ambiente propício em sala de aula que tenha como base o diálogo e a comunicação. Assim, o professor deve incentivar os estudantes a se comunicar (oralmente, por exemplo) ou a registrar (por meio de textos, esquemas ou outras formas de registro) suas ideias matemáticas. O hábito de expressá-las pode ser desenvolvido questionando os estudantes sobre como pensaram para realizar determinada atividade ou para resolver algum problema ou desafio.

Em relação às características das intervenções por parte do professor, elas devem ser construtivas, dando oportunidade aos estudantes de reverem suas posições e perceberem as incoerências, quando existirem, contribuindo, assim, para a construção de seus conhecimentos. O professor pode fazer algumas intervenções por

meio de perguntas, por exemplo: Como você obteve esse valor? Que estratégias você utilizou? É possível obter esse mesmo resultado por meio de outra estratégia? A estratégia que você utilizou nessa situação pode ser empregada em que outros casos?

É importante que os estudantes sejam incentivados a buscar diferentes maneiras de pensar, ampliando sua capacidade cognitiva e sua atitude diante de novas situações. Aliado a isso, ressalta-se a realização de atividades coletivas e cooperativas, o que favorece a socialização, a troca de ideias, a observação de outros pontos de vista, o reconhecimento de outras maneiras de pensar e de realizar as atividades.

Aprendizagem matemática

A Matemática no contexto escolar é, muitas vezes, temida e considerada pouco importante para uma parte de estudantes que não percebem a conexão entre o que aprende na sala de aula e o mundo além dos muros da escola. Por isso, é essencial despertar nos estudantes o prazer de aprender Matemática, mostrando que os conceitos matemáticos devem ser compreendidos como elementos que contribuirão para sua vida social.

Quando a abordagem é feita exclusivamente de maneira expositiva, a Matemática escolar tende a afastar os estudantes e precisa ser “reinventada” a fim de propiciar ensino e aprendizagem significativos, criativos, práticos e contextualizados de acordo com a realidade social e cultural dos estudantes.

Os autores Ausubel, Novak e Hanesian³⁰ distinguem a aprendizagem significativa de outras aprendizagens ao proporem que, para a ocorrência de aprendizagem significativa, por exemplo, além de considerar os conhecimentos prévios dos estudantes, é necessária a existência de uma predisposição positiva deles para aprender e materiais de ensino potencialmente significativos.

[...] a aprendizagem significativa ocorre quando a tarefa de aprendizagem implica relacionar, de forma não arbitrária e substantiva (não literal), uma nova informação a outras com as quais o aluno já esteja familiarizado, e quando o aluno adota uma estratégia correspondente para assim proceder. Aprendizagem automática, por sua vez, ocorre se a tarefa consistir de associações puramente arbitrárias, como na associação de pares, quebra-cabeça, labirinto, ou aprendizagem de séries e quando falta ao aluno o conhecimento prévio relevante necessário para tornar a tarefa potencialmente significativa, e também (independentemente do potencial significativo contido na tarefa) se o aluno adota uma estratégia apenas para internalizá-la de uma forma arbitrária, literal (por exemplo, como uma série arbitrária de palavras)³¹.

A disposição dos estudantes para aprender não depende somente de sua estrutura cognitiva mas também de motivação e materiais disponíveis no ambiente educacional. Os recursos materiais correspondem ao espaço físico que circunda os estudantes e aos materiais dos quais fazem uso durante a realização das atividades. Os recursos de caráter afetivo dizem respeito às relações estabelecidas entre os estudantes e entre os estudantes e o professor.

Situações que envolvem o cotidiano dos estudantes tendem a motivá-los para o estudo dos conteúdos matemáticos e podem

29 BRASIL. Ministério da Educação. Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira. **Relatório Nacional PISA 2012**: resultados brasileiros. Brasília, DF: MEC: Inep, 2012. p. 18. Disponível em: http://download.inep.gov.br/acoes_internacionais/pisa/resultados/2014/relatorio_nacional_pisa_2012_resultados_brasileiros.pdf. Acesso em: 9 set. 2024.

30 AUSUBEL, David Paul; NOVAK, Joseph Donald; HANESIAN, Helen. **Psicologia educacional**. 2. ed. Rio de Janeiro: Interamericana, 1980.

31 AUSUBEL; NOVAK; HANESIAN, ref. 30, p. 23.

constituir elementos motivacionais em sua predisposição para aprender. Ambientes educacionais diferenciados, bem como o uso de computadores, telefones celulares e *tablets* com fins pedagógicos também podem motivar os estudantes. Esses recursos tendem a promover a interação entre os pares e possibilitar a elaboração de estratégias e de modos de representação por meio de expressões textual, gráfica e oral. No entanto, é preciso destacar que a ausência desses recursos não pode limitar o trabalho do professor nem inviabilizar o processo de aprendizagem.

A argumentação e a inferência

Assim como em outras áreas do conhecimento, a área de Matemática e suas Tecnologias apresenta características próprias que definem o tipo de conhecimento por ela desenvolvida. O modo de desenvolver **raciocínios matemáticos** é uma dessas características. Nesse tipo particular de raciocínio, a argumentação matemática, a produção de inferências e o pensamento computacional têm um papel central.

A **argumentação matemática** é indispensável para que os estudantes possam assimilar significados dos objetos matemáticos e desenvolver a racionalidade matemática. Para envolver os estudantes em atividades de argumentação matemática, é necessário que o professor ofereça oportunidades para explorar os porquês de determinados resultados ou situações; resolver desacordos por meio de explicações e justificativas válidas de um ponto de vista matemático; formular conjecturas, investigar sua plausibilidade e refutá-las ou validá-las por meio da procura de contraexemplos ou a avaliação de demonstrações matemáticas, respectivamente³².

Fica evidente que, para desenvolver as capacidades argumentativas dos estudantes, é necessário propor tarefas que devem ir além da simples manipulação de símbolos ou procedimentos matemáticos. É necessário desafiá-los com atividades investigativas que tenham potencial de originar discussões matemáticas, confrontar ideias e resoluções e justificar suas soluções. Nessa direção, a BNCC propõe, também, o uso de diferentes tecnologias para que os estudantes do Ensino Médio investiguem e explorem conjecturas vinculadas a conceitos e propriedades matemáticas, observem padrões, analisem dados e informações de maneira crítica, modelem e solucionem problemas da vida cotidiana. Nesse processo, é importante propor uma trajetória que leve os estudantes a compreender como se originam e se formulam as argumentações matemáticas. É fundamental que eles aprendam a distinguir uma conjectura de uma afirmação demonstrada; compreendam que a apresentação de vários exemplos não garante a validade de uma conjectura; e vivenciem a elaboração de demonstrações matemáticas como um modo de explorar o motivo da validade de uma conjectura.

A reflexão a respeito da maneira como se estruturam as argumentações matemáticas leva a outro ponto central dos raciocínios matemáticos: a produção de **inferências**. Inferir é o processo por meio do qual se derivam conclusões a partir de certas premissas. Em Lógica, podem-se distinguir três tipos de inferência: as **deduções**,

que partem de uma regra geral e uma premissa para inferir um caso particular; as **indução**es, que partem de premissas menores e buscam sua generalização mediante a experimentação e a comprovação; e as **abduções**, que partem de dados que descrevem uma situação e colocam uma hipótese que melhor explique ou esclareça esses dados. Embora a Matemática, quando considerada disciplina formal, muitas vezes se apoie em inferências dedutivas, os três tipos de inferência têm um papel relevante quando se consideram os processos de produção dos conhecimentos matemáticos.

Pensamento computacional

Atualmente, para que os estudantes possam exercer sua plena cidadania, de modo a contribuir com um mundo mais justo e menos desigual, é necessário desenvolver competências e habilidades relacionadas ao pensamento computacional. Diferentemente do que se possa presumir, o pensamento computacional não diz respeito a navegar pela internet na busca de informações. Brackmann propõe em sua tese que

[...] O Pensamento Computacional é uma distinta capacidade de criativa, crítica e estratégica humana de saber utilizar os fundamentos da Computação, nas mais diversas áreas do conhecimento, com a finalidade de identificar e resolver problemas, de maneira individual ou colaborativa, através de passos claros, de tal forma que uma pessoa ou uma máquina possam executá-los eficazmente [...] ³³.

O pensamento computacional é um dos eixos que deve ser trabalhado na Educação Básica, além do mundo digital e da cultura digital. O parecer nº 2, de 12 de fevereiro de 2022, referente às normas sobre computação na Educação Básica, define que o pensamento computacional

[...] refere-se à habilidade de compreender, analisar definir, modelar, resolver, comparar e automatizar problemas e suas soluções de forma metódica e sistemática, através do desenvolvimento da capacidade de criar e adaptar algoritmos, aplicando fundamentos da computação para alavancar e aprimorar a aprendizagem e o pensamento criativo e crítico nas diversas áreas do conhecimento ³⁴.

Mobilizar o pensamento computacional contribui para o desenvolvimento do pensamento abstrato, distinguindo níveis de abstração nos problemas para poder solucioná-los; do pensamento algorítmico, que requer encontrar uma série de passos eficazes para resolver o problema; do pensamento lógico, formulando e excluindo hipóteses; e do pensamento dimensionável, vinculado à decomposição de um problema em pequenas partes.

Promover o desenvolvimento do pensamento computacional é uma oportunidade rica de os estudantes desenvolverem o raciocínio matemático. Para isso, o professor pode utilizar diferentes tecnologias, como planilhas eletrônicas, *softwares* de geometria dinâmica, calculadoras e aplicativos que permitam investigar situações matemáticas, auxiliando na elaboração e na interpretação de algoritmos,

32 BOAVIDA, Ana Maria; GOMES, Anabela; MACHADO, Sílvia. Argumentação na aula de matemática: olhares sobre um projeto de investigação colaborativa. **Educação e Matemática**, Lisboa, n. 70, p. 18-26, 2002. Disponível em: <https://em.apm.pt/index.php/em/article/view/1141/1182>. Acesso em: 9 set. 2024.

33 BRACKMANN, Christian Puhlmann. **Desenvolvimento do pensamento computacional através de atividades desplugadas na educação básica**. 2017. Tese (Programa de Pós-Graduação em Informática na Educação) – Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2017. p. 29. Disponível em: <https://lume.ufrgs.br/bitstream/handle/10183/172208/001054290.pdf?sequence=1&isAllowed=y>. Acesso em: 9 set. 2024.

34 BRASIL. Ministério da Educação. Conselho Nacional de Educação. **Parecer CNE/CEB nº 2, de 12 de fevereiro de 2022**. Brasília, DF: MEC: CNE, 2022. Disponível em: http://portal.mec.gov.br/index.php?option=com_docman&view=download&alias=235511-pceb002-22&category_slug=fevereiro-2022-pdf&Itemid=30192. Acesso em: 12 set. 2024.

além de propor a utilização de alguma linguagem de programação e o uso de registros por meio de fluxograma. Nesta coleção há momentos que possibilitam ao professor incentivar os estudantes no desenvolvimento do pensamento computacional, como na realização de atividades em que o pensamento computacional é trabalhado de maneira desplugada (sem o uso de computador), ou no estudo de noções de linguagem de programação, em que se propõe, por exemplo, o trabalho com a linguagem Scratch.

Metodologias ativas e algumas tendências em educação matemática

As profundas modificações que vêm ocorrendo em nossa sociedade, principalmente aquelas vinculadas ao desenvolvimento tecnológico, desafiam os professores a adotar novas metodologias. Para Moran,

[...] as metodologias precisam acompanhar os objetivos pretendidos. Se queremos que os alunos sejam proativos, precisamos adotar metodologias em que os alunos se envolvam em atividades cada vez mais complexas, em que tenham que tomar decisões e avaliar os resultados, com apoio de materiais relevantes. Se queremos que sejam criativos, eles precisam experimentar inúmeras novas possibilidades de mostrar sua iniciativa³⁵.

Assim, as chamadas **metodologias ativas** podem se tornar um meio de alcançar tais objetivos. Nessas metodologias, são empregadas estratégias de ensino em que os estudantes assumem uma postura ativa na problematização e na análise de situações complexas, enquanto o professor assume o papel de mediador de discussões e de orientador dos estudantes. A seguir, são apresentadas brevemente algumas dessas metodologias.

A **sala de aula invertida** consiste em uma metodologia ativa de ensino em que o professor, de antemão, disponibiliza o conteúdo que será abordado na sala de aula, por meio de vídeos, textos, áudios, entre outros materiais. Aos estudantes, cabe a responsabilidade de estudar em casa o material proposto, anotando dúvidas que possam surgir nesse momento. Durante a aula, o professor assume o papel de mediador, ao esclarecer as dúvidas que os estudantes tiveram, e propõe atividades relacionadas ao conteúdo. Após a aula, os estudantes devem revisar o conteúdo trabalhado, e o professor deve preparar novos materiais a ser propostos.

Na **aprendizagem baseada em projetos** (*Project-Based Learning – ABP*), o objetivo é trabalhar problemas e/ou questões da realidade, principalmente, associados ao cotidiano dos estudantes. Nessa abordagem, os estudantes se envolvem em um trabalho colaborativo, no qual buscam respostas a partir de seus conhecimentos prévios, enquanto constroem novos conhecimentos, com a mediação do professor. Outro ponto importante é o desenvolvimento do pensamento crítico e da comunicação, por meio do trabalho com essa metodologia, uma vez que os estudantes têm de pesquisar e selecionar informações, propor soluções com base no que foi encontrado e discutido e, por fim, comunicar os resultados.

Na **aprendizagem baseada em problemas** (*Problem-Based Learning – PBL*), os estudantes têm como ponto de partida um problema que precisam solucionar com os conhecimentos que têm *a priori*. Em grupos, eles exploram o problema, levantam hipóteses, identificam o que sabem e o que não sabem e delegam responsabilidades

a cada um dos integrantes do grupo, na busca pelas respostas que faltam. Em um segundo momento, após o estudo autônomo, os estudantes compartilham o que encontraram, ensinando uns aos outros. O professor, nessa metodologia, tem o papel de propor os problemas aos estudantes e mediar a interação entre eles.

A **rotação por estações** consiste em tornar a sala de aula uma espécie de circuito de aprendizagem, em que os estudantes, organizados em pequenos grupos, passam por todas as estações, realizando as atividades que são propostas. As atividades devem ser independentes umas das outras; no entanto, devem atender a um objetivo principal. Geralmente, uma das atividades da estação envolve o uso de tecnologia. O papel do professor nessa metodologia é escolher as atividades, que podem trabalhar diferentes competências e habilidades, e mediar as discussões que acontecem nos pequenos grupos. Os estudantes devem se envolver com a atividade proposta e resolvê-la, e cada grupo tem um tempo predeterminado para permanecer em cada uma das estações.

Além disso, no campo da educação matemática, são propostas práticas de ensino e de aprendizagem, comumente denominadas **tendências em educação matemática**, em que os estudantes também são levados a assumir uma postura de protagonistas dos processos de ensino-aprendizagem. A seguir, são apresentadas algumas dessas tendências.

Resolução de problemas

Nessa perspectiva, a proposição de um problema, que, para Onuchic e Allevato “é tudo aquilo que não se sabe fazer, mas que se está interessado em fazer”³⁶, pode ser o ponto de partida para a construção de um novo conceito matemático. Para isso, é necessária uma prática na qual o conhecimento é construído por meio de interações sociais entre os próprios estudantes e entre os estudantes e o professor.

As autoras Onuchic e Allevato³⁷ elaboraram, com base nos resultados de suas pesquisas, um roteiro para auxiliar o professor no trabalho com a resolução de problemas. Esse roteiro considera nove etapas para a organização da aula.

- 1ª) Seleção do problema, denominado problema gerador.
- 2ª) Leitura individual dos estudantes.
- 3ª) Leitura em conjunto.
- 4ª) Resolução do problema pelos estudantes de modo cooperativo e colaborativo.
- 5ª) Observação e incentivo por parte do professor.
- 6ª) Registro das resoluções na lousa.
- 7ª) Plenária, com discussão das diferentes resoluções registradas na lousa.
- 8ª) Busca de consenso em relação ao resultado correto.
- 9ª) Formalização do conteúdo, com apresentação formal dos conceitos, princípios ou procedimentos construídos no decorrer da resolução do problema.

Espera-se que os estudantes, ao resolverem os problemas, se tornem participantes ativos de sua aprendizagem, inserindo-se em um contexto no qual o estudo da Matemática ocorre em um movimento que possibilita fazer análises, discussões, conjecturas, construção de conceitos e formulação de ideias. E o professor, nessa perspectiva, deve proporcionar aos estudantes a oportunidade de mobilizar seus conhecimentos prévios e gerenciar as informações disponíveis. Esse

35 MORÁN, José. Mudando a educação com metodologias ativas. In: SOUZA, Carlos Alberto de; MORALES, Ofelia Elisa Torres (org.). **Convergências midiáticas, educação e cidadania: aproximações jovens**. Ponta Grossa: Proex: UEPG, 2015. v. II, p. 15-33. p. 17. Disponível em: https://edisciplinas.usp.br/pluginfile.php/4941832/mod_resource/content/1/Artigo-Moran.pdf. Acesso em: 9 set. 2024.

36 ONUCHIC, Lourdes de La Rosa; ALLEVATO, Norma Suely Gomes. Pesquisa em resolução de problemas: caminhos, avanços e novas perspectivas. **Bolema**, Rio Claro, v. 25, n. 41, p. 73-98, 2011. p. 81. Disponível em: <https://www.periodicos.rc.biblioteca.unesp.br/index.php/bolema/article/view/5739/4625>. Acesso em: 9 set. 2024.

37 ONUCHIC; ALLEVATO, ref. 36, p. 83-85.

processo, além de contribuir para o desenvolvimento da autonomia dos estudantes, conduz à construção de conhecimentos. O professor deixa de ser o transmissor do conhecimento para ser o mediador, que guia os estudantes.

Modelagem matemática

Entre as diferentes perspectivas de modelagem matemática, optou-se, neste texto, pela apresentada por Almeida e Ferruzzi³⁸, uma alternativa pedagógica na qual, com base em situações oriundas da realidade, os conteúdos matemáticos se desenvolvem. De acordo com Almeida, Silva e Vertuan³⁹, trata-se de criar possibilidades para enxergar situações do cotidiano por lentes matemáticas, ou seja, de interpretar e analisar situações do cotidiano por meio de linguagem matemática, e, assim, tomar decisões acerca delas.

De modo geral, no desenvolvimento de uma atividade de modelagem, estão presentes ações como buscar informações sobre a situação inicial, identificar e selecionar variáveis, elaborar hipóteses, realizar simplificações, obter um modelo matemático, validar e solucionar problemas. Essas ações podem ser subsidiadas por orientações do professor.

Durante o processo de interpretação matemática da situação inicial, é necessário transformar a linguagem natural em linguagem matemática. Nessa direção, Almeida e Silva destacam que

[...] um aspecto importante numa atividade de modelagem matemática é a necessidade de os próprios alunos, a partir de uma situação-problema não matemática, fazerem a associação com conceitos e/ou procedimentos matemáticos capazes de conduzir a uma solução para o problema e possibilitar a sua análise⁴⁰.

Embora a construção de um modelo matemático seja importante em uma atividade de modelagem matemática, ela não é considerada o fim desse tipo de proposta, mas uma alternativa que possibilita a compreensão global da situação investigada e da Matemática utilizada.

Em sala de aula, uma atividade de modelagem matemática pode ser desenvolvida por estudantes reunidos em grupos; nesse caso, o professor tem o papel de orientador. A situação-problema pode emergir de uma proposta do professor, dos estudantes ou do material didático que está sendo utilizado.

Investigação matemática

Uma investigação matemática, de modo geral, consiste em um processo que transforma uma situação aberta em um ou mais problemas que podem ser resolvidos por meio de um olhar matemático.

Nessa perspectiva, estão presentes quatro momentos principais: 1) o reconhecimento e a exploração da situação e a formulação de questões; 2) a formulação de conjecturas; 3) a realização de testes e reformulações das conjecturas; 4) a argumentação e a

avaliação do trabalho realizado⁴¹. Uma tarefa desenvolvida segundo essa perspectiva aproxima o trabalho dos estudantes ao trabalho dos matemáticos, sendo tarefa de ambos estabelecer os problemas, as hipóteses para resolvê-los, testar suas hipóteses, refutá-las e elaborar suas conclusões.

Todo esse processo se desenvolve segundo um cronograma próprio e envolve a apresentação da situação de forma oral ou escrita, a execução individual ou em grupo, o desenvolvimento da investigação matemática e o momento no qual os estudantes relatam aos colegas e ao professor o trabalho realizado.

O papel do professor em uma investigação matemática é criar um ambiente propício ao diálogo, à interação e à pesquisa, despertando nos estudantes a vontade de resolver as atividades investigativas. Geralmente, em uma investigação, o ponto de partida é uma situação aberta, e a participação efetiva dos estudantes na formulação das questões que serão estudadas é fundamental, cabendo a quem investiga a sua concretização. É essa dinâmica que favorece o envolvimento dos estudantes no processo de aprendizagem⁴².

Tecnologias e a educação matemática

As novas tecnologias propiciam a criação de ambientes de aprendizagem que ampliam os canais de informações e, ao mesmo tempo, formam e transformam os processos de ensino-aprendizagem.

Howland, Jonassen e Marra⁴³ argumentam que a tecnologia deve ser entendida como uma parceira intelectual e uma ferramenta com a qual os estudantes possam aprender como organizar e resolver problemas, compreender novos fenômenos, construir modelos desses fenômenos e, dada uma situação não conhecida, definir metas e regular a própria aprendizagem.

Pesquisadores da área de educação matemática, como Borba e Penteado, destacam a importância das diferentes mídias na produção de conhecimento que é “produzido por um coletivo formado por seres-humanos-com-mídias ou seres-humanos-com-tecnologias”⁴⁴. Para esses pesquisadores, o computador provoca a reorganização da atividade humana. Muitas das novas tecnologias proporcionam interatividade, criando ambientes nos quais os estudantes têm acesso a resultados intermediários que não poderiam ser observados em situações tradicionais.

Com o *software* GeoGebra, por exemplo, podem ser exploradas estruturas algébricas ou geométricas de maneira dinâmica e avaliada a influência de seus parâmetros, além da visualização simultânea de suas diferentes representações.

Orientações para avaliação

Avaliar é uma ação que consiste em atribuir valor a algo. É proveniente do latim, *valere*, e pode ocorrer de maneira formal ou

38 ALMEIDA, Lourdes Maria Werle de; FERRUZZI, Elaine Cristina. Uma aproximação socioepistemológica para a modelagem matemática. **Alexandria**: Revista de Educação em Ciência e Tecnologia, Florianópolis, v. 2, n. 2, p. 117-234, 2009. Disponível em: <https://periodicos.ufsc.br/index.php/alexandria/article/view/37952/28980>. Acesso em: 9 set. 2024.

39 ALMEIDA, Lourdes Maria Werle de; SILVA, Karina Alessandra Pessoa da; VERTUAN, Rodolfo Eduardo. O registro gráfico em atividades de modelagem matemática: um estudo da conversão entre registros segundo a teoria dos registros de representação semiótica. In: SEMINÁRIO INTERNACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 2., 2009, São Paulo. **Anais** [...]. São Paulo: Uniban, 2009.

40 ALMEIDA, Lourdes Maria Werle de; SILVA, Karina Alessandra Pessoa da. Semiótica e as ações cognitivas dos alunos em atividades de modelagem matemática: um olhar sobre os modos de inferência. **Ciência e Educação**, Bauru, v. 18, p. 623-642, 2012. p. 627. Disponível em: <https://www.scielo.br/j/ciedu/a/v4qMkljq9MFHmddXVmSJ7nh/?format=pdf&lang=pt>. Acesso em: 9 set. 2024.

41 PONTE, João Pedro da. Investigar, ensinar e aprender. **Actas do ProfMat**, Lisboa: APM, 2003. (CD-ROM).

42 BERTINI, Luciane de Fatima; PASSOS, Cármen Lúcia Brancaglion. Uso da investigação matemática no processo de ensino e aprendizagem nas séries iniciais do ensino fundamental. In: ENCONTRO BRASILEIRO DE ESTUDANTES DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 12., 2008, Rio Claro. **Anais** [...]. Rio Claro: Unesp, 2008. p. 135-151. Disponível em: www2.rc.unesp.br/eventos/matematica/ebrapem2008/upload/135-1-A-gt8_bertini_ta.pdf. Acesso em: 9 set. 2024.

43 HOWLAND, Jane L.; JONASSEN, David; MARRA, Rose. **Meaningful learning with technology**. 4th ed. Boston: Pearson, 2011.

44 BORBA, Marcelo de Carvalho; PENTEADO, Miriam Godoy. **Informática e educação matemática**. 5. ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2016. (Tendências em Educação Matemática, p. 48).

informal nas salas de aula. A avaliação, no contexto escolar, refere-se à atribuição de um valor para o rendimento escolar. Ao se referir ao processo de aprendizagem, não se pode reduzir a avaliação a um momento único no qual esse “valor” é atribuído. Ele deve ser tratado como um processo realizado de maneira contínua e prolongada.

Concordamos com D'Ambrosio quando o autor afirma que a

[...] avaliação deve ser uma orientação para o professor na condução de sua prática docente e jamais um instrumento para reprovar ou reter alunos na construção de seus esquemas de conhecimento teórico e prático. Selecionar, classificar, filtrar, reprovar e aprovar indivíduos para isto ou aquilo não são missão de educador. Outros setores da sociedade devem se encarregar disso⁴⁵.

Segundo pesquisadores como Hadji⁴⁶, o objetivo da avaliação escolar é contribuir para a aprendizagem tanto dos estudantes como do professor. Com esse objetivo, a avaliação oferece ao professor informações sobre os possíveis conhecimentos prévios e o processo de aprendizagem dos estudantes, bem como de sua conduta de ensino em sala de aula. Aos estudantes, a avaliação possibilita uma análise sobre a própria aprendizagem, por permitir coletar informações sobre o percurso, os êxitos e as dificuldades apresentadas.

Para esse autor, o papel da avaliação é compreender a situação dos estudantes, de modo a regular os processos de ensino-aprendizagem. Quando realizada por esse aspecto, Hadji⁴⁷ considera que essa avaliação é do tipo formativa e deve ser integrada à ação de formação, sendo efetivada durante esse processo e centrada nos processos e nas atividades. Nesse caso, pode-se dizer que a avaliação também assume um caráter ipsativo, em que os estudantes são comparados a eles mesmos em vários momentos de sua formação.

Esse autor atribui, ainda, outro propósito para a avaliação – o de inventário –, ou seja, de certificar, de atestar a aquisição de determinado conhecimento. Nesse caso, a avaliação é somativa e costuma ser realizada depois de determinada ação de formação. Conforme Hadji⁴⁸, esse tipo de avaliação é centrado nos produtos, e os estudantes, muitas vezes, são comparados em relação aos outros. Assim, a avaliação também tem o caráter comparativo.

O terceiro propósito apresentado por Hadji⁴⁹ é o prognóstico, em que a avaliação tem por objetivo identificar características dos estudantes a fim de planejar ações formativas futuras. Nesse caso, a avaliação é do tipo diagnóstica, sendo realizada antes da ação de formação.

Pensando na avaliação como oportunidade de aprendizagem, o erro deve ser entendido como uma possibilidade de perceber como os estudantes lidam com uma questão ou com um conteúdo matemático. Isso pode orientar o trabalho do professor em sala de aula, além de servir de base para seu planejamento.

Cabe ao professor analisar os procedimentos que levaram os estudantes a errar. Santos e Buriasco consideram essa abordagem como “maneiras de lidar”. Esses autores defendem que cada estudante apresenta um modo de lidar com o conhecimento matemático. Os diferentes modos

[...] devem ser tomados como ponto de partida para construir um espaço de negociação e legitimação dos significados atribuídos a tais conhecimentos. Assim, as maneiras de lidar que são diferentes das consideradas corretas apresentam-se a favor da aprendizagem dos alunos, permitindo aos professores oportunidades de leitura do modo como os alunos pensam sobre um determinado conteúdo⁵⁰.

Recomenda-se ao professor afastar o paradigma de que o erro consiste em algo negativo, em que a falta é relacionada à ausência de conhecimento. O erro precisa ser trabalhado em sala de aula com o objetivo de ser transposto a fim de que os estudantes avancem na aprendizagem de conteúdos matemáticos.

Alguns instrumentos de avaliação

Como aprender é um processo diferente para cada pessoa, é necessário adotar práticas avaliativas em que o foco seja ter indícios de ocorrência de aprendizagem por meio das informações obtidas. Nesse sentido, diversos instrumentos de avaliação devem ser implementados nas aulas, em especial, nas aulas de Matemática.

Eles devem fornecer ao professor informações – quanto à capacidade dos estudantes para resolver situações-problema, saber utilizar a linguagem matemática, lidar com instrumentos de construção, valer-se de raciocínio matemático, comunicar-se por meio oral – para que ele possa, assim, inferir aspectos da aprendizagem e do raciocínio matemático.

Na sequência, são apresentados, de maneira sucinta, alguns instrumentos de avaliação que podem ser pertinentes às aulas de Matemática do Ensino Médio. No entanto, o professor pode ser criativo e investir em outros instrumentos que deem suporte para investigar indícios de aprendizagem dos estudantes.

Prova escrita e prova escrita em fases

A prova escrita é um instrumento de avaliação que tem o objetivo de estabelecer uma comunicação que permite ao professor fazer uma análise da competência escritora dos estudantes.

Na elaboração de uma prova escrita, o professor deve utilizar diferentes situações que promovam o uso de variadas representações e estratégias, além de estabelecer critérios de correção, considerando os “percursos” que os estudantes podem utilizar. Para isso, é necessário que os procedimentos sejam listados e pontuados, revendo-os sempre que preciso, antes ou durante a correção. A correção deve ser pautada nos procedimentos utilizados pelos estudantes para obter a solução. Um professor atento aos indícios de aprendizagem não deve considerar somente a solução final apresentada.

Combinando as vantagens da prova escrita com outras tarefas, De Lange⁵¹ propôs a prova escrita em duas fases. De maneira geral, esse instrumento segue os mesmos pressupostos da prova escrita usual, diferenciando-se no modo como os estudantes são solicitados a resolvê-la em dois momentos, ou em duas fases.

Na primeira fase, os estudantes respondem, em um tempo limitado, a questões discursivas que abordam conhecimentos que

45 D'AMBROSIO, Ubiratan. **Educação matemática**: da teoria à prática. 12. ed. Campinas: Papirus, 2005. (Perspectivas em Educação Matemática, p. 78).

46 HADJI, Charles. **A avaliação, regras do jogo**: das intenções aos instrumentos. 4. ed. Porto: Porto Editora, 1994.

47 HADJI, ref. 46.

48 HADJI, ref. 46.

49 HADJI, ref. 46.

50 SANTOS, João Ricardo Viola dos; BURIASCO, Regina Luzia Corio de. Da ideia de erro para as maneiras de lidar: caracterizando nossos alunos pelo que eles têm e não pelo que lhes falta. In: BURIASCO, Regina Luzia Corio de (org.). **Avaliação e educação matemática**. Recife: SBEM, 2008. p. 87-108. (Coleção SBEM, p. 105).

51 DE LANGE, Jan. **Framework for classroom assessment in mathematics**. Utrecht: Freudenthal Institute and National Center for Improving Student Learning and Achievement in Mathematics and Science, 1999.

deveriam ter aprendido, sem indicações do professor. A prova é recolhida e corrigida pelo professor, que deve inserir comentários e/ou questionamentos que permitam estabelecer uma comunicação escrita na qual os estudantes possam explicar o que fizeram. Nessa fase, o professor não valida as respostas, isto é, não coloca certo ou errado. Os comentários e questionamentos devem exigir reflexão por parte dos estudantes.

Na segunda fase, os estudantes recebem a prova novamente e a resolvem considerando os comentários e/ou questionamentos inseridos. Eles têm a oportunidade de fazer uma complementação do que não foi feito na primeira fase, reelaborando sua solução ou resolvendo a questão pela primeira vez. Essa fase é realizada em casa, quando os estudantes julgarem conveniente, e sem tempo limitado para a resolução. Após o período combinado entre as partes, a prova é devolvida ao professor para que ele faça uma nova correção.

Prova-escrita-com-cola

Usualmente, o ato de colar é considerado um dos problemas escolares que permeiam os mais diversos níveis de ensino, podendo ser entendido como desvio de conduta para tirar proveito ou ser considerado até mesmo um meio de corrupção. Diversas situações podem ser consideradas como cola, por exemplo: consultar a prova de um colega, trocar de prova ou conversar com um colega no momento da prova, fazer registro em folhas avulsas ou no próprio corpo para consultas durante a prova, consultar livros, cadernos ou aparelhos eletrônicos, entre outras.

O instrumento de avaliação prova-escrita-com-cola é uma maneira de utilizar um dos tipos de cola como recurso para possibilitar a aprendizagem. De acordo com Forster⁵², esse instrumento de avaliação foi nomeado dessa maneira justamente para evidenciar a ideia de que é possível trazer a cola “oficialmente” para a prova. Esse mesmo autor informa que uma prova-escrita-com-cola é basicamente

[...] uma prova escrita na qual o aluno tem a sua disposição um pedaço de papel, a cola, em que ele pode anotar as informações que julgar pertinentes para utilizar durante a realização da prova. Para que os alunos façam a cola, é desejável que seja estabelecido um padrão comum a todos. Por exemplo, é preciso definir as dimensões do papel, se o texto da cola deve ser manuscrito ou não, se deve ser feito individualmente ou não⁵³.

Esse tipo de instrumento de avaliação se diferencia de uma prova com consulta, principalmente, porque os registros devem estar em um papel com dimensões delimitadas, e os próprios estudantes devem produzi-los. Segundo Forster⁵⁴, a intenção é que eles utilizem esse instrumento como um meio de estudo, e a limitação do papel pode auxiliar nesse sentido, pois é necessário estudar o assunto para ter condições de recolher as informações mais relevantes para inserir na cola.

Atividades e trabalhos em grupo

O trabalho em grupo tem como objetivo a troca de ideias entre os estudantes, o que possibilita o desenvolvimento da colaboração, da cooperação, da comunicação e da argumentação.

Cohen e Lotan definem trabalho em grupo como “[...] alunos trabalhando juntos em grupos pequenos de modo que todos possam participar de uma atividade com tarefas claramente atribuídas”⁵⁵. O professor, além de explicar aos estudantes suas ações como solucionadoras de um problema, deve explicitar aspectos a ser considerados, tais como os objetivos do trabalho e os critérios de avaliação.

O trabalho em grupo não pode ser entendido pelos estudantes como a junção das carteiras e cada um realizando sua atividade individualmente. “Trabalho em grupo não é a mesma coisa que agrupamento por habilidade, no qual o professor divide a sala por critério acadêmico para que possa ensinar para grupos mais homogêneos”⁵⁶.

Para incentivar a participação dos integrantes dos grupos e avaliar o desempenho de cada um, o professor pode entregar uma única folha com a atividade proposta, solicitar que organizem as ideias em conjunto e as escrevam em uma folha avulsa. Durante esse processo, o professor pode circular entre os diferentes grupos de modo a perceber o que está sendo discutido, tendo cuidado para não dar a resposta quando sua ajuda for solicitada. Essa estratégia pode ser utilizada para avaliar os estudantes ao realizarem as atividades em grupo propostas nesta coleção, ao final das quais são solicitadas a elaboração de relatórios, peças publicitárias (fôlder, cartaz, vídeo ou *podcast*), escritas de textos em uma rede social ou blogue, *slides* etc. Uma maneira de auxiliar na avaliação dos argumentos é pedir aos estudantes que anotem o que considerarem relevante e que foi discutido entre eles.

Autoavaliação

De acordo com Haydt, a autoavaliação é “[...] uma forma de apreciação geralmente usada quando nos dedicamos a atividades significativas, decorrentes de um comportamento intencional”⁵⁷. Assim, para realizar uma autoavaliação escolar, os estudantes precisam analisar e interpretar seus conhecimentos, o que lhes permite refletir de maneira crítica sobre o que fizeram ou deixaram de fazer na construção desses conhecimentos.

Uma autoavaliação pode ser constituída de perguntas, respondidas de forma oral ou escrita, que possibilitam aos estudantes realizar uma interpretação pessoal sobre o percurso de sua aprendizagem, tendo consciência de suas dificuldades e limitações. Por meio dessa tomada de consciência, eles podem rever seu processo de estudo, além de auxiliar o professor no planejamento de suas intervenções futuras em sala de aula.

O professor pode realizar a autoavaliação ao longo do ano por meio de questionários ou fichas. Deve-se evitar entregar uma extensa ficha com perguntas que os estudantes necessitem responder, pois a autoavaliação caracteriza-se como um momento de reflexão e não pode se tornar algo exaustivo. De modo geral, devem ser propostas perguntas específicas e objetivas. Em uma ficha de autoavaliação, podem ser fornecidas algumas respostas-padrão para os estudantes assinalarem, como “sim”, “não” e “às vezes”. Entre os diferentes elementos presentes em uma autoavaliação,

52 FORSTER, Cristiano. **A utilização da prova-escrita-com-cola como recurso à aprendizagem**. 2016. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2016. Disponível em: <https://pos.uel.br/pecem/wp-content/uploads/2021/08/FORSTER-Cristiano.pdf>. Acesso em: 9 set. 2024.

53 FORSTER, ref. 52, p. 27.

54 FORSTER, ref. 52.

55 COHEN, Elizabeth G.; LOTAN, Rachel A. **Planejando o trabalho em grupo: estratégias para salas de aula heterogêneas**. 3. ed. Porto Alegre: Penso, 2017. p. 1. *E-book*.

56 COHEN; LOTAN, ref. 55, p. 1-2.

57 HAYDT, Regina Célia Cazaux. **Avaliação do processo ensino-aprendizagem**. 5. ed. São Paulo: Ática, 1995. p. 147.

podem ser privilegiados aspectos procedimentais, de conteúdo, de convivência social, de conduta dos estudantes, entre outros. Assim, a seção **O que estudei**, organizada ao final de cada Unidade da coleção, constitui um instrumento de autoavaliação.

O papel do professor de Matemática

Na sala de aula, o professor é o agente condutor das situações instrucionais e interacionais. Confirmando o que foi apresentado nos **Parâmetros Curriculares Nacionais: matemática**⁵⁸, com o avanço das tecnologias de informação, à medida que o papel dos estudantes foi se redefinindo diante do saber, o papel do professor que ensina Matemática foi se redimensionando. Os estudantes são protagonistas da construção de sua aprendizagem, e o professor é o organizador, o facilitador, o incentivador, o mediador entre o saber matemático e os estudantes. Utilizando diferentes práticas, o professor, em sala de aula, articula o conhecimento matemático com a formação da cidadania, promovendo não só a formação integral dos estudantes mas também importantes mudanças sociais.

O professor mediador não oferece respostas prontas; ele dialoga. Não há como imaginar uma situação instrucional que não seja baseada no diálogo. O professor questiona, é questionado, ouve os estudantes, valoriza, respeita e promove a autonomia deles.

Em relação ao Livro do estudante, procurou-se dar autonomia e respeitar a atuação do professor, orientando-o a reconhecer os momentos nos quais deve desafiar, indagar e conduzir os estudantes à reflexão e à problematização de situações que vão além das apresentadas nesta coleção. Cabe destacar também a importância do trabalho participativo entre o professor da área de Matemática e suas Tecnologias e os professores de outras áreas, buscando o planejamento e a realização de aulas e projetos multidisciplinares.

Saberes docentes para o ensino de Matemática

Um professor de Matemática que atua no Ensino Médio, além de conhecer as diferentes abordagens metodológicas, precisa ter os saberes necessários para construir novas práticas pedagógicas que permitam identificar avanços, dificuldades e possibilidades para a ampliação das aprendizagens de seus estudantes.

Ainda, o professor deve ser “capaz de articular os diferentes saberes escolares à prática social ao desenvolvimento de competências para o mundo do trabalho”⁵⁹. Isso pode ser feito ao propor situações-problema que envolvam diversos contextos do cotidiano dos estudantes, considerando seus diferentes perfis, e procurando relacioná-las a outras áreas do conhecimento, bem como a conhecimentos da própria Matemática, por meio de atividades, trabalhos em grupos, utilização de tecnologias, textos científicos divulgados pela mídia etc. Dessa maneira, o professor contribui para o desenvolvimento da capacidade dos estudantes de realizar análises críticas, criativas e propositivas.

A maneira como o professor compreende a Matemática vai influenciar o modo como trata tais articulações. Nesse sentido,

saberes de conteúdo matemático e saberes pedagógicos estão inter-relacionados.

O saber profissional do professor é um saber pluridimensional, uma vez que o professor é aquele que planeja, executa, avalia, ou seja, é aquele que, na sala de aula, é responsável pela gestão de um pequeno universo.

Os estudantes no Ensino Médio

As transformações que vêm ocorrendo na sociedade contemporânea também têm causado impacto nos estudantes do Ensino Médio, resultando em mudanças tanto no campo das relações sociais como no mundo do trabalho, ambos caracterizados, na atualidade, pela sua fluidez e pelo seu dinamismo. Essa situação coloca novos desafios para os docentes, em geral, e para o ensino da Matemática, em particular.

Dimensões física, social, emocional e cultural dos estudantes

No cenário atual, é importante que os envolvidos no âmbito educacional considerem, de maneira intencional e explícita, não só o desenvolvimento intelectual mas também as **dimensões física, social, emocional e cultural dos estudantes**. Assim, para além do trabalho com os conteúdos e com as competências e habilidades próprias das diversas áreas do conhecimento, é necessário criar espaços para que os estudantes do Ensino Médio conheçam seu corpo, seus sentimentos e suas emoções, lidando com as relações interpessoais para serem respeitados e respeitarem os demais.

Considerando a Matemática uma área frequentemente associada a um baixo rendimento acadêmico, à ansiedade e ao desenvolvimento de emoções negativas, o professor precisa assumir a convicção de que todos os estudantes podem aprender e alcançar seus objetivos em relação a essa área, independentemente de suas características pessoais, seus percursos ou suas histórias⁶⁰. Transformar a maneira com a qual os estudantes se vinculam à Matemática é possível quando o professor, por exemplo, orienta seu trabalho no sentido de despertar o espírito investigativo e a curiosidade dos estudantes, incentivando o levantamento de hipóteses, procurando conhecer suas explicações dos fenômenos cotidianos e propiciando o confronto de ideias para poder construir, de maneira gradativa, os conceitos e procedimentos matemáticos.

Reflexos da violência no âmbito escolar e local

Em uma sociedade marcada pelo confronto entre diversos grupos culturais e sociais, o trabalho do professor no Ensino Médio, bem como o dos demais envolvidos, requer a promoção de uma cultura de paz tanto na escola como na esfera social mais ampla. Para isso, todos os envolvidos devem promover o diálogo e a solução não violenta de conflitos, permitindo aos estudantes manifestar opiniões divergentes, mas de maneira respeitosa. Como o desempenho em Matemática é considerado socialmente um importante indicador das capacidades dos estudantes, será essencial propor atividades orientadas à promoção da saúde mental deles, sobretudo no que tange ao combate da violência autoprovocada e à

58 BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais: matemática**. Brasília, DF: MEC: SEF, 1997. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/livro03.pdf>. Acesso em: 9 set. 2024.

59 BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Básica. Diretoria de Currículos e Educação Integral. **Diretrizes Curriculares Nacionais da Educação Básica**. Brasília, DF: MEC: SEB: Dicei, 2013. p. 171. Disponível em: https://www.gov.br/mec/pt-br/acao-a-informacao/media/seb/pdf/d_c_n_educacao_basica_nova.pdf. Acesso em: 9 set. 2024.

60 BRASIL, ref. 1.

intimidação sistemática (*bullying* e *cyberbullying*), rejeitando este-reótipos e discriminações de qualquer natureza. Em escala mais ampla, o professor deve incentivar o bom convívio entre os estudantes, promovendo o diálogo entre eles, que muitas vezes carregam consigo elementos culturais distintos em sua formação social, sempre considerando como parâmetros os direitos humanos e os princípios democráticos⁶¹.

Culturas juvenis

A juventude não deve ser compreendida como um período de passagem da infância para a maturidade, mas como uma etapa singular e dinâmica. Participantes ativos da sociedade, os jovens são, também, produtores de múltiplas **culturas juvenis**⁶². Acolher tais culturas na escola requer o desenvolvimento de um trabalho de maneira transversal que, de modo intencional, promova o respeito à diversidade, potencialize os interesses de cada estudante e considere as novas formas de aprendizagem originadas pelo desenvolvimento tecnológico. Particularmente, é necessário considerar que os jovens, mais do que meros consumidores, têm se tornado protagonistas da **cultura digital**⁶³. Torna-se essencial, assim, que os estudantes compreendam os impactos da revolução digital em nossa sociedade, e, nesse ponto, a Matemática tem muito a contribuir.

Projeto de vida e mundo do trabalho

O Ensino Médio se orienta de modo a oferecer ferramentas para que os estudantes possam definir seu **projeto de vida**, ou seja, possam definir aquilo que almejam para sua trajetória profissional e para seu estilo de vida, considerando tanto sua identidade como as demandas sociais e culturais do contexto no qual estão inseridos. É particularmente importante que, no Ensino Médio, os estudantes possam desenvolver competências que lhes permitam se inserir de maneira crítica, criativa e responsável em um mundo do trabalho complexo, imprevisível e dinâmico. É primordial preparar os estudantes para ocupar “profissões que ainda não existem, para usar tecnologias que ainda não foram inventadas e para resolver problemas que ainda não conhecemos”⁶⁴. Para isso, a área de Matemática e suas Tecnologias tem um papel central nesses processos. Nessa direção, o professor deverá propor atividades que visibilizem as bases científicas e tecnológicas próprias dos processos produtivos e nas quais os estudantes mobilizem recursos e ferramentas matemáticas para resolver problemas complexos que exijam reflexão e abstração e, simultaneamente, desenvolvam uma visão integrada da Matemática e da sua aplicação à realidade.

Gestão da sala de aula

A sociedade vem passando por diferentes modificações que requerem do professor uma mudança atitudinal e, consequentemente, uma gestão de sala de aula diferente da vivenciada há alguns anos. Além de ensinar a estudantes que estão inseridos em um mundo globalizado, com acesso facilitado às mais diversas

informações, o professor deve acolher estudantes que vivenciam diversas realidades, bem como buscar estratégias de ensino e de aprendizagem que atendam a estudantes de diferentes perfis, como aqueles em situação de itinerância ou com deficiência, por exemplo.

Ambiente educacional

De acordo com a perspectiva de Troncon, o ambiente educacional pode ser definido como o

[...] conjunto de elementos, de ordem material ou afetiva, que circunda o educando, que nele deve necessariamente se inserir e que o inclui, quando vivencia os processos de ensino e aprendizado, e que exerce influência definida sobre a qualidade do ensino e a eficácia do aprendizado. [...] ⁶⁵

Esse autor destaca que o ambiente educacional tem impacto na construção do conhecimento dos estudantes, o que, consequentemente, denota a importância e a atenção que deve receber, com o propósito de aprimorá-lo e de aperfeiçoar o processo educacional.

Um ambiente educacional é composto basicamente de dois elementos: um de natureza material (mobiliário, iluminação, espaço físico etc.) e outro de caráter afetivo (respeito e segurança, entre outros). É necessário enfatizar que parte importante dos componentes do ambiente educacional é aquela relativa ao ambiente físico em que se dá o aprendizado, ou seja, as condições materiais que cercam o ensino e a aprendizagem.

No que diz respeito ao caráter afetivo, o professor deve proporcionar um ambiente acolhedor e de respeito entre os estudantes. Estes devem se sentir seguros para expor suas dúvidas, trocar ideias com os colegas e com o professor e contribuir com o processo de ensino-aprendizagem de toda a turma. Desse modo, é preciso criar estratégias para uma boa convivência.

Assim, o professor pode, no início do ano letivo, propor alguns combinados com a turma, desde que esses respeitem as regras da instituição de ensino. Algumas regras que podem ser estabelecidas são: respeitar professores e colegas; evitar atrasos; zelar pela limpeza da sala de aula; não utilizar termos pejorativos e/ou que ofendam o outro; praticar a empatia com os colegas; questionar sempre que houver dúvidas em relação ao conteúdo.

Outro aspecto de caráter afetivo que pode ser destacado é a acolhida a estudantes em situação de itinerância, como circenses, migrantes e pertencentes a povos ciganos. Sugere-se promover uma roda de conversa com toda a turma a fim de que esse estudante se apresente e conte como é a experiência de estudar em diferentes locais no decorrer da vida acadêmica. Essa pode ser uma estratégia eficaz, desde que o estudante não se sinta constrangido.

Em relação a aspectos de natureza material, destacam-se a organização da sala de aula, o uso do Laboratório de Ensino de Matemática (LEM) e ambientes não convencionais.

A sala de aula não precisa se limitar à organização convencional de estudantes enfileirados. Uma alternativa é organizá-los em pequenos grupos, favorecendo o diálogo e a integração entre eles. Outra opção é a organização das carteiras em formato de “U”, em que os estudantes têm contato direto com diversos colegas. Assim, é possível que eles sanem dúvidas, troquem ideias a respeito de atividades e busquem soluções para problemas propostos.

61 BRASIL, ref. 1.

62 DAYRELL, Juarez. A escola “faz” as juventudes?: reflexões em torno da socialização juvenil. **Educação & Sociedade**, Campinas, v. 28, n. 100, p. 1105-1128, 2007. Disponível em: <https://www.scielo.br/j/es/a/RTJfY53z5LHTJfFSzq5rCPH/?lang=pt&format=pdf>. Acesso em: 9 set. 2024.

63 BRASIL, ref. 1.

64 BRASIL, ref. 1, p. 473.

65 TRONCON, Luiz Ernesto de Almeida. Ambiente educacional. **Medicina**, Ribeirão Preto, v. 47, n. 3, p. 264-271, 2014. p. 265. Disponível em: <https://www.revistas.usp.br/rmrp/article/view/86614/89544>. Acesso em: 9 set. 2024.

O LEM pode ser considerado um ambiente educacional que consiste em um espaço munido de material para que professor e estudantes desenvolvam seus trabalhos de ensinar e aprender Matemática. Esse ambiente pode potencializar o trabalho desenvolvido em sala de aula, evitando que o professor precise deslocar grande quantidade de material de um local para outro.

Esse espaço pode ser uma sala, um armário ou outro local na escola em que se possa armazenar: o material construído pelos próprios estudantes em conjunto com o professor, material industrializado, livros e revistas relacionados a temas matemáticos, livros didáticos e paradidáticos, jogos, peças que representam sólidos geométricos, instrumentos de medida, calculadoras, computadores, lousa digital, televisor, pôsteres, cartolinas, papéis sulfite, tesouras, entre outros. Segundo Lorenzato,

[...] o LEM, nessa concepção, é uma sala-ambiente para estruturar, organizar, planejar e fazer acontecer o pensar matemático, é um espaço para facilitar, tanto ao aluno como ao professor, questionar, conjecturar, procurar, experimentar, analisar e concluir, enfim, aprender e principalmente aprender a aprender⁶⁶.

Um laboratório com essas características pode ser estruturado por meio do trabalho conjunto entre professores de diferentes áreas e turmas, diretor e outros responsáveis da escola, além da colaboração dos estudantes. Durante as atividades ou experimentos realizados em laboratórios, é importante que a segurança e a integridade dos estudantes e de outras pessoas presentes sejam garantidas.

Apesar de a sala de aula ser considerada um ambiente convencional de ensino e de aprendizagem, esse não é o único espaço em que a construção do conhecimento pode ocorrer.

De acordo com D'Ambrosio, o

[...] cotidiano está impregnado dos saberes e fazeres próprios da cultura. A todo instante, os indivíduos estão comparando, classificando, quantificando, medindo, explicando, generalizando, inferindo e, de algum modo, avaliando, usando os instrumentos materiais e intelectuais que são próprios à sua cultura⁶⁷.

Nesse sentido, os espaços extraescolares, considerados ambientes não convencionais de ensino, podem promover a construção de conhecimentos e o desenvolvimento cognitivo e comportamental. Existe uma variedade de espaços não convencionais em diferentes contextos, que exibem alguma relação direta ou indireta com os conteúdos das áreas do conhecimento e, em especial, com conteúdos matemáticos.

Por exemplo, ao propor um trabalho de investigação envolvendo prédios públicos, que tenham rampas de acesso, no município em que os estudantes moram, conhecimentos matemáticos podem ser construídos ou evidenciados na medição das dimensões da rampa, na análise e na comparação com o padrão de inclinação estabelecido pela legislação, entre outros aspectos. Além de promover a aprendizagem de conteúdos matemáticos, pode-se desenvolver a formação de um cidadão crítico e engajado ao elaborar um relatório com informações sobre os prédios analisados e sugerir ações que possam contribuir para a melhoria da acessibilidade nesses prédios.

Museus, parques recreativos, jardins botânicos, zoológicos, unidades de conservação, feiras, exposições e planetários são exemplos de espaços não convencionais que também podem ser utilizados para o desenvolvimento de atividades de educação formal. Nas **Orientações específicas**, são apresentadas sugestões de ambientes como esses, onde os estudantes podem realizar visitas relacionadas aos conteúdos matemáticos ou aos temas abordados em diferentes momentos durante o trabalho com esta coleção.

De modo geral, a utilização de ambientes não convencionais para o ensino e a aprendizagem é uma prática pouco explorada na educação formal. O professor interessado em utilizar um espaço não convencional deve fazer um planejamento para evidenciar a compreensão das funções, do funcionamento e das potencialidades desse espaço para a educação formal. Além disso, precisa considerar as limitações do espaço escolhido e solicitar à escola e aos pais ou responsáveis uma autorização em caso de necessidade de saída dos estudantes do ambiente escolar.

Inclusão

No ambiente educacional, é preciso pensar na inclusão de estudantes com deficiência. O professor deve estar atento a estratégias de acolhimento e, em muitos casos, buscar estratégias diferenciadas de ensino e de aprendizagem. Também é preciso se ater à promoção da acessibilidade, garantindo a todos os estudantes o acesso ao meio físico, à informação e à comunicação.

Ao professor, recomenda-se que o primeiro passo seja conhecer o estudante com deficiência, buscando compreender laudos médicos e o seu histórico escolar. O diálogo com a família também se mostra relevante nesse momento para compreender quais são as principais necessidades desse estudante. Algumas instituições de ensino têm sala de recursos, com materiais que viabilizam a aprendizagem dos estudantes, e o Atendimento Educacional Especializado, garantido por lei. De acordo com o Ministério da Educação, por meio da Secretaria de Educação Especial,

[o] atendimento educacional especializado – AEE tem como função identificar, elaborar e organizar recursos pedagógicos e de acessibilidade que eliminem as barreiras para a plena participação dos alunos, considerando suas necessidades específicas⁶⁸.

Assim, o professor de Matemática, em conjunto com os demais professores e com os profissionais do AEE, pode elaborar um Plano de Desenvolvimento Individual (PDI) com as devidas adaptações necessárias. O importante é atender às particularidades de cada estudante e promover atividades em que nenhum estudante se sinta excluído. Em Matemática, o professor pode utilizar tecnologias digitais para trabalhar com estudantes com Transtorno do Espectro Autista (TEA), uma vez que essas tecnologias têm potencial de contribuir com as interações entre esses estudantes e os demais colegas da turma, o que é fundamental para o processo de aprendizagem. Outro exemplo é o uso do *software* GeoGebra para explorar conceitos geométricos com estudantes com TEA. Esse trabalho possibilita a esse estudante manipular o *software*, por meio de suas ferramentas, para visualizar e verificar propriedades geométricas de maneira dinâmica e interativa, ampliando seu protagonismo no processo de aprendizagem, além de incentivar seu relacionamento com o professor e os colegas.

66 LORENZATO, Sergio (org.). **O laboratório de ensino de matemática na formação de professores**. 1. ed. Campinas: Autores Associados, 2006. (Formação de professores, p. 7).

67 D'AMBROSIO, Ubiratan. **Etnomatemática: elo entre as tradições e a modernidade**. 2. ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2005. (Tendências em Educação Matemática, p. 22).

68 BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Especial. **Diretrizes Operacionais da Educação Especial para o Atendimento Educacional Especializado na Educação Básica**. Brasília, DF: MEC: SEE, 2008. p. 1. Disponível em: http://portal.mec.gov.br/index.php?option=com_docman&view=download&alias=428-diretrizes-publicacao&Itemid=30192. Acesso em: 9 set. 2024.

Leitura e argumentação nas aulas de Matemática

Considerada uma prática social, a comunicação não se limita ao uso da fala. Ela envolve, também, a produção da escrita, a utilização de símbolos e de expressões pictóricas e corporais, assim como os processos de interpretação dessas diferentes linguagens. A comunicação é, então, essencial para os processos de interação social e de desenvolvimento humano. Dessa maneira, o aperfeiçoamento das competências leitoras e argumentativas dos estudantes é um objetivo que transpasse o Ensino Médio, não sendo priorizado somente na área de Linguagens e suas Tecnologias mas também nas outras áreas do conhecimento. Particularmente, o professor de Matemática pode contribuir, de maneira decisiva, na aprendizagem de estratégias de leitura de textos matemáticos ou que contenham dados ou argumentos de natureza matemática.

Nas últimas décadas, as práticas que requerem a mobilização de competências leitoras têm se multiplicado e se diversificado. Muitas delas exigem do leitor a mobilização de conhecimentos matemáticos para interpretar, por exemplo, informações estatísticas veiculadas nas mídias e na publicidade. Assim, visando à formação de cidadãos críticos, é importante que os professores ofereçam oportunidades para que os estudantes do Ensino Médio possam interpretar, interagir e argumentar sobre esses textos nos suportes em que aparecem e nas situações cotidianas.

Por sua vez, os textos matemáticos também apresentam suas características específicas, sendo necessário que o professor atue como mediador nos processos de interação dos estudantes com esses textos⁶⁹. Visando aprimorar a compreensão e a interpretação dos textos matemáticos, incluindo enunciados de situações-problema, o professor deve fornecer aos estudantes dados relevantes e condições que, como em situações similares, possam ser utilizadas em sua resolução.

A apropriação da linguagem simbólica própria da Matemática tem se mostrado uma tarefa complexa, com muitos dos obstáculos vinculados à interpretação e à utilização da linguagem algébrica. Nessa direção, o trabalho envolvendo a leitura de textos e a produção de argumentos matemáticos utilizando diversas linguagens – algébrica, discursiva, gráfica, pictórica etc. – tem sido uma estratégia frutífera. O professor pode propor múltiplas tarefas com essa orientação ao solicitar, por exemplo, a leitura e a interpretação de textos que combinam a linguagem discursiva com a gráfica, a produção de argumentos matemáticos utilizando diversos tipos de linguagem, a tradução de informações expressas em linguagem algébrica para a linguagem discursiva, a escrita de textos discursivos que apresentem o desenvolvimento de um problema e sua solução, a leitura e a escrita de relatórios que sintetizem dados expressos em tabelas e gráficos estatísticos, a elaboração de enunciados de problemas a partir de uma expressão algébrica, entre outros. A utilização dos diversos tipos de registro próprios da Matemática contribuirá para o desenvolvimento cognitivo dos estudantes e para o aprimoramento da comunicação na sala de aula.

Estratégias de cálculo e o uso da calculadora

Nas aulas de Matemática, é importante propor situações que possibilitem aos estudantes utilizarem diferentes estratégias de cálculo, ampliando seu repertório. Essas estratégias podem envolver cálculos por escrito, cálculo mental, uso de calculadora científica ou computador, entre outras. Nesse nível de escolaridade, é importante que os estudantes escolham as próprias estratégias, julgando a mais adequada para resolver determinados problemas.

Realizar um cálculo por escrito auxilia os estudantes a registrar e organizar os resultados no papel.

Ao realizar um cálculo mental, são mobilizadas estratégias que visam rapidez e eficiência na obtenção de uma resposta, e é possível trabalhar, de maneira simultânea, a memória e a concentração. Segundo Buys⁷⁰, o cálculo mental permite aos estudantes calcular livremente, sem restrições, desenvolvendo novas estratégias de cálculo ou o uso de números de referência e estratégias que já detêm. Para esse autor, há três características presentes no cálculo mental: operar com números, e não com dígitos; usar propriedades elementares das operações e relações numéricas; e permitir o recurso a registros auxiliares em papel.

As calculadoras científicas devem ser um dos instrumentos tecnológicos presentes nas aulas de Matemática e disponíveis aos estudantes, pois seu uso de maneira reflexiva pode contribuir para o aprendizado, auxiliando os estudantes a investigar e a identificar regularidades e propriedades, generalizar, conferir cálculos por escrito, realizar cálculos mais complexos, tomar decisões etc. Cabe destacar que aplicativos de calculadoras científicas estão disponíveis na maioria dos *smartphones*.

Relações com outras áreas do conhecimento e seus componentes curriculares

A Matemática escolar é desafiadora, tanto para os estudantes como para os professores. Observando os contextos social e tecnológico, pode-se identificar o descompasso que há entre esses contextos e o sistema educacional.

Junto às críticas ao modelo escolar, que é desconfigurado e engessado, tem-se, de um lado, a Matemática como uma área compartmentalizada e, de outro, uma sociedade *high tech* que a desafia e exige inovações.

Assim, buscando atender às necessidades e expectativas dos jovens do Ensino Médio, a BNCC define e organiza as aprendizagens essenciais por áreas do conhecimento e incentiva a integração entre essas áreas.

Estabelecer relações entre conceitos e ideias próprios da Matemática e de outras áreas do conhecimento, com o propósito de superar a fragmentação dos saberes, possibilita abordar uma situação-problema de diferentes perspectivas.

Durante as aulas de Matemática, algumas situações podem ser aproveitadas para o professor estabelecer relações com outras áreas do conhecimento. Uma pergunta feita por um estudante durante o

69 OLIVEIRA, Emilio Celso de; PIRES, Célia Maria Carolino. Uma reflexão acerca das competências leitoras e das concepções e crenças sobre práticas de leitura nas aulas de Matemática. *Bolema*, Rio Claro, v. 23, n. 37, p. 931-953, 2010. Disponível em: <https://www.periodicos.rc.biblioteca.unesp.br/index.php/bolema/article/view/4300/3434>. Acesso em: 9 set. 2024.

70 BUYS, K. Mental arithmetic. In: HEUVEL-PANHUIZEN, Marja van den (ed.). *Children learn mathematics*. Rotterdam: Sense, 2001. p. 121-146. Developed by the TAL Team. Utrecht: Freudenthal Institute (FI), Utrecht University and National Institute for Curriculum Development (SLO).

desenvolvimento de um conteúdo matemático, por exemplo, pode ter potencial para desencadear abordagens de conteúdos de outras áreas.

Para Tomaz e David⁷¹, os professores dos diversos componentes curriculares podem conversar para levantar aspectos comuns de sua prática e compará-los com os de outro professor que trabalha com os mesmos estudantes a fim de encontrar alternativas para potencializar as oportunidades de interdisciplinaridade em sala de aula, tornando essa prática mais usual.

Nesta coleção, procurou-se estabelecer relações entre a Matemática e suas Tecnologias a outras áreas do conhecimento, com destaque para a área de Ciências da Natureza e suas Tecnologias. As competências específicas 1, 2 e 3 de Ciências da Natureza e suas Tecnologias são abordadas em diferentes momentos da coleção, seja no decorrer de desenvolvimentos conceituais, seja no decorrer de propostas de atividades ou da seção **Integrando com....** No Volume 1, na Unidade 1, por exemplo, desenvolve-se a competência específica 3, uma vez que propõem-se uma discussão acerca de transfusões de sangue e uma análise do sistema ABO e do fator Rh, no contexto do estudo das relações entre conjuntos. Outro exemplo, também no Volume 1, que possibilita desenvolver as competências específicas 1 e 2, é apresentado na Unidade 3, ao abordar a temática mobilidade urbana sustentável, bem como sua importância para a redução de impactos ambientais, relacionando essa temática ao estudo de funções.

Referências bibliográficas comentadas

Apresentamos, a seguir, as principais referências que nortearam a produção desta coleção, bem como as que foram citadas no texto. Por consequência, essas referências podem fomentar o processo de ensino-aprendizagem, ampliando e complementando o que foi proposto na obra.

- ALMEIDA, Lourdes Maria Werle de; FERRUZZI, Elaine Cristina. Uma aproximação socioepistemológica para a modelagem matemática. **Alexandria**: Revista de Educação em Ciência e Tecnologia, Florianópolis, v. 2, n. 2, p. 117-234, 2009. Disponível em: <https://periodicos.ufsc.br/index.php/alexandria/article/view/37952/28980>. Acesso em: 9 set. 2024.

Nesse artigo, os autores apresentam uma situação-problema para evidenciar a possibilidade de trabalhar atividades de modelagem matemática em sala de aula na perspectiva socioepistemológica.

- ALMEIDA, Lourdes Maria Werle de; SILVA, Karina Alessandra Pessoa da. Semiótica e as ações cognitivas dos alunos em atividades de modelagem matemática: um olhar sobre os modos de inferência. **Ciência e Educação**, Bauru, v. 18, p. 623-642, 2012. Disponível em: <https://www.scielo.br/j/ciedu/a/v4qMkLj9MFHmddXVmSJ7nh/?format=pdf&lang=pt>. Acesso em: 9 set. 2024. Análise de uma atividade de modelagem para investigar relações entre ações cognitivas evidenciadas em atividades desse tipo e os modos de inferência na semiótica peirceana.
- ALMEIDA, Lourdes Maria Werle de; SILVA, Karina Alessandra Pessoa da; VERTUAN, Rodolfo Eduardo. O registro gráfico em atividades de modelagem matemática: um estudo da conversão entre registros segundo a teoria dos registros de representação semiótica. In: SEMINÁRIO INTERNACIONAL DE

EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 2., 2009, São Paulo. **Anais [...]**. São Paulo: Uniban, 2009.

Discussão sobre as conversões ligadas ao registro gráfico realizadas por estudantes de uma turma de licenciatura em atividades de modelagem matemática.

- AUSUBEL, David Paul; NOVAK, Joseph Donald; HANESIAN, Helen. **Psicologia educacional**. 2. ed. Rio de Janeiro: Interamericana, 1980. Obra em que os autores apresentam sua teoria da aprendizagem significativa.
- BERTINI, Luciane de Fatima; PASSOS, Cármen Lúcia Brancaglion. Uso da investigação matemática no processo de ensino e aprendizagem nas séries iniciais do ensino fundamental. In: ENCONTRO BRASILEIRO DE ESTUDANTES DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 12., 2008, Rio Claro. **Anais [...]**. Rio Claro: Unesp, 2008. Disponível em: www2.rc.unesp.br/eventos/matematica/ebapem2008/upload/135-1-A-gt8_bertini_ta.pdf. Acesso em: 9 set. 2024.

Nesse artigo, as autoras distinguem problema de exercício e defendem a realização de investigações matemáticas pelos estudantes para promover sua aprendizagem.

- BOAVIDA, Ana Maria; GOMES, Anabela; MACHADO, Sílvia. Argumentação na aula de matemática: olhares sobre um projeto de investigação colaborativa. **Educação e Matemática**, Lisboa, n. 70, p. 18-26, 2002. Disponível em: <https://em.apm.pt/index.php/em/article/view/1141/1182>. Acesso em: 9 set. 2024.

Relato de experiência de implementar tarefas com foco na argumentação matemática em sala de aula.

- BORBA, Marcelo de Carvalho; PENTEADO, Miriam Godoy. **Informática e educação matemática**. 5. ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2016. (Tendências em Educação Matemática).

Trabalho sobre o uso de informática educativa no ambiente escolar, contendo debates relacionados às políticas governamentais e às questões epistemológicas e pedagógicas.

- BRACKMANN, Christian Puhmann. **Desenvolvimento do pensamento computacional através de atividades desplugadas na educação básica**. 2017. Tese (Programa de Pós-Graduação em Informática na Educação) – Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2017. Disponível em: <https://lume.ufrgs.br/bits/tream/handle/10183/172208/001054290.pdf?sequence=1&isAllowed=y>. Acesso em: 9 set. 2024.

A pesquisa objetiva verificar a possibilidade de desenvolver o pensamento computacional na Educação Básica por meio de atividades “desplugadas”, isto é, sem o uso de computadores.

- BRASIL. [Constituição (1988)]. **Constituição da República Federativa do Brasil de 1988**. Brasília, DF: Presidência da República, [2024]. Disponível em: http://www.planalto.gov.br/ccivil_03/constituicao/constituicao.htm. Acesso em: 9 set. 2024.

Conhecida como Constituição Cidadã, é o atual conjunto de leis fundamentais que organiza o estado brasileiro.

- BRASIL. **Lei nº 9.394, de 20 de dezembro de 1996**. Estabelece as diretrizes e bases da educação nacional. Brasília, DF: Presidência da República, [2024]. Disponível em: https://www.planalto.gov.br/ccivil_03/leis/l9394.htm. Acesso em: 9 set. 2024.

Legislação que regulamenta o sistema educacional do Brasil no âmbito público ou privado, da Educação Básica até o Ensino Superior.

71 TOMAZ, Vanessa Sena; DAVID, Maria Manuela Martins Soares. **Interdisciplinaridade e aprendizagem da matemática em sala de aula**. Belo Horizonte: Autêntica, 2008. (Tendências em Educação Matemática).

- BRASIL. **Lei nº 13.005, de 25 de junho de 2014.** Aprova o Plano Nacional de Educação – PNE e dá outras providências. Brasília, DF: Presidência da República, [2024]. Disponível em: https://www.planalto.gov.br/ccivil_03/_ato2011-2014/2014/lei/l13005.htm. Acesso em: 9 set. 2024.
Legislação que estabelece diretrizes e metas para a educação brasileira entre o período de 2014 e 2024.
- BRASIL. **Lei nº 13.415, de 16 de fevereiro de 2017.** Altera as Leis nº 9.394, de 20 de dezembro de 1996, que estabelece as diretrizes e bases da educação nacional, e 11.494, de 20 de junho 2007, que regulamenta o Fundo de Manutenção e Desenvolvimento da Educação Básica e de Valorização dos Profissionais da Educação, a Consolidação das Leis do Trabalho [...]. Brasília, DF: Presidência da República, [2023]. Disponível em: https://www.planalto.gov.br/ccivil_03/_Ato2015-2018/2017/Lei/L13415.htm?msckid=99fb7879d0c211ec91a329a85274182b. Acesso em: 9 set. 2024.
Legislação que altera a regulamentação do sistema educacional do Brasil no âmbito público ou privado.
- BRASIL. **Lei nº 14.945, de 31 de julho de 2024.** Altera a Lei nº 9.394, de 20 de dezembro de 1996 (Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional), a fim de definir diretrizes para o ensino médio, e as Leis nºs 14.818, de 16 de janeiro de 2024, 12.711, de 29 de agosto de 2012, 11.096, de 13 de janeiro de 2005, e 14.640, de 31 de julho de 2023. Brasília, DF: Presidência da República, 2024. Disponível em: https://www.planalto.gov.br/ccivil_03/_ato2023-2026/2024/lei/l14945.htm. Acesso em: 9 set. 2024.
Legislação que altera a lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional, com definição de diretrizes para o Ensino Médio.
- BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular:** educação é a base. Brasília, DF: MEC, 2018. Disponível em: http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC_EI_EF_110518-versaofinal_site.pdf. Acesso em: 9 set. 2024.
Documento que regulamenta as aprendizagens essenciais na Educação Básica.
- BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular:** computação: complemento à BNCC. Brasília, DF: MEC, 2022. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/docman/fevereiro-2022-pdf/236791-anexo-ao-parecer-cneceb-n-2-2022-bncc-computacao/file>. Acesso em: 9 set. 2024.
Documento que estabelece normas para o ensino de computação na Educação Básica.
- BRASIL. Ministério da Educação. Conselho Nacional de Educação. **Parecer CNE/CEB nº 2, de 12 de fevereiro de 2022.** Brasília, DF: MEC: CNE, 2022. Disponível em: http://portal.mec.gov.br/index.php?option=com_docman&view=download&alias=235511-pceb002-22&category_slug=fevereiro-2022-pdf&Itemid=30192. Acesso em: 12 set. 2024.
Normas sobre Computação na Educação Básica – Complemento à BNCC.
- BRASIL. Ministério da Educação. Conselho Nacional de Educação. **Resolução CNE/CEB nº 3, de 26 de junho de 1998.** Institui as Diretrizes Curriculares Nacionais para o Ensino Médio. Brasília, DF: MEC: CNE, 1998. Disponível em: http://portal.mec.gov.br/cne/arquivos/pdf/rceb03_98.pdf. Acesso em: 9 set. 2024.
Documento que institui as Diretrizes Curriculares Nacionais para o Ensino Médio.
- BRASIL. Ministério da Educação. Conselho Nacional de Educação. **Resolução CNE/CEB nº 3, de 21 de novembro de 2018.** Atualiza as Diretrizes Curriculares Nacionais para o Ensino Médio. Brasília, DF: MEC: CNE, 2018. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/docman/novembro-2018-pdf/102481-rceb003-18/file>. Acesso em: 9 set. 2024.
Documento que atualiza as Diretrizes Curriculares Nacionais para o Ensino Médio.
- BRASIL. Ministério da Educação. Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira. **Relatório Nacional PISA 2012:** resultados brasileiros. Brasília, DF: MEC: Inep, 2012. Disponível em: http://download.inep.gov.br/acoes_internacionais/pisa/resultados/2014/relatorio_nacional_pisa_2012_resultados_brasileiros.pdf. Acesso em: 9 set. 2024.
Documento sobre os resultados nacionais do Pisa de 2012.
- BRASIL. Ministério da Educação. **Parâmetros Curriculares Nacionais:** ensino médio. Brasília, DF: MEC, 2000. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/blegais.pdf>. Acesso em: 9 set. 2024.
Textos que norteiam a reforma curricular do Ensino Médio.
- BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Básica. Diretoria de Currículos e Educação Integral. **Diretrizes Curriculares Nacionais da Educação Básica.** Brasília, DF: SEB: Dcei, 2013. Disponível em: https://www.gov.br/mec/pt-br/aceso-a-informacao/media/seb/pdf/d_c_n_educacao_basica_nova.pdf. Acesso em: 9 set. 2024.
Normas obrigatórias que definem os princípios, fundamentos e procedimentos na Educação Básica a fim de orientar o planejamento curricular das escolas brasileiras e dos sistemas de ensino.
- BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Básica. **Temas Contemporâneos Transversais na BNCC:** contexto histórico e pressupostos pedagógicos. Brasília, DF: MEC: SEB, 2019. Disponível em: http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/implementacao/contextualizacao_temas_contemporaneos.pdf. Acesso em: 9 set. 2024.
Texto que discorre sobre os temas contemporâneos transversais, apresentando sua contextualização, sua relação com a BNCC e os pressupostos teóricos para sua abordagem.
- BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Especial. **Diretrizes Operacionais da Educação Especial para o Atendimento Educacional Especializado na Educação Básica.** Brasília, DF: MEC: SEE, 2008. Disponível em: http://portal.mec.gov.br/index.php?option=com_docman&view=download&alias=428-diretrizes-publicacao&Itemid=30192. Acesso em: 9 set. 2024.
Documento contendo as Diretrizes Operacionais da Educação Especial para o Atendimento Educacional Especializado na Educação Básica.
- BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais:** matemática. Brasília, DF: MEC: SEF, 1997. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/livro03.pdf>. Acesso em: 9 set. 2024.
Conjunto de textos que norteiam a elaboração dos currículos escolares do Ensino Fundamental.
- BUYS, K. Mental arithmetic. In: HEUVEL-PANHUIZEN, Marja van den (ed.). **Children learn mathematics.** Rotterdam: Sense, 2001. Developed by the TAL Team. Utrecht: Freudenthal Institute (FI), Utrecht University and National Institute for Curriculum Development (SLO).

Trabalho que propõe discussão e reflexão sobre estratégias de cálculo mental por crianças e adolescentes.

- COHEN, Elizabeth G.; LOTAN, Rachel A. **Planejando o trabalho em grupo**: estratégias para salas de aula heterogêneas. 3. ed. Porto Alegre: Penso, 2017. *E-book*.
Nesse livro, as autoras apresentam e defendem a ideia do trabalho em grupo em turmas heterogêneas como uma estratégia potencialmente eficaz de ensino-aprendizagem, além de teorias e orientações para a prática em sala de aula.
- D'AMBROSIO, Ubiratan. **Educação matemática**: da teoria à prática. 12. ed. Campinas: Papirus, 2005. (Perspectivas em Educação Matemática).
Discussão geral relacionada à educação matemática, propondo uma reflexão sobre a Matemática, aspectos teóricos e temas ligados à sala de aula e à prática docente.
- D'AMBROSIO, Ubiratan. **Etnomatemática**: elo entre as tradições e a modernidade. 2. ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2005. (Tendências em Educação Matemática).
Nessa obra, o autor procura proporcionar uma visão geral da Etnomatemática, principalmente aspectos teóricos.
- DAYRELL, Juarez. A escola "faz" as juventudes?: reflexões em torno da socialização juvenil. **Educação & Sociedade**, Campinas, v. 28, n. 100, p. 1105-1128, 2007. Disponível em: <https://www.scielo.br/j/es/a/RTJfY53z5LHTJfS5zq5rCPH/?lang=pt&format=pdf>. Acesso em: 9 set. 2024.
Nesse artigo, é possível conhecer mais as culturas juvenis e sua relação com a escola.
- DE LANGE, Jan. **Framework for classroom assessment in mathematics**. Utrecht: Freudenthal Institute and National Center for Improving Student Learning and Achievement in Mathematics and Science, 1999.
Nessa publicação, o autor apresenta os objetivos da avaliação escolar e lista padrões e princípios para sua realização nas aulas de Matemática (texto em língua inglesa).
- FORSTER, Cristiano. **A utilização da prova-escrita-com-cola como recurso à aprendizagem**. 2016. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2016. Disponível em: <https://pos.uel.br/pecem/wp-content/uploads/2021/08/FORSTER-Cristiano.pdf>. Acesso em: 9 set. 2024.
Estudo sobre a utilização de uma prova-escrita-com-cola como recurso na avaliação que oportuniza a aprendizagem.
- HADJI, Charles. **A avaliação, regras do jogo**: das intenções aos instrumentos. 4. ed. Porto: Porto Editora, 1994.
Proposta de abordagem de avaliação da aprendizagem escolar, incluindo reflexões e análises relacionadas aos tipos de avaliação.
- HAYDT, Regina Célia Cazaux. **Avaliação do processo ensino-aprendizagem**. 5. ed. São Paulo: Ática, 1995.
Nessa obra, a autora discute as funções da avaliação escolar, incluindo a autoavaliação como parte do processo de ensino-aprendizagem.
- HOWLAND, Jane L.; JONASSEN, David; MARRA, Rose. **Meaningful learning with technology**. 4th ed. Boston: Pearson, 2011.
Demonstração de como os professores podem utilizar a tecnologia para incentivar e auxiliar na aprendizagem significativa dos estudantes (texto em língua inglesa).

- LORENZATO, Sergio (org.). **O laboratório de ensino de matemática na formação de professores**. 1. ed. Campinas: Autores Associados, 2006. (Formação de professores).

Discussão sobre o papel de Laboratórios de Ensino de Matemática (LEM) no ensino e na aprendizagem de Matemática.

- MORÁN, José. Mudando a educação com metodologias ativas. *In*: SOUZA, Carlos Alberto de; MORALES, Ofelia Elisa Torres (org.). **Convergências midiáticas, educação e cidadania**: aproximações jovens. Ponta Grossa: Proex: UEPG, 2015. v. II, p. 15-33. Disponível em: https://edisciplinas.usp.br/pluginfile.php/4941832/mod_resource/content/1/Artigo-Moran.pdf. Acesso em: 9 set. 2024.

Texto sobre metodologias ativas e mudanças educacionais.

- OLIVEIRA, Emilio Celso de; PIRES, Célia Maria Carolino. Uma reflexão acerca das competências leitoras e das concepções e crenças sobre práticas de leitura nas aulas de Matemática. **Bolema**, Rio Claro, v. 23, n. 37, p. 931-953, 2010. Disponível em: <https://www.periodicos.rc.biblioteca.unesp.br/index.php/bolema/article/view/4300/3434>. Acesso em: 9 set. 2024.

Artigo sobre as competências leitoras em Matemática.

- ONUCHIC, Lourdes de La Rosa; ALLEVATO, Norma Suely Gomes. Pesquisa em resolução de problemas: caminhos, avanços e novas perspectivas. **Bolema**, Rio Claro, v. 25, n. 41, p. 73-98, 2011. Disponível em: <https://www.periodicos.rc.biblioteca.unesp.br/index.php/bolema/article/view/5739/4625>. Acesso em: 9 set. 2024.

Esse artigo apresenta os estudos sobre resolução de problemas desenvolvidos até então pelo grupo de pesquisa do qual as autoras participavam.

- PONTE, João Pedro da. Investigar, ensinar e aprender. **Actas do ProfMat**, Lisboa: APM, 2003. (CD-ROM).

Apresentação dos conceitos de investigar, ensinar e aprender e analisar relações entre eles no processo de ensino-aprendizagem da Matemática.

- SACRISTÁN, José Gimeno. **Saberes e incertezas sobre o currículo**. Porto Alegre: Penso, 2013.

Reflexão sobre a organização e o desenvolvimento do currículo.

- SANTOS, João Ricardo Viola dos; BURIASCO, Regina Luzia Corio de. Da ideia de erro para as maneiras de lidar: caracterizando nossos alunos pelo que eles têm e não pelo que lhes falta. *In*: BURIASCO, Regina Luzia Corio de (org.). **Avaliação e educação matemática**. Recife: SBEM, 2008. (Coleção SBEM).

Avaliação crítica de alguns trabalhos de pesquisadores sobre análise de "erros" de estudantes em diversos contextos e caracterização dos seus processos de resolução, considerando o que eles trazem.

- TOMAZ, Vanessa Sena; DAVID, Maria Manuela Martins Soares. **Interdisciplinaridade e aprendizagem da matemática em sala de aula**. Belo Horizonte: Autêntica, 2008. (Tendências em Educação Matemática).

Nesse livro, são apresentadas algumas perspectivas teóricas e exemplos de situações de sala de aula em que é possível perceber diferentes abordagens interdisciplinares de conteúdos escolares.

- TRONCON, Luiz Ernesto de Almeida. Ambiente educacional. **Medicina**, Ribeirão Preto, v. 47, n. 3, p. 264-271, 2014. Disponível em: <https://www.revistas.usp.br/rmrp/article/view/86614/89544>. Acesso em: 9 set. 2024.

Artigo sobre ambiente educacional e seus principais componentes, incluindo uma discussão acerca da participação desse tipo de ambiente no aprendizado.

Indicações para o professor

Nesta seção, são apresentadas sugestões de trabalhos, sites, plataformas e cursos, com vistas a contribuir com o processo de formação dos professores e, consequentemente, com os processos de ensino-aprendizagem.

Trabalhos

- ALMEIDA, Lourdes Werle de; SILVA, Karina Pessoa da; VERTUAN, Rodolfo Eduardo. **Modelagem matemática na educação básica**. São Paulo: Contexto, 2012.
Essa obra apresenta a definição e as características da modelagem matemática, atividades que foram desenvolvidas na Educação Básica, incluindo discussões e encaminhamentos para a sala de aula e outros temas a ser trabalhados nessa perspectiva.
- BORBA, Marcelo de Carvalho; SILVA, Ricardo Scucuglia R. da; GADANIDIS, George. **Fases das tecnologias digitais em educação matemática**: sala de aula e internet em movimento. Belo Horizonte: Autêntica, 2016.
Esse livro apresenta propostas de uso de tecnologias nas aulas de Matemática.
- ONUCHIC, Lourdes de La Rosa; ALLEVATO, Norma Suely Gomes. Novas reflexões sobre ensino-aprendizagem de matemática através da resolução de problemas. In: BICUDO, Maria Aparecida Viggiani; BORBA, Marcelo de Carvalho (org.). **Educação matemática**: pesquisa em movimento. São Paulo: Cortez, 2005.
Esse texto apresenta informações gerais sobre resolução de problemas.
- POLYA, George. **A arte de resolver problemas**: um novo aspecto do método matemático. Tradução e adaptação: Heitor Lisboa de Araújo. Rio de Janeiro: Interciência, 1995.
Estudo de métodos de resolução de problemas, incluindo uma proposta de etapas para resolver problemas.
- PONTE, João Pedro da; BROCARD, Joana; OLIVEIRA, Hélia. **Investigações matemáticas na sala de aula**. Belo Horizonte: Autêntica, 2007. (Tendências em Educação Matemática).
Análise de como a investigação matemática pode ser desenvolvida em sala de aula a partir de resultados de pesquisas.
- SACRISTÁN, José Gimeno. A avaliação no ensino. In: SACRISTÁN, José Gimeno; GÓMEZ, Angel I. Pérez. **Compreender e transformar o ensino**. Tradução: Ernani F. da Fonseca Rosa. 4. ed. Porto Alegre: Artmed, 1998.
Texto sobre avaliação no ensino, no qual o autor apresenta e discute seu conceito, prática, funções, classificações, entre outros.
- THOMPSON, Alba G. Teachers' beliefs and conceptions: a synthesis of the research. In: GROUWS, D. A. (ed.). **Handbook of research on mathematics teaching and learning**. Nova York: MacMillan, 1992.
Texto sobre crenças e concepções de professores referentes à educação matemática (texto em língua inglesa).

Instituições e grupos de estudo para a formação continuada do professor

- ASSOCIAÇÃO NACIONAL DOS PROFESSORES DE MATEMÁTICA NA EDUCAÇÃO BÁSICA. Rio de Janeiro, c2024. *Site*. Disponível em: <https://anpmat.org.br/>. Acesso em: 8 set. 2024.
Associação de professores de Matemática que atuam na Educação Básica em todo o país.

- CONSELHO NACIONAL DE DESENVOLVIMENTO CIENTÍFICO E TECNOLÓGICO. Brasília, DF, [2024]. *Site*. Disponível em: www.cnpq.br. Acesso em: 9 set. 2024.
Fundação pública cujas principais atribuições são fomentar as pesquisas científica, tecnológica e de inovação e a formação de pesquisadores.
- COORDENAÇÃO DE APERFEIÇOAMENTO DE PESSOAL DE NÍVEL SUPERIOR. Brasília, DF, [2024]. *Site*. Disponível em: www.capes.gov.br. Acesso em: 8 set. 2024.
Instituição que busca a expansão e a consolidação dos cursos de mestrado e de doutorado em todo o país.
- GRUPO DE ESTUDOS E PESQUISAS EM ETNOMATEMÁTICA. São Paulo, [2024]. *Site*. Disponível em: www2.fe.usp.br/~etnomat. Acesso em: 8 set. 2024.
Grupo de pesquisa organizado em torno do interesse pela diversidade matemática produzida e utilizada em vários contextos socioculturais.
- GRUPO DE PESQUISA EM INFORMÁTICA, OUTRAS MÍDIAS E EDUCAÇÃO MATEMÁTICA. Rio Claro, [2024]. *Site*. Disponível em: <http://igce.rc.unesp.br/#!/gpimem>. Acesso em: 8 set. 2024.
Grupo de pesquisa que estuda questões ligadas às tecnologias na educação matemática, bem como as mudanças que trazem a inserção das tecnologias digitais na educação.
- SOCIEDADE BRASILEIRA DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA. Brasília, DF, 2012. *Site*. Disponível em: www.sbembrasil.org.br. Acesso em: 8 set. 2024.
Sociedade civil, de caráter científico e cultural, sem fins lucrativos, que busca congrega profissionais da área de educação matemática e de áreas afins.
- SOCIEDADE BRASILEIRA DE HISTÓRIA DA MATEMÁTICA. Rio Claro, [2024]. *Site*. Disponível em: www.sbhmat.org. Acesso em: 8 set. 2024.
Sociedade científica de história da Matemática criada com o objetivo de divulgar dados, reflexões e informações referentes à história da Matemática.
- SOCIEDADE BRASILEIRA DE MATEMÁTICA. Rio de Janeiro, c2024. *Site*. Disponível em: www.sbm.org.br. Acesso em: 8 set. 2024.
Entidade civil, de caráter cultural e sem fins lucrativos, que tem, entre suas finalidades, reunir os matemáticos e professores de Matemática do Brasil e contribuir para a melhoria do ensino de Matemática em todos os níveis.

Revistas

- BOLEMA: Boletim de Educação Matemática. Rio Claro: Unesp, [2024]. Disponível em: <https://www.scielo.br/j/bolema/>. Acesso em: 7 set. 2024.
Periódico que publica artigos relacionados ao ensino e à aprendizagem de Matemática e/ou ao papel da Matemática e da educação matemática na sociedade.
- EDUCAÇÃO MATEMÁTICA EM REVISTA. Brasília, DF: SBEM, [2024]. Disponível em: <https://www.sbembrasil.org.br/periodicos/index.php/emr>. Acesso em: 8 set. 2024.
Revista que tem como foco o trabalho do professor em sua prática de educador matemático.

- **EDUCAÇÃO MATEMÁTICA PESQUISA.** São Paulo: PUC, [2024]. Disponível em: <https://revistas.pucsp.br/emp>. Acesso em: 8 set. 2024. Revista que divulga produções científicas na área de educação matemática em âmbito internacional.
- **REVEMAT: Revista Eletrônica de Educação Matemática.** Florianópolis: GPEEM: UFSC, [2024]. Disponível em: <https://periodicos.ufsc.br/index.php/revemat>. Acesso em: 8 set. 2024. Revista científica que visa promover o aprofundamento da investigação sobre temas ligados à epistemologia, à formação de professores e ao ensino e aprendizagem da Matemática.
- **REVISTA EUREKA!** Rio de Janeiro: SBM: OBM, c2024. Disponível em: <https://www.obm.org.br/revista-eureka/>. Acesso em: 8 set. 2024. Revista que divulga artigos relevantes para a preparação dos estudantes que participarão da Olimpíada Brasileira de Matemática (OBM).
- **RPM: Revista do Professor de Matemática.** Rio de Janeiro: SBM, [2024]. Disponível em: http://rpm.org.br/default.aspx?m_id=1. Acesso em: 9 set. 2024. Revista que publica artigos sobre Matemática em nível elementar ou avançado, que sejam apropriados para o professor do Ensino Médio e para estudantes de cursos de Licenciatura em Matemática.
- **ZETETIKÉ: Revista de Educação Matemática.** Campinas: Unicamp: [2024]. Disponível em: <http://ojs.fe.unicamp.br/ged/zetetike>. Acesso em: 8 set. 2024. Revista que busca contribuir para a formação de pesquisadores e para o desenvolvimento da pesquisa na área de educação matemática por meio do intercâmbio e da divulgação de pesquisas e estudos realizados.

Sites

- **FUNDAÇÃO BIBLIOTECA NACIONAL.** Rio de Janeiro, [2024]. Site. Disponível em: <https://www.gov.br/bn/pt-br>. Acesso em: 8 set. 2024. Apresenta informações acerca da FBN e da produção bibliográfica nacional.
- **INSTITUTO BRASILEIRO DE GEOGRAFIA E ESTATÍSTICA.** Rio de Janeiro, [2024]. Site. Disponível em: www.ibge.gov.br. Acesso em: 8 set. 2024. Contém dados, informações e análises sociais, econômicas e geográficas sobre o Brasil, obtidos e produzidos pelo próprio instituto.
- **INSTITUTO BRASILEIRO DO MEIO AMBIENTE E DOS RECURSOS NATURAIS RENOVÁVEIS.** Brasília, DF, [2024]. Site. Disponível em: www.gov.br/ibama/pt-br. Acesso em: 8 set. 2024. Disponibiliza informações e leis sobre o meio ambiente brasileiro, bem como ações e programas do instituto, visando à conservação e preservação ambiental.
- **INSTITUTO DO PATRIMÔNIO HISTÓRICO E ARTÍSTICO NACIONAL.** Brasília, DF, [2024]. Site. Disponível em: <https://www.gov.br/iphan/pt-br>. Acesso em: 8 set. 2024. Apresenta informações sobre os patrimônios históricos e artísticos reconhecidos.
- **INSTITUTO NACIONAL DE METROLOGIA, QUALIDADE E TECNOLOGIA.** Rio de Janeiro, [2024]. Site. Disponível em: www.inmetro.gov.br. Acesso em: 8 set. 2024. Disponibiliza normas e informações sobre metrologia, fiscalização e qualidade de produtos.

- **INSTITUTO NACIONAL DE PESQUISAS ESPACIAIS.** São José dos Campos, [2024]. Site. Disponível em: www.inpe.br. Acesso em: 8 set. 2024. Apresenta informações sobre o instituto, pesquisas, produtos e serviços nas áreas espacial e do ambiente terrestre do Brasil.
- **MINISTÉRIO DA CIÊNCIA, TECNOLOGIA E INOVAÇÃO.** Brasília, DF, [2024]. Site. Disponível em: www.mctic.gov.br. Acesso em: 8 set. 2024. Disponibiliza diversas informações, como estrutura organizacional, agendas, planejamento estratégico, ações e programas referentes à área de ciência e tecnologia.
- **MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO.** Brasília, DF, [2024]. Site. Disponível em: www.gov.br/mec/pt-br. Acesso em: 8 set. 2024. Disponibiliza diversas informações, como estrutura organizacional, competências, ações e programas na área de educação.
- **MINISTÉRIO DA SAÚDE.** Brasília, DF, [2024]. Site. Disponível em: www.saude.gov.br. Acesso em: 8 set. 2024. Portal em que são disponibilizados dados, informações, notícias e campanhas sobre a saúde no Brasil.
- **PORTAL DOMÍNIO PÚBLICO.** Brasília, DF, [2004]. Site. Disponível em: www.dominiopublico.gov.br/pesquisa/PesquisaObraForm.jsp. Acesso em: 8 set. 2024. Disponibiliza obras literárias, artísticas e científicas em formato de textos, sons, imagens e vídeos que são de domínio público, ou que tenham sua divulgação devidamente autorizada, e que constituem patrimônio cultural brasileiro e universal.

Cursos e plataformas

- **AMBIENTE VIRTUAL DE APRENDIZAGEM DO MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO.** Brasília, DF, 2024. Site. Disponível em: <https://avamec.mec.gov.br/>. Acesso em: 9 set. 2024. Oferece diferentes cursos *on-line* voltados para professores e outros profissionais envolvidos com a educação.
- **CENTRO DE APERFECIOAMENTO DO ENSINO DE MATEMÁTICA – “JOÃO AFONSO PASCARELLI”.** São Paulo, SP, [2024]. Site. Disponível em: <https://www.ime.usp.br/caem/>. Acesso em: 9 set. 2024. Oferece cursos, oficinas, palestras e promoção de eventos para professores que ensinam Matemática nas redes pública e/ou privada.
- **GOOGLE SALA DE AULA.** [S. l., 2024]. Site. Disponível em: <https://classroom.google.com/>. Acesso em: 9 set. 2024. Ambiente virtual que possibilita ao professor interagir com os estudantes, compartilhando atividades e dialogando por meio de *chats* e videochamadas.
- **KHAN ACADEMY.** [S. l.], c2024. Site. Disponível em: <https://pt.khanacademy.org/>. Acesso em: 9 set. 2024. Organização sem fins lucrativos que disponibiliza aulas e atividades de Matemática e de outras áreas de forma gratuita.
- **MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL.** Rio de Janeiro, [2024]. Site. Disponível em: <https://profmatt-sbm.org.br/>. Acesso em: 9 set. 2024. Programa de mestrado semipresencial voltado para professores de Matemática da Educação Básica em âmbito nacional.
- **O GEOGEBRA.** [S. l., 2024]. Site. Disponível em: <https://ogeogebra.com.br/site/index.php>. Acesso em: 9 set. 2024. Curso do *software* de geometria dinâmica GeoGebra para professores de todos os estados brasileiros.

Orientações específicas para este Volume

Uma proposta de cronograma para o desenvolvimento deste Volume da coleção, considerando um planejamento semestral, trimestral e bimestral, é apresentada a seguir. É importante ressaltar que essa proposta é apenas uma sugestão e que o cronograma deve ser adequado às escolhas feitas pela comunidade escolar, de acordo com a quantidade de aulas estabelecidas no ano letivo para a área de Matemática e suas Tecnologias.

Semana	Tópicos	Unidade
1ª	Abertura; Noção de conjunto	1
2ª	Operações com conjuntos; Integrando com...	1
3ª	Conjunto dos números naturais (\mathbb{N}) e conjunto dos números inteiros (\mathbb{Z})	1
4ª	Conjunto dos números racionais (\mathbb{Q})	1
5ª	Conjunto dos números irracionais (\mathbb{I})	1
6ª	Conjunto dos números reais (\mathbb{R})	1
7ª	Você conectado; O que estudei; Praticando: Enem e vestibulares	1
8ª	Abertura; Grandezas; Relações entre grandezas	2
9ª	Conceito de função; Integrando com...	2
10ª	Avaliação	
11ª	Estudo do sinal de uma função; Gráfico de uma função	2
12ª	Você conectado; O que estudei; Praticando: Enem e vestibulares	2
13ª	Abertura; Função afim: ideias iniciais e definição	3
14ª	Determinação de uma função afim; Taxa de variação média de uma função	3
15ª	Gráfico da função afim	3
16ª	Integrando com...; Estudo do sinal de uma função afim	3
17ª	Algumas aplicações	3
18ª	Função modular	3
19ª	Você conectado; O que estudei; Praticando: Enem e vestibulares	3
20ª	Avaliação	
21ª	Abertura; A parábola; Função quadrática: características e definição	4
22ª	Zeros de uma função quadrática	4
23ª	Gráfico de uma função quadrática	4
24ª	Valor máximo ou valor mínimo da função quadrática; Você conectado	4
25ª	Estudo do sinal de uma função quadrática; Equação da parábola	4
26ª	Integrando com...; O que estudei; Praticando: Enem e vestibulares	4
27ª	Abertura; Teorema de Tales	5
28ª	Semelhança de polígonos	5
29ª	Relações métricas no triângulo retângulo	5
30ª	Avaliação	
31ª	Razões trigonométricas no triângulo retângulo; Integrando com...	5
32ª	Razões trigonométricas em um triângulo qualquer; Você conectado	5
33ª	O que estudei; Praticando: Enem e vestibulares	5
34ª	Abertura; Tabelas; Gráficos	6
35ª	Gráficos; Integrando com...	6
36ª	Distribuição de frequência	6
37ª	Distribuição de frequência; Você conectado	6
38ª	Gráficos e tabelas: inadequações que podem induzir a erro de interpretação	6
39ª	O que estudei; Praticando: Enem e vestibulares	6
40ª	Avaliação	

Unidade 1 Conjuntos

Quadro-síntese da Unidade

BNCC	Competências gerais: 2, 5, 6 e 8 Competências específicas de Matemática e suas Tecnologias: 1, 3 e 5 Competência específica de Ciências da Natureza e suas Tecnologias: 3 Habilidades de Matemática e suas Tecnologias: EM13MAT104 e EM13MAT314
Temas Contemporâneos Transversais	Ciência e Tecnologia; Diversidade Cultural; e Saúde
Conteúdos	Conjuntos e suas operações, conjunto dos números naturais, conjunto dos números inteiros, conjunto dos números racionais, conjunto dos números irracionais, conjunto dos números reais, módulo de um número real e intervalo real.

Objetivos da Unidade

- Compreender noções iniciais de conjunto e suas diferentes maneiras de representação: inserindo seus elementos entre chaves; apresentando as condições que definem os elementos; e utilizando diagramas.
- Estabelecer a relação de pertinência entre um elemento e um conjunto.
- Estabelecer a relação de inclusão entre conjuntos.
- Compreender e realizar operações com conjuntos: união, interseção e diferença.
- Compreender e identificar elementos pertencentes ao conjunto dos números naturais, ao conjunto dos números inteiros, ao conjunto dos números racionais, ao conjunto dos números irracionais e ao conjunto dos números reais, além de representá-los na reta real.
- Identificar a representação de um número racional na forma de fração e na forma decimal (decimal exato e dízima periódica).
- Identificar, calcular e interpretar matemática e criticamente taxas e índices de natureza socioeconômica, como a taxa de mortalidade infantil, o Índice de Massa Corporal (IMC) e a densidade demográfica.
- Compreender o valor absoluto ou módulo de um número real.
- Compreender a representação de intervalos reais na reta real e utilizá-los para realizar operações.
- Compreender e representar um retângulo áureo utilizando um *software* de geometria dinâmica.

Orientações didáticas

O trabalho com conjuntos propicia o desenvolvimento do pensamento lógico, além de auxiliar a compreensão de que a Matemática tem características próprias e que algumas de suas afirmações precisam ser demonstradas logicamente ou refutadas por meio de contraexemplos. Além disso, esse trabalho favorece a compreensão e o uso de ferramentas digitais de maneira crítica e significativa.

Página 11

Abertura da Unidade

O trabalho com a abertura da Unidade favorece, com maior ênfase, o desenvolvimento da competência geral 5 e do Tema Contemporâneo Transversal Ciência e Tecnologia, uma vez que trata do uso crítico de tecnologias digitais de informação e comunicação, em específico, da noção de banco de dados.

Promover uma roda de conversa com os estudantes sobre a importância da evolução do sistema de gerenciamento de banco de dados (SGBD), no qual as tecnologias da computação foram sendo adequadas de acordo com as necessidades de atendimento aos usuários em diferentes aplicações: automação de escritórios, controle e planejamento de produção, alocação e estoque de recursos etc. Discutir o fato de que, com o aumento da quantidade de informações e a necessidade de armazená-las com segurança, tem crescido a valorização, no mercado de trabalho, do setor de tecnologia, mais especificamente o de banco de dados.

São apresentadas, a seguir, as respostas aos itens propostos nessa seção.

1. Respostas possíveis: Compras *on-line* de produtos de supermercado; busca por títulos de livros em um acervo digital; busca por títulos de música em uma plataforma de *streaming*; entre outras.
2. Em caso afirmativo, espera-se que os estudantes comentem que o uso de filtros facilitou a busca do produto.
3. Resposta esperada: Para o cliente que selecionou a opção de preço, pois serão apresentados para ele apenas os itens com um preço específico entre todos aqueles apresentados para o outro cliente.

Páginas 12 a 16

Noção de conjunto

Nesse tópico, espera-se que os estudantes compreendam noções básicas relacionadas a conjuntos. Na apresentação da ideia de conjunto como uma coleção de objetos quaisquer, destacar para os estudantes que os pares de tênis apresentados nas imagens têm a característica em comum de serem classificados como “tênis”.

Antes de explorar as maneiras de representar um conjunto, lembrar os estudantes de que um número natural é divisor positivo (ou fator positivo) de outro, caso a divisão do segundo pelo primeiro seja exata. Em outras palavras, o número natural p é um divisor positivo de um número natural n se $p > 0$ e o resto da divisão de n por p com quociente natural for zero.

Pedir aos estudantes que analisem em quais exemplos de conjuntos é mais viável listar todos os elementos e em quais é melhor apresentar as condições que definem os elementos (lei de formação). Por exemplo, em um conjunto com poucos elementos e cuja característica comum a eles não é evidente, a opção mais viável parece ser a de apresentar todos os elementos em um diagrama ou utilizando chaves.

Comentar com os estudantes que os conjuntos unitário, vazio (ou nulo) e universo (ou universal) têm características próprias e, por isso, recebem nomes especiais. Ao apresentar o conceito de conjunto universo, explicar a eles que, dependendo da situação, o conjunto universo pode mudar. Por exemplo, ao se resolver uma equação do 1º grau, o conjunto universo pode ser o conjunto dos números reais ou apenas o conjunto dos números naturais, de acordo com o contexto em estudo.

No tópico **Relação de inclusão de conjuntos**, explicar aos estudantes que é possível indicar a relação de inclusão de outra maneira, utilizando a notação \supset (contém) e $\not\supset$ (não contém). Considerando os conjuntos apresentados na página 14, podemos representar as seguintes relações:

- como $B \subset A$, tem-se que $A \supset B$, ou seja, A contém B ;
- como $D \not\subset C$, tem-se que $C \not\supset D$, ou seja, C não contém D .

A seção **Atividades** das páginas 15 e 16 tem como objetivo trabalhar as noções iniciais do conceito matemático de conjuntos, bem como a sua representação por meio de diagramas e a indicação de seus elementos entre chaves, além de trabalhar a relação de inclusão entre conjuntos. Em especial, a atividade 6 pode ser proposta com apoio de um professor da área de Ciências da Natureza e suas Tecnologias, uma vez que apresenta parte da classificação dos seres vivos em conjuntos, de acordo com características comuns. Para isso, verificar a possibilidade de o professor dessa área discutir com os estudantes outras possíveis classificações dos seres vivos.

Operações com conjuntos

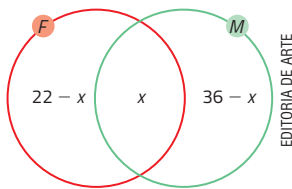
Ao apresentar a união e a interseção de conjuntos, explicar aos estudantes que, em Matemática e em Lógica, os termos **e** e **ou** são chamados de **conectivos** e têm significados específicos. Em união de conjuntos, ao se escrever $x \in A$ ou $x \in B$, tem-se que esse “ou” é inclusivo, ou seja, permite que pelo menos uma das afirmações a seguir ocorra:

- $(x \in A)$;
- $(x \in B)$;
- $(x \in A)$ e $(x \in B)$.

Em relação à interseção de conjuntos, a palavra **e** faz a conjunção (conexão) de duas afirmações que devem ocorrer simultaneamente. Nesse caso, quando escrevemos $x \in A$ e $x \in B$, dizemos que, ao mesmo tempo, x pertence a A e a B .

Na atividade R4, são utilizadas etapas para se chegar ao resultado. Sugere-se estruturar e executar essas etapas, como foi apresentado, sempre que perceber que os estudantes estão com dificuldades em determinado problema matemático. Essa estratégia também pode ser utilizada pelos próprios estudantes quando estiverem diante de um problema matemático a ser resolvido.

Para ampliar o repertório dos estudantes, ainda na atividade resolvida R4, discutir outra estratégia para a resolução do problema proposto; nesse caso, considerar $n(F \cap M) = x$ e representar a relação entre os conjuntos por meio de um diagrama de Venn.



Propor aos estudantes que escrevam e resolvam uma equação para obter a solução do problema, como: $(22 - x) + x + (36 - x) = 50$. Nesse momento, podem ser verificados os conhecimentos prévios dos estudantes em relação à resolução de equações do 1º grau com uma incógnita, conteúdo tratado no Ensino Fundamental. Para isso, propor algumas equações desse tipo a fim de que eles as resolvam e, se necessário, relembrem o algoritmo para essa resolução.

Atividade Extra

Com os estudantes organizados em três grupos, propor a cada grupo que investigue uma das propriedades a seguir, relacionadas à diferença entre conjuntos, apresentando argumentos para verificar a validade dela. Ao final, pedir aos grupos que exponham na lousa suas conclusões, utilizando, por exemplo, diagramas.

- Propriedade 1: $B \subset A \Leftrightarrow B - A = \emptyset$.
- Propriedade 2: $A \cap B = \emptyset \Leftrightarrow A - B = A$.
- Propriedade 3: $A \neq B \Leftrightarrow A - B \neq B - A$.

A seção **Atividades** das páginas 22 e 23 tem como objetivo trabalhar as operações com conjuntos. Em relação à atividade 12, no item **a**, espera-se que os estudantes percebam que não é possível resolver o problema com os dados disponíveis no enunciado; no item **b**, eles podem indicar a quantidade de elementos do conjunto B como o dado faltante no enunciado do problema. Por exemplo, se o enunciado indicar que o conjunto B tem 20 elementos, é possível determinar que o conjunto A tem 23 elementos ($31 - 20 + 12 = 23$).

A atividade 17 aborda o Tema Contemporâneo Transversal Saúde, pois apresenta um contexto sobre vacinação, relacionado à área de Ciências da Natureza e suas Tecnologias. Verificar a possibilidade de desenvolver um trabalho com o professor da área a respeito da importância da vacinação e das possíveis consequências da ausência de aplicação de determinadas vacinas. Conversar com os estudantes sobre o combate às *fake news* associadas à temática. Em alguns casos, notícias falsas podem incentivar a não vacinação, o que é prejudicial não só para a pessoa em questão mas também para toda a população.

A proposição dessas atividades pode constituir um dos momentos de avaliação desta Unidade. Para isso, propor aos estudantes que realizem as atividades em sala de aula ou em casa e organize-os para

que apresentem suas resoluções na lousa. Nesse momento, eles podem apresentar seus modos de raciocínio, o que permite ao professor identificar possíveis equívocos e regular os processos de ensino e de aprendizagem, caso necessário. Em particular, propor aos estudantes que entreguem, em uma folha avulsa, a atividade 17. Com base na análise dos registros dos estudantes, é possível identificar alguns aspectos, como as estratégias utilizadas por eles, o caminho percorrido para a resolução do problema e se houve a verificação da resposta obtida.

Páginas 24 e 25

Integrando com Ciências da Natureza e suas Tecnologias

O trabalho com essa seção favorece, com maior ênfase, o desenvolvimento das competências gerais 2 e 8 e da competência específica 3 da área de Ciências da Natureza e suas Tecnologias. Ainda nessa seção, é tratado o Tema Contemporâneo Transversal Saúde, uma vez que se busca investigar, refletir e analisar criticamente, informações relacionadas à doação de sangue, de maneira a incentivar essa ação e a comunicar sua importância por meio da elaboração de uma peça publicitária.

Comentar com os estudantes que a doação de sangue é uma ação voluntária que representa, sobretudo, uma questão de solidariedade e cuidado com o próximo. Diz respeito a uma rede de colaboração e de ajuda mútua, que possibilita que vidas sejam salvas. Explicar a eles que a quantidade de sangue retirada (no máximo, 450 mL de sangue) não afeta a saúde do doador, pois a recuperação é imediata após a doação. Além disso, todo sangue doado pode beneficiar mais de um paciente com apenas uma unidade coletada.

Conexões

Sugerir aos estudantes que acessem o *site* indicado a seguir para obter mais informações sobre a compatibilidade entre os tipos de sangue.

- BRASIL. Ministério da Saúde. **Doação de sangue**. Brasília, DF: MS, [2024]. Disponível em: <https://www.gov.br/saude/pt-br/assuntos/saude-de-a-a-z-1/d/doacao-de-sangue>. Acesso em: 27 set. 2024.

Páginas 26 a 37

Conjunto dos números naturais (\mathbb{N}) e conjunto dos números inteiros (\mathbb{Z})

Comentar com os estudantes que a arte rupestre, como são chamadas as pinturas e gravuras feitas em cavernas, possivelmente, representava o cotidiano dos seres humanos, mostrando como era a vida milhares de anos atrás. Nesse momento, instigar os estudantes a imaginar como o ser humano pré-histórico fazia para representar, por exemplo, a quantidade de dias transcorridos ou de membros do seu grupo, e a refletir sobre a evolução da noção de “número” ao longo da história, à medida que novas situações foram surgindo. Esse contexto favorece uma abordagem do Tema Contemporâneo Transversal Diversidade Cultural.

Ao apresentar que \mathbb{N} é um conjunto fechado para as operações de adição e multiplicação, explicar que o conjunto dos números naturais não é fechado para a operação de divisão. Em relação à subtração, para que ele seja fechado, é necessário expandir o conjunto dos números naturais, utilizando o conjunto dos números inteiros. Generalizando, pode-se definir que um conjunto é fechado em relação a determinada operação quando o resultado dessa operação com quaisquer elementos desse conjunto ainda é um elemento do conjunto.

Conjunto dos números racionais (\mathbb{Q})

O trabalho com esse tópico favorece, com maior ênfase, o desenvolvimento das competências específicas 1 e 3 e das habilidades EM13MAT104 e EM13MAT314 da área de Matemática e suas Tecnologias, uma vez que aborda a interpretação e a análise crítica de taxas e índices de natureza socioeconômica, bem como

situações que envolvem a razão entre duas grandezas de naturezas distintas.

Para o trabalho com esse tópico, sugere-se realizar uma avaliação diagnóstica a fim de identificar os conhecimentos prévios dos estudantes a respeito dos números racionais. Para isso, propor questionamentos à turma, como: O que vocês entendem por números racionais? Em que situações esses números costumam ser utilizados? Como esses números podem ser representados? O que são dízimas periódicas? Com base nesses questionamentos, o professor tem a oportunidade de direcionar seu trabalho e o planejamento de suas futuras ações.

No boxe **Matemática na história**, explorar com os estudantes o contexto histórico da época. Dizer a eles que, no período das cheias, as águas do Rio Nilo subiam e inundavam uma ampla região ao longo da margem. Com isso, o rio derrubava as pedras utilizadas para marcar o limite do terreno de cada agricultor. Quando as águas baixavam, havia a necessidade de os funcionários remarcarem as áreas. Assim, eles utilizavam cordas como unidade de medida, separando cada unidade de comprimento por meio de nós. No entanto, nem sempre as unidades cabiam uma quantidade de vezes inteira nos lados do terreno, o que levou os egípcios ao uso das frações.

A seção **Atividades** das páginas 31 e 32 tem como objetivo trabalhar a identificação de elementos pertencentes aos conjuntos dos números naturais, dos números inteiros e dos números racionais, bem como a representação desses conjuntos por meio de diagramas. Além disso, nessa seção, é trabalhada a transformação de um número racional na forma de fração para a forma decimal, e vice-versa. Em especial, a atividade 29 favorece o desenvolvimento da competência específica 5 da área de Matemática e suas Tecnologias, uma vez que busca investigar e estabelecer conjecturas que expressem regularidades envolvendo a relação de paridade dos números naturais.

Na página 34, ao trabalhar o Índice de Massa Corporal (IMC), comentar com os estudantes que a classificação apresentada se refere a pessoas adultas, com idade entre 20 e 59 anos. Explicar a eles que a avaliação do estado nutricional para adolescentes (de 10 a 19 anos) considera, além da análise do IMC de acordo com a idade, a estatura para a idade, o peso em relação à estatura e o peso em relação à idade. Sugerir aos estudantes que verifiquem sua massa (em quilograma) e sua estatura (em metro) e façam o cálculo do IMC. Com o intuito de evitar qualquer constrangimento, é importante que eles não se sintam obrigados a compartilhar seu resultado com os demais colegas da turma.

Conexões

Sugerir aos estudantes que acessem o *site* indicado a seguir para obter informações sobre a classificação do IMC para adolescentes.

- BIBLIOTECA VIRTUAL EM SAÚDE DA ATENÇÃO PRIMÁRIA À SAÚDE. **Cálculo do índice de massa corporal (IMC)**. São Paulo: BVS APS, [2024]. Disponível em: <https://aps.bvs.br/apps/calculadoras/?page=7>. Acesso em: 24 set. 2024.

Aproveite esse momento para discutir com os estudantes atitudes de ameaças e discriminação, conhecidas como *bullying*, que evidenciam preconceitos, como a intolerância às diferenças relacionadas às características físicas dos jovens, principalmente, em casos de obesidade e de baixo peso. Propor um debate a fim de que os estudantes exponham seus pontos de vista acerca da prática de *bullying*. Conversar com eles sobre as regras adotadas pela escola diante dessa prática e sobre como podem ser agentes de prevenção, de maneira que assumam atitudes respeitadas e tolerantes com os colegas e promovam a cultura de paz. É importante que eles consigam identificar quais atitudes caracterizam *bullying*, bem como os agressores, as vítimas e as testemunhas.

Ao trabalhar o boxe **No mundo do trabalho**, verificar a possibilidade de receber algum profissional da área para conversar com os estudantes a respeito dessas profissões. Essa sugestão de abordagem favorece o desenvolvimento da competência geral 6, uma vez

que valoriza a diversidade de saberes e promove a apropriação dos estudantes em relação a conhecimentos e experiências associados ao mundo do trabalho.

A seção **Atividades** das páginas 35 a 37 tem como objetivo trabalhar a interpretação e a análise crítica de situações envolvendo o Índice de Massa Corporal, a densidade demográfica e a taxa de mortalidade infantil. Além disso, aborda o Índice de Desenvolvimento da Educação Básica (Ideb).

Conexões

Sugerir aos estudantes que acessem o *site* indicado a seguir para obter mais informações sobre os estados e os municípios do Brasil, como população, extensão territorial e taxa de mortalidade infantil.

- INSTITUTO BRASILEIRO DE GEOGRAFIA E ESTATÍSTICA. **Cidades e estados do Brasil**. Rio de Janeiro: IBGE, [2024]. Disponível em: <https://cidades.ibge.gov.br/>. Acesso em: 27 set. 2024.

Páginas 38 a 47

Conjunto dos números irracionais (I)

O trabalho com o conjunto dos números irracionais inicia-se com o fato de que, uma vez fixada uma unidade de comprimento, existem segmentos de reta cujo comprimento não pode ser expresso por um número racional; no caso apresentado, trata-se da medida da diagonal de um quadrado de lado com medida igual a 1 unidade.

Comentar com os estudantes que o método por contradição, ou por absurdo, é utilizado para demonstrar que $\sqrt{2}$ não é um número racional. Nesse caso, supõe-se que $\sqrt{2}$ seja racional (hipótese) e, utilizando-se argumentos verdadeiros, determina-se uma contradição, concluindo que $\sqrt{2}$ não é racional. Relembrar que uma fração irredutível não pode ser simplificada, pois o numerador e o denominador são primos entre si.

Explicar para eles que a demonstração de que π é irracional não será apresentada, pois, para isso, são necessários conceitos matemáticos mais avançados do que os propostos neste nível de ensino.

Para complementar o boxe **Matemática na história** da página 42, comentar com os estudantes que, por ser um número irracional, π tem uma quantidade infinita de casas decimais e que algumas aproximações foram calculadas ao longo da história.

Conjunto dos números reais (R)

Explicar aos estudantes que o conjunto dos números reais é fechado para as operações de adição, subtração, multiplicação e divisão. Comentar que, além dos conjuntos \mathbb{N} , \mathbb{Z} , \mathbb{Q} e \mathbb{I} , podemos destacar outros subconjuntos de \mathbb{R} , como os indicados a seguir.

- Conjunto dos números reais não nulos: $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} - \{0\}$.
- Conjunto dos números reais não negativos: \mathbb{R}_+ .
- Conjunto dos números reais positivos: $\mathbb{R}_+^* = \mathbb{R}_+ - \{0\}$.
- Conjunto dos números reais não positivos: \mathbb{R}_- .
- Conjunto dos números reais negativos: $\mathbb{R}_-^* = \mathbb{R}_- - \{0\}$.

Explicar aos estudantes que, além das notações de intervalos reais apresentadas, podem ser utilizados parênteses para indicar intervalos abertos. Por exemplo, considerando os números reais a e b , tal que $a < b$, tem-se:

- intervalo real aberto: (a, b) ;
- intervalo real fechado à esquerda e aberto à direita: $[a, b)$;
- intervalo real aberto à esquerda e fechado à direita: $(a, b]$.

Comentar que esses dois últimos intervalos reais podem ser denominados também intervalo real semiaberto ou semifechado.

A seção **Atividades** das páginas 46 e 47 tem como objetivo trabalhar a classificação dos números reais, sua representação por meio de diagramas e na reta real. Também são trabalhadas as notações de intervalos reais e as operações com esses intervalos e o módulo de um número real. A atividade 38 favorece o

desenvolvimento da competência específica 5 da área de Matemática e suas Tecnologias, uma vez que busca investigar e estabelecer conjecturas que expressem situações para determinar um valor aproximado da raiz quadrada de um número natural. É importante enfatizar que o método de Herão apresentado é utilizado somente para aproximar a raiz quadrada de números naturais que não sejam quadrados perfeitos, além disso, deve-se tomar a e b positivos.

Páginas 48 e 49

● Você conectado

O trabalho com essa seção favorece, com maior ênfase, o desenvolvimento da competência geral 5, uma vez que utiliza tecnologias digitais para produzir conhecimento e resolver problemas.

Comentar com os estudantes que ϕ é um número irracional cujas aproximações podem ser obtidas por meio de calculadoras científicas e programas de computador. Nessa seção, a figura do retângulo áureo é uma representação de retângulo cuja razão entre a medida do lado maior e a medida do lado menor é chamada de **razão áurea** e corresponde ao número ϕ .

Orientar os estudantes na realização das etapas de construção do retângulo áureo. Na etapa **A**, para a construção do quadrado, eles devem selecionar a opção Polígono regular, clicar em $A(0, 0)$ e $B(1, 0)$, por exemplo, e, na caixa de texto que se abrir, digitar "4" e clicar em **OK**. Depois, com a opção Ponto médio ou centro selecionada, clicar sobre \overline{AB} e \overline{CD} , obtendo os pontos médios E e F desses segmentos de reta, respectivamente.

Na etapa **B**, para construir \overline{AB} e \overline{CD} , com a opção Reta selecionada, clicar sobre A e B e, depois, sobre C e D , respectivamente. Em seguida, para obter a circunferência de centro E , que passa por C e D , selecionar a opção Círculo dados centro e um de seus pontos e clicar em E e C . De maneira análoga, obtém-se a circunferência de centro F , que passa por A e B .

Na etapa **C**, para marcar os pontos G e H , selecionar a opção Interseção de dois objetos e clicar sobre a circunferência de centro E e, em seguida, sobre \overline{AB} . Para marcar os pontos I e J , clicar sobre a circunferência de centro F e sobre \overline{CD} . Por fim, com a opção Polígono selecionada, clicar nos pontos A, H, I, J, D e A , nessa ordem, construindo o retângulo áureo $AHJD$.

Mãos à obra - página 49

1. Para resolver essa questão, os estudantes podem usar estimativas e considerar a aproximação de ϕ indicada no início da seção.
2. Para os estudantes realizarem a medição do lado \overline{AH} , por exemplo, explicar que, após selecionar a opção Distância, comprimento ou perímetro, eles devem clicar nos pontos A e H . Nesse momento, destacar que a medida obtida é aproximada. No item **a**, espera-se que eles percebam que a medida do lado \overline{AD} corresponde ao valor unitário, ou seja, 1 unidade de medida. No item **b**, sugerir aos estudantes o uso de uma calculadora científica ou de uma planilha eletrônica para calcular as aproximações de ϕ .
3. Para resolver essa questão, os estudantes podem utilizar uma calculadora científica ou uma planilha eletrônica.
4. Caso os estudantes tenham dificuldade em resolver essa questão, calcular com eles na lousa algumas razões entre um termo e o antecessor na sequência de Fibonacci a fim de que eles percebam que, quanto maiores forem esses termos, mais próxima do valor de ϕ será a razão obtida.

Páginas 50 e 51

● O que estudei

A seção tem como objetivo possibilitar um momento de reflexão e de autoavaliação para o professor e os estudantes. Para o trabalho com as questões 1, 2 e 3, sugere-se localizar, na parte geral

destas **Orientações para o professor**, o tópico que trata especificamente dessa seção, em que são apresentadas mais informações sobre como conduzi-la.

Na questão 4, verificar a possibilidade de propor aos estudantes uma roda de conversa para que eles compartilhem com os demais colegas da turma suas respostas e experiências apresentadas nos itens **a** e **b**.

Páginas 52 a 54

● Praticando: Enem e vestibulares

Essa seção possibilita a realização de uma avaliação somativa dos estudantes. Sugere-se localizar, na parte geral destas **Orientações para o professor**, o tópico que trata especificamente dessa seção, na qual são apresentadas mais informações sobre como conduzi-la.

Unidade 2 Relação entre grandezas e noção de função

Quadro-síntese da Unidade

BNCC	Competências gerais: 2 e 10 Competências específicas de Matemática e suas Tecnologias: 1, 3, 4 e 5 Competência específica de Ciências da Natureza e suas Tecnologias: 3 Habilidades de Matemática e suas Tecnologias: EM13MAT103, EM13MAT314, EM13MAT402, EM13MAT404 e EM13MAT510
Temas Contemporâneos Transversais	Ciência e Tecnologia; Educação Financeira; e Educação Fiscal
Conteúdos	Grandezas, relações entre grandezas, conceito de função, domínio, contradomínio e conjunto imagem de uma função, gráfico de uma função, crescimento e decréscimo de uma função e estudo do sinal de uma função.

Objetivos da Unidade

- Compreender e reconhecer o uso de unidades de medida padronizadas para expressar diferentes grandezas, incluindo aquelas relacionadas à informática, realizando conversões entre elas, quando necessário.
- Identificar e analisar a relação de dependência entre duas ou mais grandezas, em situações cotidianas ou de diferentes áreas do conhecimento.
- Compreender o conceito de função como relação que associa elementos de dois conjuntos.
- Reconhecer domínio, contradomínio e conjunto imagem de uma função, além de identificar sua lei de formação.
- Calcular o valor numérico de uma função.
- Analisar e determinar funções definidas por mais de uma sentença, identificando suas características em diferentes contextos.
- Esboçar e analisar o gráfico de uma função, identificando seu crescimento ou decréscimo em determinado intervalo do domínio, bem como fazer o estudo do seu sinal.
- Compreender e representar pontos do gráfico de funções utilizando planilhas eletrônicas.

Orientações didáticas

O trabalho com esta Unidade possibilita aos estudantes desenvolver o pensamento algébrico, estabelecendo relações entre esse tipo de pensamento e demandas do cotidiano para identificar situações que podem ser expressas por meio de uma função e representá-las graficamente, com ou sem o uso de tecnologias digitais.

Página 55

Abertura da Unidade

Antes da leitura do texto, pedir a alguns estudantes que realizem a medição do comprimento da sala de aula usando, como referência, uma parte do corpo, por exemplo, os pés. Em seguida, promover uma discussão questionando-os se a quantidade de “pés” obtida nas medições foi igual e pedindo que justifiquem a resposta. Espera-se que eles percebam que a diferença nas medições ocorre porque o tamanho dos pés varia de pessoa para pessoa. O objetivo dessa dinâmica é fazê-los refletir sobre a necessidade da padronização das unidades de medida.

Após a leitura do texto, comentar com os estudantes que a mudança de definição do quilograma, em 2019, não altera medições que são feitas no dia a dia, porém se mostra relevante quando se trata de pesquisas científicas e medidas de grande precisão.

São apresentadas, a seguir, as respostas aos itens propostos nessa seção.

1. Resposta possível: As unidades de medida padronizadas servem de referência; assim, independentemente da região, é possível realizar uma medição e expressar a medida obtida em uma mesma unidade, facilitando, por exemplo, a venda e a compra de mercadorias.
2. Resposta esperada: Essa redefinição ocorreu porque, com o passar do tempo, o protótipo internacional do quilograma perdeu 50 microgramas de sua massa. A nova definição é mais precisa e menos suscetível a mudanças.
3. Respostas possíveis: Área: metro quadrado; volume: metro cúbico; capacidade: litro; velocidade: metro por segundo; temperatura: grau Celsius.

Páginas 56 a 65

Grandezas

O trabalho com esse tópico favorece, com maior ênfase, o desenvolvimento da competência geral 10, das competências específicas 1 e 3 e das habilidades EM13MAT103 e EM13MAT314 da área de Matemática e suas Tecnologias e da competência específica 3 da área de Ciências da Natureza e suas Tecnologias, uma vez que aborda a interpretação e a resolução de problemas em variados contextos, sendo empregadas unidades de medida de diferentes grandezas.

Questionar os estudantes se eles conheciam todas as grandezas e unidades de medida indicadas no exemplo do aplicativo e pedir que citem em que outras situações elas podem ser utilizadas. Se necessário, propor a eles que pesquisem algumas delas. Por exemplo, a umidade relativa do ar corresponde à razão entre a quantidade de moléculas de água no ar e a quantidade máxima de moléculas de água no ar em estado de vapor em determinada temperatura do ambiente.

A apresentação das grandezas e unidades (de base e derivadas) do Sistema Internacional de Unidades (SI) pode ser acompanhada por um professor da área de Ciências da Natureza e suas Tecnologias, pois algumas dessas grandezas estão relacionadas a contextos dessa área do conhecimento. Com esse professor, pode-se planejar uma aula com o objetivo de apresentar aplicações dessas grandezas nos contextos da Física, da Química e da Biologia.

Explicar aos estudantes que, para indicar valores de grandezas que são muito maiores (múltiplos) ou muito menores (submúltiplos) que a unidade do SI, foi adotado um conjunto de prefixos que podem ser usados com qualquer unidade de medida (de base ou derivadas). Em relação à unidade de comprimento metro, podem-se destacar, por exemplo, os prefixos **deci**, **centi** e **mili**, correspondentes à

décima, à centésima e à milésima parte do metro, respectivamente, e **kilo**, que corresponde a mil vezes o metro.

O estudo das atividades resolvidas das páginas 58 e 59 contribui para o desenvolvimento da habilidade EM13MAT314, pois elas trabalham situações que envolvem grandezas determinadas pela razão de outras.

Conexões

Após a resolução da atividade resolvida R1, sugerir aos estudantes que acessem o *site* indicado a seguir para obter informações a respeito do experimento sobre densidade realizado por Arquimedes de Siracusa (287 a.C.–212 a.C.).

- MAZALI, Italo Odone. **Determinação da densidade de sólidos pelo método de Arquimedes**. Campinas: Unicamp: IQM: LQES, c2001–2020. Disponível em: https://lqes.iqm.unicamp.br/images/vivencia_lqes_meprotec_densidade_arquimedes.pdf. Acesso em: 27 set. 2024.

O trabalho com grandezas relacionadas à informática contribui para o desenvolvimento da habilidade EM13MAT103, pois trata de unidades de medidas ligadas aos avanços tecnológicos, como as de armazenamento e de velocidade de transferência de dados. Além disso, propicia uma abordagem do Tema Contemporâneo Transversal Ciência e Tecnologia. Comentar com os estudantes que, com os avanços tecnológicos da internet, foi necessário padronizar unidades de medida para expressar o armazenamento de dados de dispositivos.

No tópico **Armazenamento de dados**, promover uma roda de conversa com os estudantes sobre o uso do serviço de armazenamento de dados em nuvem, destacando suas vantagens (redução de espaço na memória do celular ou do computador, economia no custo com opções de serviços gratuitos etc.) e os cuidados necessários (evitar o acesso em computadores públicos, usar *sites* confiáveis, criar senhas seguras etc.).

Ao explicar que 1 baite corresponde ao espaço ocupado por um caractere e equivale a 8 bites, dizer aos estudantes que caracteres são símbolos, por exemplo, letras, números, colchetes, pontos e asteriscos, como os dos teclados de computadores.

Ao explorar o quadro com as conversões entre o baite e alguns de seus múltiplos, explicar aos estudantes que as unidades de medida de armazenamento de dados podem ser expressas ou calculadas com o auxílio de potências. Se julgar necessário, verificar os conhecimentos prévios dos estudantes em relação a potências e relembra-los desse conteúdo, estudado em anos anteriores.

Comentar com os estudantes que os prefixos para baite (kilo, mega, giga e tera) são referentes ao sistema decimal, ou seja, são múltiplos de base 10, e não de potências de base 2, como ocorre no armazenamento de dados. No entanto, popularmente, emprega-se o mesmo prefixo.

No trabalho com o tópico **Taxa de transferência de dados**, explicar aos estudantes que essa taxa corresponde à velocidade com que os dados são transferidos. Esclarecer que os termos **download** e **upload** indicam o processo de receber ou baixar dados e de enviar dados via internet, respectivamente. Na resolução da situação apresentada, esclarecer aos estudantes que as grandezas “tamanho do arquivo” e “tempo” são diretamente proporcionais entre si, pois, ao se dobrar uma delas, a outra também dobra; ao se reduzir uma delas à metade, a outra também será reduzida à metade; e assim por diante. Relembra a propriedade fundamental das proporções, conteúdo tratado em anos anteriores.

A seção **Atividades** das páginas 62 a 65 tem como objetivo trabalhar diferentes grandezas, como comprimento, massa, volume e densidade, bem como unidades de medidas relacionadas à informática. A atividade 5 propicia o desenvolvimento da habilidade EM13MAT103, uma vez que aborda informações de textos científicos relacionadas ao planeta Marte. No item c, relembra os estudantes de que a amplitude térmica corresponde à diferença entre a temperatura máxima e a temperatura mínima registradas em determinado período em um mesmo local ou região. A resolução do

item **e** pode ser acompanhada por um professor da área de Ciências da Natureza e suas Tecnologias. Nesse sentido, pode-se planejar com esse professor a apresentação de ideias relacionadas à Astronomia, como os conceitos de planeta, satélite natural, período orbital e período de rotação.

A atividade 13 trabalha informações relacionadas aos impactos da tecnologia nas relações humanas e aos benefícios do armazenamento de dados em nuvem como uma maneira de preservar o ambiente e tornar o planeta mais sustentável. Nesse sentido, propicia-se o desenvolvimento da competência específica 3 da área de Ciências da Natureza e suas Tecnologias. No item **d**, pode-se planejar, em conjunto com um professor dessa área, uma abordagem ligada ao tema Tecnologia da Informação Verde (TI Verde) e à computação em nuvem em relação ao mercado de trabalho. Com isso, espera-se que os estudantes possam identificar diferentes profissionais que utilizam esse tipo de tecnologia e o que as empresas têm buscado fazer, por meio da utilização de reciclagens eletrônicas, para reduzir ou compensar a poluição produzida.

Ao propor a leitura do box **No mundo do trabalho**, verificar a possibilidade de convidar um profissional da comunidade, que se enquadre nas características apresentadas, para falar com a turma sobre o seu trabalho e explicar de que modo ele contribui para a sustentabilidade do planeta.

● Conexões

Sugerir aos estudantes que acessem o *site* indicado a seguir para obter informações sobre TI Verde.

- RIVEROS, Lilian Jeannette Meyer; MÜLLER, Philipe; WONZOSKI, Fabiano de Oliveira. TI Verde: contribuição sustentável e econômica da computação em nuvem para as empresas. **Anuário Pesquisa e Extensão Unesco Videira**, Joaçaba, v. 2, 17 ago. 2017. Disponível em: <https://unesco.emnuvens.com.br/apuev/article/view/15184>. Acesso em: 27 set. 2024.

Páginas 66 a 71

Relações entre grandezas

O trabalho com esse tópico favorece, com maior ênfase, o desenvolvimento da competência específica 5 e da habilidade EM13MAT510 da área de Matemática e suas Tecnologias, pois aborda a investigação de conjuntos de dados relativos ao comportamento de duas variáveis numéricas.

Ao explorar o quadro do exemplo 1, pedir aos estudantes que escrevam e calculem a razão entre as quantidades de massa de plástico reciclado, em tonelada, e as quantidades correspondentes de água economizada, em litro. Por exemplo, para 2 toneladas, tem-se $\frac{2}{900} = \frac{1}{450}$. Em seguida, questioná-los sobre qual é a relação entre as razões calculadas e sobre o que isso indica. Espera-se que eles percebam que todas as razões são equivalentes, isto é, independentemente da quantidade de massa de plástico reciclado considerada, a razão entre essa quantidade e a quantidade correspondente de água economizada será a mesma. Conversar com os estudantes sobre outros benefícios socioambientais da reciclagem de materiais plásticos, como a redução das emissões de gases de efeito estufa (GEEs) na atmosfera e a geração de emprego de catadores que recolhem esse tipo de material.

As informações do box **Dica** da página 67 podem ser apresentadas com apoio de um professor da área de Ciências da Natureza e suas Tecnologias. Para isso, planejar com esse professor explicações aos estudantes sobre a diferença entre grandezas escalares e grandezas vetoriais, exemplificando cada uma delas: a grandeza escalar é aquela que pode ser definida apenas com um valor e a unidade de medida correspondente (temperatura, massa, volume e tempo); a grandeza vetorial, além do valor e da unidade de medida correspondente, deve ter o sentido e a direção indicados (força, velocidade e aceleração).

A seção **Atividades** das páginas 68 a 71 tem como objetivo trabalhar a análise de situações que envolvem a relação de

dependência entre duas grandezas. Na atividade 22, o contexto abordado favorece o desenvolvimento da competência específica 1 da área de Ciências da Natureza e suas Tecnologias, uma vez que analisa fenômenos naturais com base nas interações e nas relações entre matéria e energia. Verificar a possibilidade de planejar o trabalho com essa atividade em parceria com um professor dessa área, com o objetivo de apresentar aos estudantes ideias relacionadas à Biologia, como os conceitos de nível trófico e de espécies consumidoras e produtoras. Explicar aos estudantes que os níveis tróficos estão relacionados à obtenção de energia entre indivíduos de um ecossistema e são compostos de seres autotróficos e heterotróficos. Os autotróficos são aqueles que têm a capacidade de sintetizar a própria energia, como o capim, que fazem fotossíntese. Já os heterotróficos são organismos que precisam obter energia por meio da alimentação, como os gafanhotos e os sapos.

● Atividade Extra

Após a realização da atividade 19, com os estudantes organizados em grupos, pedir que escolham um equipamento elétrico da escola e pesquisem sua potência, em watt, e o tempo estimado de seu funcionamento mensal, em hora. Propor que determinem o consumo de energia elétrica correspondente e que, com base no resultado obtido, calculem quantos reais são gastos no mês com o uso desse equipamento. Para isso, eles devem multiplicar o consumo de energia elétrica pelo valor da tarifa vigente do município em que a escola está localizada. Esse valor pode ser consultado no *site* da concessionária de energia elétrica local.

Para a realização da atividade 27, pedir previamente aos estudantes que levem para a sala de aula embalagens de produtos em que seja possível verificar as informações nutricionais, como a quantidade de porções, proteínas, carboidratos, fibra alimentar etc. Ao final da atividade, propor a eles que compartilhem as questões elaboradas com os demais grupos.

Páginas 72 a 76

Conceito de função

O trabalho com esse tópico favorece, com maior ênfase, o desenvolvimento das competências específicas 4 e 5 e das habilidades EM13MAT404 e EM13MAT510 da área de Matemática e suas Tecnologias, uma vez que analisa funções definidas por uma ou mais sentenças, em suas diferentes representações, bem como investiga conjuntos de dados relativos ao comportamento de duas variáveis numéricas.

Ao definir função como a relação unívoca que associa elementos de dois conjuntos, enfatizar aos estudantes a diferença entre relação e função, de maneira que eles compreendam que nem toda relação é uma função. Destacar que, em uma função, para cada valor da variável independente, há um único valor correspondente da variável dependente. Nesse caso, se A é o conjunto dos elementos da variável independente, e B é o conjunto dos elementos da variável dependente, então temos uma função de A em B .

A seção **Atividades** das páginas 75 e 76 tem como objetivo trabalhar a identificação de funções de acordo com a definição ou com sua representação por meio de diagramas ou de sua lei de formação. Em especial, a atividade 33, cujo contexto está relacionado ao valor do Imposto de Renda da Pessoa Física (IRPF), trabalha a análise de funções definidas por mais de uma sentença. Assim, além de abordar os Temas Contemporâneos Transversais Educação Financeira e Educação Fiscal, contribui para o desenvolvimento da habilidade EM13MAT404. No item **c**, espera-se que eles percebam que a lei de formação da função f corresponde a uma única representação indicando todas as expressões de cálculo do IRPF definidas anteriormente. No item **e**, é importante enfatizar aos estudantes que o piso salarial para uma mesma profissão pode variar de acordo com a unidade da Federação, o município ou, até mesmo, em uma mesma empresa.

A realização da atividade 28 pode constituir um momento de avaliação a fim de verificar se os estudantes compreenderam o conceito de função e as condições necessárias para se ter uma função de A em B . Eles devem reconhecer que cada elemento do conjunto A , denominado domínio, deve estar associado a um único elemento do

conjunto B , denominado contradomínio. Como complemento, perguntar aos estudantes que alterações podem ser feitas nos itens **b** e **c** para que as relações apresentadas possam ser denominadas funções. Por exemplo, no item **b, uma alteração possível é excluir a correspondência entre -4 e -2 e, no item **c**, uma possibilidade é incluir uma correspondência entre -2 e algum elemento do conjunto B . Por fim, pedir aos estudantes que escrevam o domínio, o contradomínio e o conjunto imagem de cada uma das funções apresentadas e das que foram obtidas com as alterações.**

Páginas 77 a 79

Integrando com Ciências da Natureza e suas Tecnologias

O trabalho com essa seção favorece, com maior ênfase, o desenvolvimento das competências gerais 2 e 10, das competências específicas 1 e 3 e das habilidades EM13MAT103 e EM13MAT314 da área de Matemática e suas Tecnologias. Além disso, propicia uma abordagem do Tema Contemporâneo Transversal Ciência e Tecnologia, uma vez que busca utilizar procedimentos matemáticos e estratégias para investigar questões relacionadas aos avanços tecnológicos. Pode-se destacar também o incentivo ao trabalho coletivo e à tomada de decisões acerca de planos de conexão de internet de acordo com os padrões de qualidade divulgados no site da Agência Nacional de Telecomunicações (Anatel).

Promover uma roda de conversa com os estudantes acerca da importância de analisar informações sobre os serviços prestados pelas operadoras antes de contratá-los, independentemente do tipo de serviço, de maneira que eles verifiquem se as obrigações técnicas, além da velocidade de conexão, estão de acordo com a regulamentação.

Para a resolução da atividade 5, se possível, propor aos estudantes que escolham um plano de internet que pelo menos um dos integrantes do grupo utilize. Para o item **a**, eles podem consultar a fatura do plano de internet contratado ou entrar em contato com o contratante para obter essas informações. No item **c**, sugerir que façam *download* e *upload* de alguns arquivos e registrem as variações que observaram, como o tempo que cada arquivo demorou para ser baixado e o tamanho desse arquivo.

O tema trabalhado nessa seção possibilita uma abordagem por meio da metodologia ativa aprendizagem baseada em projetos, apresentada na parte geral destas **Orientações para o professor**. Uma sugestão é que esse projeto apresente uma proposta de avaliação de serviços de internet prestados por operadoras que atendem à região onde a escola está localizada. Essa proposta pode ser exibida por meio de vídeo ou *podcast* (programa de áudio veiculado na internet) e disponibilizada em uma rede social. Para isso, apresentar aos estudantes, como sugestão, as seguintes informações a serem consideradas na elaboração dessa proposta:

- avaliação do local de instalação do plano (quantidade de pessoas na residência e de dispositivos conectados);
- tipo de conexão de internet (discada, fibra ótica, rádio etc.);
- planos oferecidos (velocidade de *download* e de *upload* da conexão; limitação de consumo; fidelidade de contrato);
- ferramentas disponibilizadas (pontos de acesso, *modem wi-fi*);
- infraestrutura e reputação das operadoras;
- custo-benefício dos planos oferecidos, selecionando aquele que esteja de acordo com o orçamento.

Páginas 80 a 82

Estudo do domínio de uma função real

Nesse tópico, explicar aos estudantes que, ao estudar o domínio de uma função quando ele não está explícito ou restrito de acordo com o contexto, deve-se considerar o domínio como o maior conjunto de valores de x de maneira que a lei de formação estabeleça os valores reais de y .

Fonte dos dados: FINNEY, Ross L.; WEIR, Maurice D.; GIORDANO, Frank R.
Cálculo de George B. Thomas Jr. Tradução: Paulo Boschcov. 10. ed.
São Paulo: Pearson Addison Wesley, 2002. v. 1, p. 11.

A seção **Atividades** das páginas **81** e **82** tem como objetivo trabalhar a obtenção do domínio de uma função, bem como a de sua lei de formação. Na atividade 34, para a resolução do item **g**, é importante que os estudantes compreendam que, para a condição $\frac{x-3}{x+4} \geq 0$, há duas possibilidades: numerador não negativo e

denominador positivo ($x-3 \geq 0$ e $x+4 > 0$) e numerador não positivo e denominador negativo ($x-3 \leq 0$ e $x+4 < 0$). Além disso, o domínio da função é determinado pela união das duas soluções.

Para o trabalho com a atividade 39, é possível utilizar ideias da investigação matemática, uma das tendências metodológicas abordadas na parte geral destas **Orientações para o professor**. Para isso, antes de resolver os itens propostos, pedir aos estudantes que desenhem as próximas figuras da sequência e construam um quadro para indicar a quantidade de quadrados verdes e quadrados vermelhos em cada figura (por exemplo, para as primeiras seis figuras). Em seguida, propor que investiguem relações existentes entre a quantidade de quadrados verdes e a de quadrados vermelhos. É importante destacar que as respostas foram elaboradas considerando determinada interpretação. Porém, é possível que os estudantes identifiquem outros padrões e regularidades na sequência, o que deve ser considerado correto desde que apresentem justificativas consistentes.

Páginas 83 a 90

Gráfico de uma função

O trabalho com esse tópico favorece, com maior ênfase, o desenvolvimento das competências específicas 4 e 5 e das habilidades EM13MAT404 e EM13MAT510 da área de Matemática e suas Tecnologias, pois aborda as representações algébricas e gráficas de uma função, identificando domínio, imagem, crescimento e decréscimo, além da conversão de uma representação para a outra.

Antes de iniciar o estudo do conteúdo da página **83**, destacar aos estudantes que, no plano cartesiano, as escalas são as mesmas, isto é, a distância entre uma marcação e a seguinte deve ser a mesma em ambos os eixos. Comentar que, em alguns casos, de acordo com as características das variáveis da função em estudo, o gráfico pode ser representado com escalas diferentes entre os eixos ordenados, o que será devidamente explicitado no Livro do estudante.

Ao explorar o gráfico apresentado pelo aplicativo no exemplo do tópico **Crescimento e decréscimo de uma função**, na página **87**, espera-se que os estudantes compreendam que uma mesma função pode ter intervalos no domínio com classificações distintas de comportamento: crescente, decrescente ou constante. Explicar a eles que pontos de inflexão são aqueles em que o gráfico de uma função muda de comportamento. Por exemplo, o ponto de coordenadas (5, 4) é de inflexão, pois f é constante para $0 < x < 5$ e crescente para $5 < x < 15$.

A seção **Atividades** das páginas **89** e **90** trabalha a representação gráfica de funções pelos estudantes, bem como a análise de gráficos e a identificação do domínio e do conjunto imagem de funções representadas por gráficos.

Atividade Extra

Após a realização da atividade 45, propor aos estudantes que pesquisem uma fatura de água recente e investiguem se a cobrança é feita por faixas de consumo. Em caso afirmativo, pedir que esbocem um gráfico de uma função que represente o valor a pagar dessa fatura de água, em reais, de acordo com a quantidade de água consumida, em metro cúbico. Por fim, eles devem apresentar a lei de formação da função e atribuir alguns valores para o consumo de água a fim de analisar o valor da fatura correspondente.

Páginas 91 e 92

Estudo do sinal de uma função

No estudo do sinal de uma função, chamar a atenção dos estudantes para os valores positivos, negativos ou nulos (zeros da função), que estão relacionados à imagem. Explicar a eles que os zeros

da função correspondem às abscissas dos pontos em que o gráfico intersecta o eixo x .

As atividades da página 92 têm como objetivo trabalhar a representação gráfica e o sinal de uma função. Na atividade 50, como há diferentes representações de gráficos possíveis como resposta, propor a alguns estudantes que apresentem essas representações aos demais colegas da turma para avaliar se as respostas estão corretas. Além da malha quadriculada, o gráfico pode ser construído em uma planilha eletrônica ou em algum *software* de geometria dinâmica, como o GeoGebra.

Páginas 93 a 95

● Você conectado

O trabalho com essa seção favorece, com maior ênfase, o desenvolvimento da competência específica 4 e da habilidade EM13MAT402 da área de Matemática e suas Tecnologias, uma vez que aborda a conversão de representações algébricas de funções quadráticas em representações geométricas no plano cartesiano por meio de *softwares* de geometria dinâmica.

Explicar aos estudantes que apenas alguns pontos do domínio da função f serão representados na planilha eletrônica, visto que, como o domínio de f corresponde a todos os números reais de -2 até 4 , existem infinitas possibilidades de pontos que poderiam ser indicados.

Na etapa **A**, verificar se os estudantes compreenderam que, como o segundo número digitado é uma unidade maior que a do primeiro, ao utilizar a opção Guia de preenchimento automático, a planilha eletrônica cria uma sequência de números com essa característica, ou seja, cada número é uma unidade maior que a do anterior. Na etapa **B**, explicar que o símbolo “ \wedge ”, utilizado para indicar a lei de formação da função, representa potência.

Mãos à obra - página 95

1. Para resolver essa questão, os estudantes podem analisar a imagem dos pontos representados na planilha eletrônica e considerar que, entre esses pontos, é possível representar outros infinitos pontos.
2. No item **a**, os estudantes podem, por exemplo, calcular $g(-3)$ e $g(8)$ para cada uma das leis de formação apresentadas nas fichas e analisar em qual delas os pontos com as coordenadas obtidas foram indicados no gráfico.
3. Há diferentes possibilidades de representações do gráfico como resposta. Nesse sentido, auxiliar os estudantes na atribuição de valores arbitrários de $x \in D(f)$ e propor que esses gráficos sejam compartilhados com os demais colegas da turma.

Páginas 96 e 97

● O que estudei

A seção tem como objetivo possibilitar um momento de reflexão e de autoavaliação para o professor e os estudantes. Para o trabalho com as questões 1, 2 e 3, sugere-se localizar, na parte geral destas **Orientações para o professor**, o tópico que trata especificamente dessa seção, em que são apresentadas mais informações sobre como conduzi-la.

A questão 4 trabalha situações contextualizadas relacionadas às unidades de medidas de massa. No item **e**, espera-se que os estudantes percebam que, como x expressa a quantidade de quilograma de pão francês, os valores de x devem ser positivos. Pedir a eles que determinem o preço a pagar para diferentes medidas de massa de pão francês, em quilograma, e registrem os resultados em uma tabela.

Páginas 98 a 100

● Praticando: Enem e vestibulares

Essa seção possibilita a realização de uma avaliação somativa dos estudantes. Sugere-se localizar, na parte geral destas **Orientações para o professor**, o tópico que trata especificamente dessa seção, no qual são apresentadas mais informações sobre como conduzi-la.

Unidade 3 Função afim e função modular

Quadro-síntese da Unidade

BNCC	Competências gerais: 5 e 7 Competências específicas de Matemática e suas Tecnologias: 1, 3, 4 e 5 Competências específicas de Ciências da Natureza e suas Tecnologias: 1 e 2 Habilidades de Matemática e suas Tecnologias: EM13MAT101, EM13MAT302, EM13MAT303, EM13MAT401, EM13MAT404, EM13MAT501, EM13MAT506, EM13MAT507 e EM13MAT510
Temas Contemporâneos Transversais	Educação Ambiental; Educação Financeira; e Educação Fiscal
Conteúdos	Função afim, taxa de variação média de uma função, gráfico da função afim, equação da reta, estudo do sinal de uma função afim, função modular e representação gráfica da função modular.

Objetivos da Unidade

- Compreender que o gráfico de qualquer função afim com domínio real, representado em um plano cartesiano, corresponde a uma reta e identificar quando as grandezas relacionadas por meio dessa função são diretamente proporcionais entre si.
- Analisar e calcular a taxa de variação média de funções, em especial, da função afim.
- Compreender, analisar e determinar as coordenadas dos pontos em que o gráfico de uma função afim intersecta os eixos cartesianos.
- Compreender a translação de gráficos de função afim e de função modular.
- Compreender e determinar a equação de reta e representá-la em um plano cartesiano.
- Analisar e investigar aplicações de função afim, estabelecendo associações com o cálculo de perímetro de polígono regular, de juro simples e de progressão aritmética.
- Investigar o comportamento entre duas variáveis numéricas de um conjunto de dados e, com auxílio de um *software*, construir um modelo matemático correspondente a uma função afim para representar relações entre grandezas e resolver problemas.
- Resolver e elaborar problemas, individualmente ou em grupo, envolvendo conjuntos, produtos ou razões entre grandezas e funções, relacionadas ou não a situações do cotidiano.

Orientações didáticas

O trabalho com esta Unidade possibilita desenvolver nos estudantes o pensamento algébrico, bem como estabelecer relações entre esse pensamento e o pensamento geométrico, a fim de que eles obtenham uma representação algébrica a partir de um dado gráfico, e vice-versa. Além disso, na Unidade, são trabalhadas situações dos mais variados contextos que podem ser modeladas por uma função afim, o que propicia aos estudantes uma visão da Matemática integrada à sociedade e a outras áreas do conhecimento.

Abertura da Unidade

O trabalho com a abertura da Unidade propicia uma abordagem do Tema Contemporâneo Transversal Educação Ambiental, uma vez que trata dos impactos do deslocamento das pessoas ao optarem por transportes alternativos e menos poluentes. Nesse sentido, é possível explorar as informações dessa página em parceria com um professor da área de Ciências Humanas e Sociais Aplicadas, que pode auxiliar na discussão envolvendo conceitos como mobilidade urbana e poluição, buscando, sempre que possível, exemplificar com questões locais.

Propor aos estudantes que reflitam sobre as dificuldades de locomoção que podem existir nos municípios brasileiros (congestionamentos, meios de transporte e infraestrutura de baixa qualidade etc.) e as atitudes que podem colaborar para atenuar os problemas de mobilidade, como realizar atividades do dia a dia a pé ou de bicicleta. Ao explorar o sistema de locação por meio de bicicletas e patinetes elétricos, conversar sobre as medidas de segurança necessárias para evitar acidentes, como respeitar as leis de trânsito e o limite de velocidade para tráfego na calçada e nas ciclovias; usar capacete; e ligar os faróis ou usar lâmpada portátil à noite.

São apresentadas, a seguir, as respostas aos itens propostos nessa seção.

1. Algumas respostas possíveis: Bicicleta, automóvel, motocicleta, ônibus e metrô.
2. Resposta pessoal.
3. O tempo de uso do equipamento.

Páginas 102 a 110

Função afim: ideias iniciais e definição

O trabalho com esse tópico favorece, com maior ênfase, o desenvolvimento da competência geral 7, das competências específicas 3 e 5 e das habilidades EM13MAT302 e EM13MAT501 da área de Matemática e suas Tecnologias, pois trabalha a investigação da relação entre números expressos em um quadro e a construção de um modelo empregando função afim. Além disso, esse tópico favorece o desenvolvimento das competências específicas 1 e 2 da área de Ciências da Natureza e suas Tecnologias, pois propõe ações individuais e coletivas que visam minimizar impactos socioambientais, com base em decisões responsáveis.

Na página 103, ao estabelecer a relação entre a massa de lentilha e a massa de fibra alimentar, relembrar com os estudantes a propriedade fundamental das proporções, conteúdo tratado em anos anteriores. Explicar que o valor constante correspondente à razão entre as duas massas é chamado de **constante de proporcionalidade**. No caso da função definida por $h(x) = 0,08x$, a constante de proporcionalidade é 0,08.

Na definição de função linear, destacar que ela é um caso particular de função afim, ou seja, toda função linear é afim, mas nem toda função afim é linear. Enfatizar também que, nas funções lineares, ou seja, do tipo $y = ax$, as variáveis se relacionam de maneira que $\frac{y}{x} = \frac{ax}{x} = a$ (com $x \neq 0$). Nesse caso, tem-se que a é a constante de proporcionalidade da função linear.

Para determinar a lei de formação da função, no tópico **Determinação de uma função afim**, verificar os conhecimentos prévios dos estudantes em relação à resolução de sistemas de duas equações do 1º grau com duas incógnitas. Caso necessário, retomar com eles esse conteúdo. Ao explorar a resolução do sistema, explicar que foi utilizado o método da adição. Para complementar, pode-se apresentar aos estudantes a resolução do sistema utilizando o método da substituição, como indicado a seguir.

- Escolher uma das equações e, nela, isolar uma incógnita.

$$30\,000a + b = 3\,000 \Rightarrow b = 3\,000 - 30\,000a$$
- Na outra equação, substituir a expressão equivalente à incógnita isolada anteriormente.

$$40\,000a + (3\,000 - 30\,000a) = 3\,500 \Rightarrow 10\,000a = 500 \Rightarrow a = 0,05$$

- Substituir a incógnita calculada anteriormente em uma das equações do sistema.

$$30\,000 \cdot 0,05 + b = 3\,000 \Rightarrow b = 3\,000 - 1\,500 = 1\,500$$

A seção **Atividades** das páginas 107 a 110 tem como objetivo trabalhar a determinação dos coeficientes e do valor numérico de uma função afim, bem como explorar situações que envolvem variáveis que podem ser relacionadas por meio de uma função afim.

Atividade Extra

Após a realização da atividade 6, propor aos estudantes que realizem uma pesquisa sobre como é calculado o valor total de compra ou de venda de moeda estrangeira, que considera a taxa de câmbio, o Imposto sobre Operações Financeiras (IOF) e as eventuais tarifas cobradas. Em seguida, pedir que acessem o *site* do Banco Central do Brasil (disponível em: <https://www.bcb.gov.br/estabilidadefinanceira/rankingvet>; acesso em: 27 set. 2024) e explorem os custos de operações de câmbio praticados por uma das instituições apresentadas, analisando os tipos de operação, de moeda, de país etc. Ao final, eles devem elaborar um relatório com essas informações e escrever uma função afim que represente a quantia, em dólares, necessária para comprar ou vender x reais, por exemplo.

A atividade 12 trabalha a elaboração de um problema envolvendo função afim. Para essa elaboração, é importante que os estudantes analisem se as informações apresentadas são suficientes. Para isso, eles podem, inicialmente, listar possíveis perguntas para o problema, como: Qual será o valor de locação da sala para utilizá-la por 5 horas? E por 10 horas? (A lei de formação da função p que determina o preço da locação da sala, em reais, de acordo com o tempo de uso t , em hora, é: $p(t) = 8t + 10$).

Ao abordar o boxe **No mundo do trabalho**, propor aos estudantes que pesquisem mais informações relacionadas aos direitos dos trabalhadores autônomos e apresentem-nas para toda a turma. Sugere-se também convidar um profissional que se enquadre nessa modalidade para conversar com os estudantes a respeito das vantagens e desvantagens de ser autônomo. Uma vantagem, por exemplo, é conseguir adaptar o horário de serviço conforme a necessidade.

A atividade 13 trabalha informações relacionadas aos impactos ambientais causados pelo aumento do uso de transportes motorizados. Nesse sentido, propicia o desenvolvimento das competências específicas 1 e 2 da área de Ciências da Natureza e suas Tecnologias. Uma possibilidade é desenvolver o trabalho com essa atividade em parceria com um professor dessa área que pode auxiliar na discussão envolvendo conceitos próprios da Química, como a composição de gases de efeito estufa.

Essa atividade também pode ser utilizada como um momento de avaliação formativa a fim de verificar se os estudantes reconhecem uma situação que pode ser modelada por uma função afim e se determinam o valor numérico de funções afins a partir de sua lei de formação. O professor pode identificar se os estudantes conseguem obter a lei de formação, para cada categoria de veículo, apenas analisando as informações apresentadas ou se é preciso que construam um quadro atribuindo possíveis valores para a variável independente para observar a regularidade e obter, assim, a lei de formação.

Conexões

Sugerir aos estudantes que acessem o *site* indicado a seguir para obter informações sobre como reduzir os impactos ambientais causados pela mobilidade urbana.

- SÃO PAULO (Estado). Companhia Ambiental do Estado de São Paulo. **Emissão veicular**: transporte sustentável. São Paulo: Cetesb, [2024]. Disponível em: <https://cetesb.sp.gov.br/veicular/transporte-sustentavel/>. Acesso em: 27 set. 2024.

Páginas 111 a 113

Taxa de variação média de uma função

O trabalho com esse tópico favorece, com maior ênfase, o desenvolvimento da competência específica 1 e da habilidade

EM13MAT101 da área de Matemática e suas Tecnologias, pois aborda situações relativas às Ciências da Natureza que envolvem a variação de grandezas e taxas de variação.

Na página **112**, ao explorar as propriedades da função afim f , apresentar a demonstração de que, se o coeficiente $a > 0$, então f será crescente, conforme indicado a seguir.

Considerando dois números reais x_1 e x_2 tal que $x_2 > x_1$, tem-se que $f(x_2) - f(x_1) = ax_2 + b - (ax_1 + b) = a(x_2 - x_1)$. Como $a > 0$ e $x_2 > x_1$, o que significa que $x_2 - x_1 > 0$, temos que $f(x_2) - f(x_1) > 0$, ou seja, $f(x_2) > f(x_1)$. Logo, se $a > 0$ e $x_2 > x_1$, tem-se que $f(x_2) > f(x_1)$, o que garante que f é crescente.

De maneira análoga, pode-se demonstrar que a função afim f é decrescente quando $a < 0$.

As atividades da página **113** trabalham a taxa de variação média de funções, incluindo a de funções afins, bem como abordam a classificação de uma função afim em crescente ou decrescente.

Páginas 114 a 125

Gráfico da função afim

O trabalho com esse tópico favorece, com maior ênfase, o desenvolvimento das competências específicas 1, 3, 4 e 5 e das habilidades EM13MAT101, EM13MAT302, EM13MAT401, EM13MAT404, EM13MAT501 e EM13MAT510 da área de Matemática e suas Tecnologias, já que usa representações algébricas, bem como as representações geométricas de registros algébricos, para resolver problemas ou tomar decisões.

No início da página **115**, é importante que os estudantes percebam que a medida do segmento de reta \overline{QH} corresponde à diferença entre a ordenada do ponto Q e a ordenada do ponto H . De maneira análoga, fazer essa análise para o segmento de reta \overline{MN} e, considerando a diferença entre as abscissas, para os segmentos de reta \overline{HM} e \overline{NP} . Se necessário, apresentar exemplos numéricos para as coordenadas desses pontos.

Na relação entre as medidas dos catetos dos triângulos PMN e MQH , lembrar com os estudantes que dois triângulos são semelhantes quando têm os ângulos internos correspondentes congruentes e os lados correspondentes proporcionais entre si. Para garantir a semelhança de triângulos, há alguns casos particulares. No caso LAL (lado, ângulo, lado), apresentado na demonstração, tem-se que dois lados correspondentes são proporcionais entre si e os ângulos internos formados por eles são congruentes.

Ao explorar que os pontos P , Q e M são colineares, lembrar que, quando uma reta transversal cruza um par de retas paralelas, podem-se classificar alguns pares de ângulos formados de acordo com a posição que ocupam em relação às retas. Nesse caso, têm-se que \widehat{HMQ} e \widehat{NPM} são ângulos correspondentes entre si.

No tópico **Translação do gráfico de uma função afim**, conversar com os estudantes sobre o que eles compreendem do termo "translação". Espera-se que eles percebam que a translação representa uma transformação em relação a todos os pontos de um gráfico, que se deslocam em uma mesma direção, em um mesmo sentido e por uma mesma distância. A direção pode ser vertical, horizontal ou a combinação de ambas.

Ao formalizar a translação do gráfico de uma função afim, lembrar aos estudantes que, geometricamente, se pode interpretar o módulo de um número real b como a distância do ponto correspondente a b até a origem na reta real.

As atividades das páginas **122 a 125** têm como objetivo trabalhar a representação gráfica de uma função afim, sua classificação em crescente ou decrescente, bem como a determinação da taxa de variação e da lei de formação de uma função afim e as coordenadas dos pontos onde seu gráfico cruza os eixos cartesianos.

A atividade 23 trabalha, em uma situação contextualizada, a construção de um modelo empregando função afim, o que propicia o desenvolvimento da habilidade EM13MAT302. A atividade 27 trabalha, em uma situação contextualizada, a análise de função afim

definida por mais de uma sentença, o que contribui para o desenvolvimento da habilidade EM13MAT404.

A atividade 30 trabalha, em uma situação contextualizada, a investigação da relação entre números expressos em tabelas e a representação dessa relação no plano cartesiano, utilizando uma reta para descrevê-la. Além disso, propõe a construção de um modelo empregando função afim, o que propicia o desenvolvimento das habilidades EM13MAT302, EM13MAT501 e EM13MAT510.

A atividade 31 trabalha a investigação do comportamento entre duas variáveis de um conjunto de dados expressos em uma planilha eletrônica, o que contribui para o desenvolvimento da habilidade EM13MAT510. Explicar aos estudantes que a linha de tendência representa o comportamento dos dados. Nesse caso, para apresentar a relação de dependência entre as duas variáveis, o melhor modelo que explica essa relação é representado por uma reta. Esse tipo de representação é utilizado para projetar ou estimar uma das variáveis em função da outra. Por exemplo, em análises técnicas no mercado de ações, essas linhas auxiliam na identificação das tendências nesse mercado e na tomada de decisões.

Páginas 126 a 128

Equação da reta

Nesse tópico, explicar aos estudantes que o coeficiente angular representa a inclinação da reta em relação ao eixo x e que o coeficiente linear representa a ordenada do ponto dessa reta onde ela intersecta o eixo y .

As atividades da página **128** trabalham a determinação da equação da reta com base nas coordenadas de um de seus pontos e nas do seu coeficiente angular ou nas coordenadas de dois de seus pontos. A atividade 35 trabalha a análise do comportamento de duas variáveis numéricas de um conjunto de dados expressos em uma planilha eletrônica e a construção de um modelo empregando função afim, o que contribui para o desenvolvimento das habilidades EM13MAT302 e EM13MAT510.

Páginas 129 a 131

Integrando com Ciências da Natureza e suas Tecnologias

O trabalho com essa seção favorece, com maior ênfase, o desenvolvimento das competências específicas 1, 3, 4 e 5 e das habilidades EM13MAT101, EM13MAT302, EM13MAT401 e EM13MAT510 da área de Matemática e suas Tecnologias, uma vez que trata de aplicações de função afim para interpretar contextos das Ciências da Natureza, no caso, o movimento retilíneo uniforme (MRU). Assim, uma sugestão de condução para essa seção é trabalhar em parceria com um professor dessa área.

Explicar aos estudantes os conceitos relacionados à trajetória de um objeto sob a ação dos diversos tipos de movimento e de aceleração, além de apresentar os gráficos das funções que descrevem esses movimentos. Por exemplo, pode-se citar a trajetória de um trem cujo movimento é retilíneo uniforme ou uniformemente variado.

A questão 6 trabalha a realização de um experimento pelos estudantes sobre o MRU, além da análise dos resultados obtidos. Na 5ª etapa, os eventuais erros das medidas aferidas podem ocorrer durante a observação do movimento da bolha e na cronometragem. Assim, propor aos estudantes que repitam os procedimentos e comparem os resultados obtidos. Além disso, uma sugestão é gravar em vídeo o experimento com o objetivo de poder rever a movimentação da bolha e realizar anotações mais detalhadas.

Na elaboração do relatório, por exemplo, os estudantes podem apresentar os conceitos abordados e os respectivos objetivos; os materiais utilizados e a condução do experimento; a comparação dos resultados obtidos com os de outros colegas; e a descrição do que foi aprendido com o experimento. Ainda, é possível propor que pesquisem mais informações sobre o MRU em livros, artigos e sites confiáveis, com o objetivo de incentivar o interesse pelo estudo científico.

Conexões

Sugerir aos estudantes que assistam ao vídeo indicado a seguir, que pode auxiliá-los na realização do experimento.

- MOVIMENTO retilíneo uniforme. São Paulo: USP, 2019. 1 vídeo (1 min). Publicado por Plataforma Anísio Teixeira. Disponível em: <http://pat.educacao.ba.gov.br/recursos-educacionais/conteudo/exibir/10107>. Acesso em: 27 set. 2024.

Páginas 132 a 134

Estudo do sinal de uma função afim

O trabalho com esse tópico favorece, com maior ênfase, o desenvolvimento da competência específica 3 e da habilidade EM13MAT302 da área de Matemática e suas Tecnologias, uma vez que emprega modelos de funções afins para resolver problemas de variados contextos.

O estudo do sinal de uma função foi tratado na Unidade 2 deste Volume. Por isso, verificar os conhecimentos prévios dos estudantes referentes ao conteúdo e, se necessário, retomá-lo.

Explicar aos estudantes que o estudo do sinal da função afim, de maneira prática, pode ser feito por meio da representação de uma figura contendo inicialmente apenas o eixo x e, nele, indicar um ponto correspondente ao zero da função $\left(-\frac{b}{a}\right)$. Em seguida, de acordo com a taxa de variação da função, deve-se traçar uma reta não horizontal que cruza o eixo x no ponto indicado.

As atividades da página 134 têm como objetivo trabalhar o estudo do sinal de funções afins. A atividade 43 trabalha, em uma situação contextualizada, a construção de um modelo empregando função afim e o estudo do sinal dessa função, o que propicia o desenvolvimento da habilidade EM13MAT302.

A atividade 44 trabalha a demonstração do estudo do sinal de uma função afim decrescente a partir do zero dessa função. Nesse sentido, contribui para o desenvolvimento da competência específica 5 da área de Matemática e suas Tecnologias. Na resolução, verificar se os estudantes compreenderam que, como f é decrescente, $a < 0$. Como complemento, propor a eles que mostrem que, em uma função crescente $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, definida por $g(x) = ax + b$, tem-se $g(x) > 0$ para $x > -\frac{b}{a}$. Nesse caso, para $g(x) > 0$, tem-se $ax + b > 0 \Rightarrow ax > -b$. Como g é crescente, tem-se $a > 0$. Assim, divide-se a desigualdade $ax > -b$ por a , obtendo $x > -\frac{b}{a}$.

A atividade 45 trabalha, em uma situação contextualizada, o estudo do sinal de uma função afim. Além disso, propõe a interpretação da situação de maneira crítica, o que propicia o desenvolvimento da habilidade EM13MAT101.

Páginas 135 a 140

Algumas aplicações

O trabalho com esse tópico favorece, com maior ênfase, o desenvolvimento das competências específicas 3, 4 e 5 e das habilidades EM13MAT303, EM13MAT401, EM13MAT506 e EM13MAT507 da área de Matemática e suas Tecnologias, uma vez que estabelece associações entre juro simples, progressão aritmética e cálculo do perímetro de polígonos regulares e função afim.

Antes de apresentar os conteúdos dessas páginas, propor aos estudantes que citem situações que podem envolver o conceito e as características de uma função afim, por exemplo, o número do sapato em função do tamanho do pé. Esse pode constituir um momento de avaliação, de modo que o professor identifique se os estudantes são capazes de reconhecer situações de seu cotidiano que podem ser expressas por meio de uma função afim.

No tópico **Função afim e perímetro de polígonos regulares**, é importante que os estudantes compreendam que, quando as grandezas envolvidas em determinado problema estão relacionadas de maneira diretamente proporcional, pode-se representar tal relação

por meio de uma função linear. Assim, a relação entre o perímetro de um polígono regular e a medida de um dos seus lados pode ser representada por meio de uma função linear.

O estudo do tópico **Função afim e juro simples** contribui para o desenvolvimento da habilidade EM13MAT303, propiciando, além disso, uma abordagem dos Temas Contemporâneos Transversais Educação Financeira e Educação Fiscal.

Ao explorar a definição de PA, no tópico **Função afim e progressão aritmética**, explicar aos estudantes que uma PA pode ser classificada, de acordo com sua razão decrescente, quando $r < 0$; constante, quando $r = 0$; ou crescente, quando $r > 0$. Comentar que o estudo de PA e de outros tipos de sequência será retomado e ampliado no Volume 2 desta coleção.

A seção **Atividades** das páginas 138 a 140 tem como objetivo trabalhar aplicações de funções afins relacionadas à variação do perímetro de um polígono regular, de acordo com a medida de seu lado; ao juro simples; e à progressão aritmética.

Para o trabalho com a atividade 50, sugere-se organizar os estudantes em duplas e propor o uso de um *software* de geometria dinâmica, como o GeoGebra, para realizar uma atividade utilizando ideias da investigação matemática, uma das tendências metodológicas abordadas na parte geral destas **Orientações para o professor**. Para isso, pedir aos estudantes que representem quadrados de diferentes medidas de lados e que determinem o perímetro e a área correspondentes. Por fim, questioná-los sobre o que ocorre com o perímetro e a área dos quadrados ao se dobrar, triplicar ou reduzir pela metade a medida de seus lados. Nesse momento, é importante que eles levantem hipóteses com os colegas e registrem suas conclusões.

Na atividade 59, destacar aos estudantes que eles podem propor algum problema que, por falta de dados no enunciado, não possa ser resolvido. Por exemplo:

- Em uma PA infinita, temos que o 1º termo é -4 e que o número 31 também é um de seus termos. Defina uma função afim f tal que $(f(0), f(1), f(2), \dots, f(n), \dots)$ corresponda a essa PA.

É importante, nesse caso, que o estudante, ao receber a questão, identifique a falta de dados do enunciado e que faça sugestões de ajustes, de maneira a tornar possível sua resolução. Em relação a esse exemplo, pode-se propor a inclusão do valor da razão ou a posição do número 31 na PA, que podem ser, respectivamente, 7º e 6º termo. Com algum desses ajustes no enunciado, obtém-se $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$, definida por $f(n) = 7n - 4$.

Páginas 141 a 144

Função modular

O trabalho com esse tópico favorece, com maior ênfase, o desenvolvimento da competência específica 4 e da habilidade EM13MAT404 da área de Matemática e suas Tecnologias, pois aborda a análise de funções definidas por uma ou mais sentenças, em suas representações algébrica e geométrica.

Discutir com os estudantes o conjunto imagem de uma função modular. Para isso, relembrar como é possível fazer uma análise do conjunto imagem de uma função por meio de seu gráfico, conforme apresentado na Unidade 2 deste Volume. Assim, o conjunto imagem da função $f(x) = |x|$ corresponde ao conjunto dos números reais não negativos, ou seja, $\text{Im}(f) = [0, +\infty[$.

Ao explorar os gráficos e o primeiro boxe **Para pensar** da página 142, é possível estabelecer relação com o estudo da simetria de reflexão: quando uma reta divide uma figura de maneira que, ao ser dobrada sobre essa reta, as partes obtidas são idênticas por sobreposição, essa figura apresenta simetria de reflexão em relação à reta. Essa reta corresponde ao eixo de simetria. Assim, os pontos correspondentes em cada uma das partes da figura são equidistantes ao eixo de simetria.

No tópico **Translação do gráfico de uma função modular**, explicar aos estudantes que também é possível escrever o módulo de um número real x no campo **Entrada** do GeoGebra utilizando o comando "abs(x)".

Reforçar que a translação do gráfico para a esquerda corresponde ao sentido negativo do eixo das abscissas e que a translação para a direita, ao sentido positivo. De maneira análoga, a translação do gráfico para baixo corresponde ao sentido negativo do eixo das ordenadas, e a translação para cima, ao sentido positivo.

As atividades das páginas **143 e 144** têm como objetivo trabalhar o valor numérico de uma função modular, a representação gráfica de funções modulares, bem como a determinação da lei de formação de uma função modular a partir de sua representação gráfica. Além disso, na atividade 66, é trabalhado o pensamento computacional, ao ser explorado um algoritmo representado por um fluxograma.

Páginas 145 a 148

● Você conectado

O trabalho com essa seção favorece, com maior ênfase, o desenvolvimento da competência geral 5, das competências específicas 3, 4 e 5 e das habilidades EM13MAT302, EM13MAT401, EM13MAT501 e EM13MAT510 da área de Matemática e suas Tecnologias.

Na proposta **Construindo e analisando o gráfico da função afim**, na etapa **B**, orientar os estudantes na movimentação dos controles deslizantes: basta clicar sobre o controle desejado e, com o botão do *mouse* pressionado, arrastá-lo até a posição almejada.

Mãos à obra - página 146

1. No item **b**, orientar os estudantes a clicar sobre o gráfico de f sobre o eixo x para obter o ponto em que o gráfico cruza o eixo das abscissas. Eles devem proceder de maneira análoga para obter o ponto de interseção do gráfico com o eixo y .
2. Orientar os estudantes na indicação das leis de formação das funções no campo **Entrada**.
3. Explicar aos estudantes que eles podem, inicialmente, indicar os pontos. Para isso, é possível clicar no ponto de acordo com suas coordenadas ou utilizar o campo **Entrada**. Por exemplo, para $A(-2, 3)$, digita-se: " $A=(-2, 3)$ ".

Na proposta **Construindo um modelo para representar relações entre grandezas**, explicar aos estudantes que há outros tipos de gráfico que podem representar os dados apresentados, como funções polinomiais de maior grau. Porém a função afim é a que melhor representa a relação entre esses dados específicos.

Mãos à obra - página 148

2. Orientar os estudantes na representação dos dados na planilha eletrônica.

Páginas 149 e 150

● O que estudei

A seção tem como objetivo possibilitar um momento de reflexão e de autoavaliação para o professor e os estudantes. Para o trabalho com as questões 1, 2 e 3, sugere-se localizar, na parte geral destas **Orientações para o professor**, o tópico que trata especificamente dessa seção, em que são apresentadas mais informações sobre como conduzi-la.

A questão 4 trabalha uma situação que envolve variáveis que podem ser relacionadas por meio de função afim. Além disso, propõe a discussão sobre a mobilidade urbana na região onde os estudantes vivem, retomando o tema da abertura da Unidade. No item **f**, o gráfico pode ser construído em uma planilha eletrônica ou em um *software* de geometria dinâmica, como o GeoGebra. No item **i**, sugerir aos estudantes que compartilhem as informações pesquisadas e o texto que produzirem com a comunidade local por meio de uma publicação em um blogue ou em uma rede social ou por meio de um vídeo informativo.

Páginas 151 e 152

● Praticando: Enem e vestibulares

Essa seção possibilita a realização de uma avaliação somativa dos estudantes. Sugere-se localizar, na parte geral destas **Orientações para o professor**, o tópico que trata especificamente dessa seção, no qual são apresentadas mais informações sobre como conduzi-la.

Unidade 4 Função quadrática

Quadro-síntese da Unidade

BNCC	Competências gerais: 2 e 5 Competências específicas de Matemática e suas Tecnologias: 1, 3, 4 e 5 Competência específica de Ciências da Natureza e suas Tecnologias: 3 Habilidades de Matemática e suas Tecnologias: EM13MAT101, EM13MAT302, EM13MAT402, EM13MAT404, EM13MAT502, EM13MAT503 e EM13MAT506
Temas Contemporâneos Transversais	Educação em Direitos Humanos; Educação para o Trânsito; Saúde; Ciência e Tecnologia; e Educação para valorização do multiculturalismo nas matrizes históricas e culturais Brasileiras
Conteúdos	Parábola, características e definição da função quadrática, zeros de uma função quadrática, gráfico de uma função quadrática, valor máximo ou valor mínimo da função quadrática, estudo do sinal de uma função quadrática e equação da parábola.

Objetivos da Unidade

- Compreender a parábola como lugar geométrico e, a partir de sua representação no plano cartesiano, identificar alguns elementos que a compõem.
- Reconhecer que toda parábola tem um eixo de simetria, o qual a intersecta em seu vértice.
- Compreender o conceito de função quadrática e utilizá-la para construir modelos matemáticos em diferentes contextos.
- Identificar os coeficientes e calcular o valor numérico de uma função quadrática.
- Determinar e interpretar, quando existirem, os zeros reais de uma função quadrática.
- Determinar a quantidade de zeros reais de uma função quadrática.
- Reconhecer que o gráfico de uma função quadrática é uma parábola.
- Esboçar e analisar o gráfico de uma função quadrática, identificando suas características e realizando o estudo de seu sinal.
- Associar a abscissa do vértice de uma parábola à média aritmética das abscissas de dois pontos simétricos pertencentes a ela.
- Determinar as coordenadas dos pontos de interseção do gráfico de uma função quadrática com os eixos cartesianos.
- Estabelecer relações entre os coeficientes de uma função quadrática e sua representação gráfica.
- Determinar as coordenadas do vértice de uma parábola a partir dos coeficientes da função quadrática representada por ela.
- Determinar o valor máximo ou mínimo e o conjunto imagem de uma função quadrática.
- Compreender e determinar a equação de uma parábola.

Orientações didáticas

O trabalho com a função quadrática, a partir de diferentes situações, possibilita aos estudantes interpretar e analisar criticamente a realidade, além de desenvolver conhecimentos e habilidades relacionados a outras áreas do conhecimento. Esse trabalho pode ser feito com o emprego de tecnologias digitais para construir modelos matemáticos que os auxiliem a refletir sobre problemas e a estabelecer soluções para eles.

Página 153

Abertura da Unidade

Ao abordar a abertura da Unidade, verificar a possibilidade de realizar um trabalho em parceria com um professor da área de Ciências da Natureza e suas Tecnologias, com o objetivo de discutir e analisar com os estudantes aspectos conceituais do lançamento oblíquo ou de um projétil (força, inclinação, deslocamento etc.). Nesse trabalho, pode-se, por exemplo, considerar a abordagem do alcance vertical de um projétil, que pode ser expresso por $R = \frac{2v_0^2}{g} \sin 2\theta$, em que R é o alcance vertical, v_0 é a velocidade inicial, g é a aceleração da gravidade e θ , o ângulo de lançamento desse projétil. Propor aos estudantes que, de acordo com essa expressão e fixando v_0 e g , determinem para qual valor do $\sin 2\theta$ o projétil teria alcance máximo e, de acordo com esse valor, qual seria a medida de θ . Espera-se que eles percebam que, como $-1 \leq \sin 2\theta \leq 1$, R terá valor máximo quando $\sin 2\theta = 1$ e, ainda, que, para $0^\circ \leq \theta \leq 90^\circ$, temos $\sin 2\theta = 1 \Rightarrow \sin 90^\circ \Rightarrow 2\theta = 90^\circ \Rightarrow \theta = 45^\circ$. Assim, o alcance máximo em um lançamento é obtido quando o ângulo deste for de 45° .

São apresentadas, a seguir, as respostas aos itens propostos nessa seção.

1. Trajetória parabólica. Resposta pessoal.
2. Resposta esperada: Porque a aplicação desses conceitos da Física contribui para a análise e a melhoria do desempenho dos atletas, pois permite conhecer diversos parâmetros, como distância percorrida e velocidade.
3. Construção do estudante.

Páginas 154 a 159

A parábola

Durante o trabalho com esse tópico, explorar os conhecimentos prévios dos estudantes em relação aos conceitos de simetria, tratados em anos anteriores. Perguntar-lhes qual é o tipo de simetria que pode ser observado em uma parábola e, considerando essa simetria, qual é a relação entre os pontos da parábola e o eixo de simetria. Espera-se que eles observem a simetria de reflexão em relação a um eixo e indiquem os pontos simétricos da parábola que são equidistantes a esse eixo.

Função quadrática: características e definição

O trabalho com esse tópico favorece, com maior ênfase, o desenvolvimento da competência específica 3 e da habilidade EM13MAT302 da área de Matemática e suas Tecnologias, uma vez que trata da construção de modelos utilizando função quadrática para resolver problemas.

Nesse trabalho, espera-se que os estudantes compreendam a definição de função quadrática e algumas de suas características. Para isso, apresenta-se inicialmente uma situação que envolve o cálculo da área de um campo de futebol, com o objetivo de modelar tal situação por meio de uma função quadrática.

Dizer aos estudantes que, de acordo com a Federação Internacional de Futebol (Fifa), entidade que regulamenta as regras do

futebol, os campos oficiais devem ser retangulares, com comprimento variando de 90 m até 120 m e largura variando de 45 m até 90 m.

Fonte dos dados: THE INTERNATIONAL FOOTBALL ASSOCIATION BOARD. **Laws of the game:** 2018/19. Zurich: Ifab, 2018. p. 34. Disponível em: <https://img.fifa.com/image/upload/khhloe2xoigyna8juxw3.pdf>. Acesso em: 27 set. 2024.

Ao trabalhar os exemplos de função quadrática da página 156, pode-se propor aos estudantes que as classifiquem em funções quadráticas completas ou incompletas. Explicar a eles que as funções quadráticas em que $b = 0$ e $c = 0$, $b = 0$ e $c \neq 0$ ou $b \neq 0$ e $c = 0$ são denominadas **incompletas**. E as funções quadráticas **completas** são aquelas em que $b \neq 0$ e $c \neq 0$.

As atividades das páginas 157 a 159 têm como objetivo trabalhar a definição de funções quadráticas, a indicação de seus coeficientes e o cálculo de valores numéricos para algumas funções. Além disso, é abordada a construção de modelos empregando uma função quadrática para descrever diferentes situações, o que possibilita desenvolver a habilidade EM13MAT302 da área de Matemática e suas Tecnologias.

A atividade 10 pode ser proposta e discutida com apoio de um professor da área de Ciências da Natureza e suas Tecnologias, em particular, para explorar conceitos relacionados à Física. Assim, sugerir aos estudantes uma investigação sobre o estudo que Galileu Galilei (1564-1642) realizou e que fundamentou a lei dos corpos em queda.

O contexto da atividade 11 propicia uma abordagem do Tema Contemporâneo Transversal Educação em Direitos Humanos, pois apresenta informações sobre a acessibilidade. Caso seja possível, planejar o trabalho com essa atividade em conjunto com um professor da área de Ciências Humanas e Sociais Aplicadas, com o objetivo de discutir com os estudantes temáticas relacionadas à acessibilidade, em especial, na própria escola e no município em que moram.

Conexões

Sugerir aos estudantes que acessem o *site* indicado a seguir para obter mais informações sobre a norma brasileira de acessibilidade a edificações, mobiliário, espaços e equipamentos urbanos.

- ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. **ABNT NBR 9050:** acessibilidade a edificações, mobiliário, espaços e equipamentos urbanos. 4. ed. Rio de Janeiro: ABNT, 2020. Disponível em: https://www.causc.gov.br/wp-content/uploads/2020/09/ABNT-NBR-9050-15-Acessibilidade-emenda-1_-03-08-2020.pdf. Acesso em: 27 set. 2024.

No boxe **Matemática na história** da atividade 12, comentar com os estudantes que o desenvolvimento dos conceitos matemáticos ao longo da história não ocorreu de forma linear, uma vez que situações inesperadas foram pontos de partida para estudos que originaram grandes descobertas matemáticas.

Páginas 160 a 165

Zeros de uma função quadrática

O trabalho com esse tópico favorece, com maior ênfase, o desenvolvimento da competência específica 3 e da habilidade EM13MAT302 da área de Matemática e suas Tecnologias, pois trata da representação algébrica de uma função quadrática.

Em relação à conceituação de zero de uma função quadrática, comentar com os estudantes que $ax^2 + bx + c = 0$ representa uma equação do 2º grau, conteúdo estudado em anos anteriores. Sugere-se fazer, nesse momento, uma avaliação diagnóstica a fim de identificar se os estudantes determinam a solução de uma equação do 2º grau. Para isso, podem ser propostas algumas equações desse tipo para que eles resolvam em uma folha avulsa. Depois da avaliação diagnóstica, se necessário, retomar esse conteúdo com a turma.

É importante que os estudantes saibam interpretar algebricamente o significado dos zeros de uma função quadrática: eles correspondem aos números reais x tais que $f(x) = 0$. Um pouco mais adiante, nessa Unidade, será estudada a interpretação geométrica dos zeros de uma função quadrática.

Ao abordar o boxe **No mundo do trabalho** da página 160, comentar com os estudantes que o setor veterinário tem crescido nos últimos anos, o que pode constituir uma oportunidade para futuros profissionais. Comentar que a atuação do médico-veterinário não se restringe aos cuidados com animais de estimação, como cães e gatos; esse profissional também é habilitado para lidar com animais de grande porte, silvestres ou exóticos, por exemplo.

As atividades da página 165 têm como objetivo trabalhar a determinação dos zeros de uma função afim, bem como abordar a análise de funções quadráticas que descrevem diferentes situações. Na atividade 18, é apresentado um fluxograma que envolve o pensamento algorítmico, uma vez que mostra uma sequência de passos para determinar a quantidade de raízes reais de uma função quadrática. O pensamento algorítmico é associado ao pensamento computacional, tema abordado na parte geral destas **Orientações para o professor**.

A atividade 19 trabalha a demonstração de uma propriedade relacionada ao estudo dos zeros de uma função quadrática. Tal atividade pode não ser rotineira para os estudantes, de modo que poderão ser necessárias a intervenção e a condução do professor para que eles possam realizá-la. Ao final, propor que ao menos um dos estudantes apresente na lousa a demonstração para que os colegas possam avaliar se a estratégia utilizada está correta.

Página 166 a 177

Gráfico de uma função quadrática

O trabalho com esse tópico favorece, com maior ênfase, o desenvolvimento das competências específicas 1, 3, 4 e 5 e das habilidades EM13MAT101, EM13MAT302, EM13MAT402 e EM13MAT502 da área de Matemática e suas Tecnologias, pois trata da relação entre as representações algébricas e geométricas de uma função quadrática e suas diversas aplicações.

Inicialmente, destacar aos estudantes que o gráfico de uma função quadrática é uma parábola, assunto tratado anteriormente nesta Unidade e que será retomado. Em relação aos exemplos apresentados na página 166, sugerir aos estudantes que construam os gráficos das funções quadráticas utilizando um *software* de geometria dinâmica. No GeoGebra, por exemplo, basta os estudantes digitarem a lei de formação da função no campo **Entrada**. Para obter o gráfico da função f , digita-se " $f(x)=x^2$ " e, para obter o gráfico da função g , digita-se " $g(x)=x^2-4x+3$ ". Nesse momento, explicar a eles que o símbolo " $^$ " representa potência.

Ainda na página 166, explicar aos estudantes que dois pontos de uma parábola são simétricos por reflexão em relação a um eixo quando a distância desses pontos ao eixo é igual e a reta que passa por esses pontos é perpendicular ao eixo.

No tópico **Interseção do gráfico de uma função quadrática com os eixos cartesianos**, é importante que os estudantes compreendam que a identificação dos pontos em que o gráfico de uma função quadrática intersecta os eixos cartesianos contribui para o esboço desse gráfico. Verificar se eles perceberam que o gráfico de qualquer função quadrática necessariamente intersecta o eixo das ordenadas, porém os gráficos das funções quadráticas que não têm zero real não intersectam o eixo das abscissas.

Antes de apresentar as relações entre os coeficientes de uma função quadrática e as características da parábola correspondente ao seu gráfico, na página 169, uma sugestão é propor inicialmente a realização de um trabalho em grupo a fim de que os estudantes investiguem essas relações, o que pode ser feito utilizando um *software* de geometria dinâmica, como o GeoGebra. Para isso, pode-se propor um trabalho utilizando ideias da investigação matemática, uma das tendências metodológicas abordadas na parte geral destas **Orientações para o professor**.

As atividades das páginas 170 a 173 têm como objetivo trabalhar a determinação de pontos do gráfico de uma função quadrática que intersectam os eixos cartesianos, bem como abordar a análise dos coeficientes de funções quadráticas a partir de características do gráfico dessas funções. Também têm como objetivo trabalhar a determinação da lei de formação de uma função quadrática e da taxa de variação de funções desse tipo.

A atividade 25 trabalha a representação gráfica de modelos, dados por uma função afim e uma função quadrática, para expressar, respectivamente, o perímetro e a área de um hexágono regular, de acordo com a medida de seu lado, o que contribui para o desenvolvimento da habilidade EM13MAT506.

Nas atividades 26 e 31, os estudantes devem determinar a lei de formação de funções quadráticas do tipo $y = ax^2$ a partir de alguns pontos de seus gráficos cujas coordenadas estão indicadas em quadros, o que contribui para o desenvolvimento da habilidade EM13MAT502. Além disso, a atividade 31 pode ser utilizada para avaliação a fim de identificar se os estudantes esboçam o gráfico de uma função quadrática a partir da apresentação de um conjunto de dados, se eles determinam a lei de formação da função quadrática que descreve a situação e, por fim, se determinam o valor numérico de alguns dados a partir da função quadrática obtida. Os estudantes podem entregar a atividade resolvida em uma folha avulsa, e alguns deles podem ser selecionados para ir à lousa explicar o modo como pensaram para resolver cada um dos itens.

A atividade 30 trabalha a análise e a determinação de um modelo, dado por uma função quadrática, que descreve a distância de frenagem de um automóvel. Aproveitar o contexto dessa atividade, que propicia uma abordagem do Tema Contemporâneo Transversal Educação para o Trânsito, para promover uma roda de conversa com os estudantes sobre os riscos de utilizar o celular ao dirigir. Destacar que, além dos riscos de acidentes, há multas de trânsito que podem ser aplicadas nesses casos. Comentar que os pedestres também devem estar atentos ao trânsito e evitar a distração do uso desses aparelhos enquanto caminham pela cidade.

No tópico **Vértice da parábola**, explicar aos estudantes que, nas parábolas com eixo de simetria paralelo ao eixo das ordenadas, os pontos da parábola que têm a mesma ordenada são simétricos, pois o eixo de simetria corresponde à mediatriz do segmento com extremidades nesses pontos e, portanto, a distância deles ao eixo de simetria é a mesma. Explicar que, em razão disso, a abscissa dos pontos pertencentes ao eixo de simetria é dada pela média aritmética das abscissas dos pontos simétricos e, portanto, a abscissa do vértice dessa parábola também é dada por essa média.

No boxe **Para pensar** da página 175, caso os estudantes apresentem dificuldade, orientá-los a escrever, utilizando as expressões para o cálculo das coordenadas do vértice de uma parábola e as coordenadas do vértice dadas, um sistema linear de duas equações e três incógnitas. Explicar a eles que se trata de um sistema possível e indeterminado e, para obter uma solução, podem-se atribuir valores para a , por exemplo, e determinar os valores de b e c pelo sistema.

No trabalho com o conjunto imagem de uma função quadrática, propor aos estudantes que, em duplas, realizem a atividade a seguir.

Atividade Extra

Propor aos estudantes que mostrem a validade das afirmações a seguir.

- I) Dada uma função quadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$, com $a > 0$ e gráfico de vértice $V(x_v, y_v)$, então f é decrescente para $x < x_v$ e crescente para $x > x_v$.
- II) Dada uma função quadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$, com $a < 0$ e gráfico de vértice $V(x_v, y_v)$, então f é crescente para $x < x_v$ e decrescente para $x > x_v$.

Resposta: Em relação à afirmação I, tem-se que, como $a > 0$, então o gráfico de f tem concavidade voltada para cima e, consequentemente, $f(x_1) > f(x_v)$ para $x_1 < x_v$. Assim, tomando-se $x_1 < x_2 < x_v$, segue-se que $f(x_1) > f(x_2)$. Logo, f é decrescente para $x < x_v$. De maneira análoga, tem-se que $f(x_1) > f(x_v)$ para $x_1 > x_v$. Assim, tomando-se $x_1 > x_2 > x_v$, segue-se que $f(x_1) > f(x_2)$. Logo, f é crescente para $x > x_v$. A afirmação II pode ser verificada de maneira análoga.

As atividades da página 177 abordam a determinação dos intervalos de crescimento e decrescimento, do conjunto imagem e das coordenadas do vértice de gráficos de funções quadráticas, além

do estabelecimento da lei de formação de uma função quadrática a partir do seu gráfico.

Páginas 178 a 183

Valor máximo ou valor mínimo da função quadrática

O trabalho com esse tópico favorece, com maior ênfase, o desenvolvimento da competência específica 5 e das habilidades EM13MAT404 e EM13MAT503 da área de Matemática e suas Tecnologias, ao abordar funções definidas por mais de uma sentença e os valores de máximo ou de mínimo de funções quadráticas.

As situações apresentadas na página 178 remetem à ideia de otimização, que, de modo geral, consiste em realizar procedimentos que buscam obter a solução mais adequada para um problema. Em Matemática, há áreas de estudo dedicadas ao trabalho com otimização, como é o caso da Programação Matemática.

Ao abordar o boxe **No mundo do trabalho** da página 179, promover uma roda de conversa com os estudantes, questionando que outras características eles julgam importantes para a resolução de problemas e, consequentemente, para o mercado de trabalho. Sobre a sugestão de vídeo apresentada no boxe, questionar também se eles conheciam a expressão e o conceito de *design thinking* e quais foram as informações do vídeo que chamaram a atenção deles.

Na atividade R15, são utilizadas etapas para se chegar ao resultado. Sugere-se estruturar e executar essas etapas, como foi apresentado, sempre que perceber que os estudantes estão com dificuldades em determinado problema matemático. Essa estratégia também pode ser utilizada pelos próprios estudantes quando estiverem diante de um problema matemático a ser resolvido.

A seção **Atividades** das páginas 181 a 183 tem como objetivo trabalhar a determinação do valor máximo ou do valor mínimo de funções quadráticas. A atividade 42 trabalha a análise do valor máximo de uma função quadrática que descreve o número de batimentos cardíacos de uma pessoa de acordo com o tempo de treino realizado. Além disso, o contexto propicia uma abordagem do Tema Contemporâneo Transversal Saúde. Para complementar o trabalho com o item c, propor aos estudantes que, em grupos de três ou quatro integrantes, pesquisem os perigos de se ultrapassar, constantemente, a frequência cardíaca máxima recomendada. Essa proposta pode ser realizada em conjunto com um professor da área de Ciências da Natureza e suas Tecnologias e um professor de Educação Física (área de Linguagens e suas Tecnologias).

Na atividade 43, se for possível e houver a disponibilidade de um laboratório de Ciências na escola, realizar um trabalho em conjunto com um professor da área de Ciências da Natureza e suas Tecnologias para investigar, na prática, o comportamento de uma cultura de bactérias ao se variar a temperatura à qual ela está submetida. As observações realizadas pelos estudantes podem ser organizadas em um relatório.

A atividade 47 aborda a habilidade EM13MAT404, uma vez que é proposto aos estudantes analisar uma função definida por mais de uma sentença.

Páginas 184 a 187

Você conectado

O trabalho com essa seção favorece, com maior ênfase, o desenvolvimento da competência geral 5, das competências específicas 3, 4 e 5 e das habilidades EM13MAT302, EM13MAT402 e EM13MAT503 da área de Matemática e suas Tecnologias, pois propõe o uso de ferramentas digitais para trabalhar as relações entre as representações algébricas e geométricas das funções.

Seguem os comentários sobre as questões referentes à proposta **Determinando as coordenadas do vértice de uma função quadrática**.

Mãos à obra - página 185

3. Verificar se os estudantes perceberam que os pontos P_1 e P_2 correspondem aos zeros das funções f e g ; que, como as duas

funções têm os mesmos zeros, a reta de simetria é a mesma para ambas; e que, consequentemente, a abscissa do vértice também é a mesma para ambas as funções. Conversar com os estudantes sobre o fato de terem de representar os gráficos das duas funções no mesmo plano cartesiano para resolver a questão. Após obter as coordenadas do vértice de cada parábola, eles podem utilizar a opção Distância, comprimento ou perímetro para obter a distância entre os vértices dessas parábolas ou, ainda, calcular a diferença entre as ordenadas desses vértices.

Seguem os comentários sobre as questões referentes à proposta **Estudando relações entre grandezas por meio de modelos correspondentes a funções quadráticas**.

Mãos à obra - página 187

1. Dizer aos estudantes que o artifício de determinar uma função para representar certo conjunto de dados é denominado **regressão**. No exemplo apresentado, foi realizada uma regressão polinomial de grau 2. Se julgar conveniente, propor aos estudantes que pesquisem e apresentem exemplos de diferentes tipos de regressão.
2. Em relação à elaboração de um problema envolvendo função quadrática, é importante que os estudantes reflitam se os dados apresentados são suficientes para que o colega possa resolvê-lo. Para isso, eles podem inicialmente listar algumas perguntas para o problema, por exemplo: Qual é a lei de formação da função obtida na planilha eletrônica? Compare os valores obtidos pela função com os apresentados no quadro. Em seu entendimento, a função descreve de maneira satisfatória esses dados? Qual é, aproximadamente, a altura máxima atingida pelo disco? Quanto tempo após o lançamento o disco toca o solo?

Páginas 188 a 191

Estudo do sinal de uma função quadrática

O trabalho com esse tópico aborda diversos conceitos até então estudados na Unidade. Por isso, sugere-se propor uma avaliação formativa para que, caso necessário, seja realizada uma retomada de conteúdo. Para a avaliação, pode-se propor aos estudantes que façam um resumo de todo o conteúdo que estudaram até o momento nesta Unidade. Poderão ser direcionados alguns tópicos que deverão ser abordados no resumo, por exemplo, a posição da concavidade da parábola de acordo com o coeficiente a , a determinação dos zeros reais de uma função quadrática, quando existirem, e a interpretação gráfica desses zeros da função. Os estudantes podem elaborar o resumo no próprio caderno, porém sem consulta a material didático. Ao final, o professor poderá selecionar alguns estudantes para apresentar seus resumos.

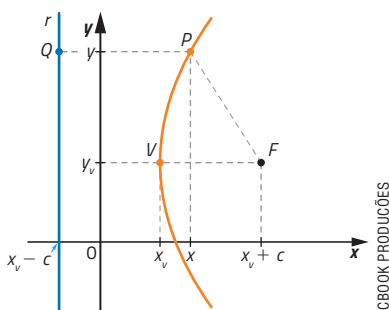
A seção **Atividades** das páginas 190 e 191 tem como objetivo trabalhar o estudo do sinal de funções quadráticas. A atividade 55 trabalha o estudo do sinal de uma função quadrática que modela uma situação relacionada à análise do comportamento de bactérias de acordo com a variação da temperatura. Pode-se sugerir a parceria com um professor da área de Ciências da Natureza e suas Tecnologias para discutir como são realizadas essas análises nos laboratórios.

Páginas 192 a 196

Equação da parábola

Nesse tópico, destacar aos estudantes que a abscissa c do foco F não corresponde ao coeficiente c da lei de formação da função quadrática, ou seja, são elementos distintos.

Após trabalhar com os estudantes a dedução da equação da parábola cuja diretriz é paralela ao eixo das ordenadas e cujo vértice corresponde à origem do sistema de eixos cartesianos e está localizado à direita da diretriz, propor a eles que deduzam a equação de cada um dos demais casos apresentados. Por exemplo, acompanhe, a seguir, essa dedução para o caso da diretriz paralela ao eixo das ordenadas e vértice $V(x_v, y_v)$ qualquer à direita da diretriz.



Como a distância de Pa F é igual à distância de Pa r , segue-se que:

$$\begin{aligned} PF = PQ &\Rightarrow \sqrt{(x - (x_v + c))^2 + (y - y_v)^2} = \sqrt{(x - (x_v - c))^2 + (y - y_v)^2} \Rightarrow \\ &\Rightarrow (x - (x_v + c))^2 + (y - y_v)^2 = (x - (x_v - c))^2 + (y - y_v)^2 \Rightarrow \\ &\Rightarrow x^2 - 2xx_v - 2cx + 2cx_v + y_v^2 + y^2 - 2yy_v + y_v^2 = \\ &= x^2 - 2xx_v + 2cx - 2cx_v + y_v^2 + y^2 \Rightarrow \\ &\Rightarrow y^2 - 2yy_v + y_v^2 = 4cx - 4cx_v \Rightarrow (y - y_v)^2 = 4c(x - x_v) \end{aligned}$$

A seção **Atividades** da página 196 tem como objetivo trabalhar a determinação da equação de uma parábola, bem como das coordenadas de pontos pertencentes a uma parábola a partir de sua representação no plano cartesiano. Também é trabalhada a determinação da equação de uma parábola a partir das coordenadas de três de seus pontos e sua posição em relação ao eixo das ordenadas. A atividade 60 explora a representação de um esboço de uma parábola utilizando um pedaço de barbante, régua e esquadro. Ao final, propor aos estudantes que compartilhem entre si as produções.

Páginas 197 a 199

● Integrando com Ciências da Natureza e suas Tecnologias

O trabalho com essa seção favorece, com maior ênfase, o desenvolvimento da competência geral 2 e da competência específica 3 da área de Ciências da Natureza e suas Tecnologias. Além disso, propicia uma abordagem do Tema Contemporâneo Transversal Ciência e Tecnologia, uma vez que apresenta informações relacionadas à antena parabólica e uma reflexão sobre a importância do acesso às tecnologias de informação e da comunicação por pessoas que vivem em áreas remotas.

Verificar a possibilidade de explorar as informações dessas páginas em parceria com um professor da área de Ciências da Natureza e suas Tecnologias, elencando elementos próprios da Física, como as transmissões de sinais de som e de vídeo por satélite.

Ao trabalhar o texto sobre a escolha do formato da antena, comentar com os estudantes que *LNB* é a sigla inglesa para a expressão **Low-noise block converter** ("conversor de baixo ruído", em tradução livre).

A questão 4 do **Pensando no assunto** está relacionada ao Tema Contemporâneo Transversal Educação para valorização do multiculturalismo nas matrizes históricas e culturais Brasileiras. Comentar com os estudantes que, no Brasil, existem diversos povos indígenas, cada um com sua cultura própria. Os textos podem ser produzidos pelos grupos de estudantes em formato digital e disponibilizados no site da escola ou em alguma rede social.

● Conexões

Sugerir aos estudantes que acessem o site indicado a seguir para obter informações acerca dos povos indígenas brasileiros.

- POVOS INDÍGENAS NO BRASIL MIRIM. [S. l., 2024]. Site. Disponível em: <http://mirim.org/>. Acesso em: 27 set. 2024.

Páginas 200 e 201

● O que estudei

A seção tem como objetivo possibilitar um momento de reflexão e de autoavaliação para o professor e os estudantes. Para o

trabalho com as questões 1, 2 e 3, sugere-se localizar, na parte geral destas **Orientações para o professor**, o tópico que trata especificamente dessa seção, em que são apresentadas mais informações sobre como conduzi-la.

A questão 4 trabalha a análise de uma parábola que representa um lançamento oblíquo. No item **c**, verificar quais estratégias os estudantes utilizaram para obter a lei de formação da função g .

Páginas 202 a 204

● Praticando: Enem e vestibulares

Essa seção possibilita a realização de uma avaliação somativa dos estudantes. Sugere-se localizar, na parte geral destas **Orientações para o professor**, o tópico que trata especificamente dessa seção, no qual são apresentadas mais informações sobre como conduzi-la.

Unidade 5 Relações métricas e trigonometria no triângulo

Quadro-síntese da Unidade

BNCC	Competências gerais: 1, 2, 5 e 7 Competência específica de Matemática e suas Tecnologias: 3 Competência específica de Ciências da Natureza e suas Tecnologias: 1 Habilidade de Matemática e suas Tecnologias: EM13MAT308
Temas Contemporâneos Transversais	Ciência e Tecnologia; e Educação em Direitos Humanos
Conteúdos	Teorema de Tales, semelhança de polígonos, semelhança de triângulos, teorema fundamental da semelhança, relações métricas no triângulo retângulo, teorema de Pitágoras, razões trigonométricas no triângulo retângulo, razões trigonométricas em um triângulo qualquer, lei dos senos e lei dos cossenos.

Objetivos da Unidade

- Reconhecer a necessidade e a utilização de métodos científicos para obter e validar resultados, bem como identificar diferenças entre o método científico indutivo e dedutivo.
- Compreender e utilizar o teorema de Tales, o conceito de semelhança de figuras geométricas planas e as relações métricas no triângulo retângulo para resolver problemas em diversos contextos.
- Identificar figuras semelhantes e determinar a razão de semelhança entre elas.
- Compreender os casos de semelhança de triângulos e o teorema fundamental da semelhança.
- Obter e compreender relações que envolvem as medidas dos lados e as projeções dos catetos sobre a hipotenusa de um triângulo retângulo, incluindo o teorema de Pitágoras.
- Compreender razões trigonométricas no triângulo retângulo e reconhecer a importância delas na história da humanidade ao contribuírem para a resolução de problemas envolvendo, por exemplo, a determinação de distâncias inacessíveis.

- Utilizar a tabela trigonométrica para consultar os valores do seno, do cosseno e da tangente de um ângulo agudo.
- Estabelecer razões trigonométricas em um triângulo qualquer: lei dos senos e lei dos cossenos.

Orientações didáticas

Abordar, com os estudantes, as contribuições históricas das relações métricas e das razões trigonométricas em triângulos para a sociedade pode ajudá-los no estudo de outros conceitos matemáticos, como as funções trigonométricas, além de possibilitar resolver e elaborar problemas, com ou sem auxílio de recursos tecnológicos, e na compreensão de aplicações em diferentes contextos ou áreas do conhecimento.

Página 205

Abertura da Unidade

O trabalho com a abertura da Unidade favorece, com maior ênfase, o desenvolvimento da competência geral 2 e propicia uma abordagem do Tema Contemporâneo Transversal Ciência e Tecnologia, pois possibilita um trabalho caracterizado pela análise de métodos científicos, promovendo o desenvolvimento de reflexões associadas ao processo de construção do conhecimento científico.

Promover uma roda de conversa com os estudantes, questionando-os se já pensaram a respeito dos diferentes métodos que podem ser utilizados na Ciência. Destacar a responsabilidade dos cientistas ao utilizarem métodos científicos em suas pesquisas por meio da realização de algumas etapas, de modo que o conhecimento a ser compartilhado seja bem fundamentado. Ressaltar que compartilhar as descobertas e os conhecimentos com a sociedade é um dos principais objetivos da Ciência.

São apresentadas, a seguir, as respostas aos itens propostos nessa seção.

1. Determinar a validade de certo fato.
2. Resposta esperada: No método indutivo, a conclusão é obtida a partir de um caso particular. No método dedutivo, a conclusão é obtida a partir de premissas mais gerais, tidas como verdadeiras e amplamente aceitas.
3. Resposta pessoal. Os estudantes podem citar a demonstração de algum teorema matemático ou a dedução de alguma expressão ou fórmula.

Páginas 206 a 210

Teorema de Tales

O trabalho com esse tópico favorece, com maior ênfase, o desenvolvimento da competência específica 3 e da habilidade EM13MAT308 da área de Matemática e suas Tecnologias, pois são realizados estudos envolvendo ideias de congruência e de semelhança de figuras.

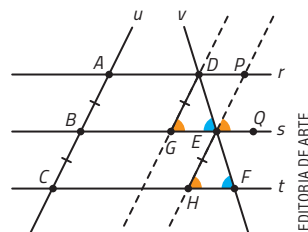
Caso seja necessário, para que os estudantes compreendam a verificação da validade do teorema de Tales, retomar os conceitos de congruência de triângulos e de proporcionalidade, estudados em anos anteriores.

No trabalho com as demonstrações nas páginas 207 e 208, explicar aos estudantes que:

- \overline{AB} se refere a um segmento de reta com extremidades em A e em B ;
- AB se refere à medida do segmento de reta com extremidades em A e em B .

Na demonstração do caso 1 da validade do teorema de Tales, relembrar os estudantes de que um paralelogramo é um quadrilátero com dois pares de lados opostos paralelos; por isso, pode-se afirmar que $\overline{AB} = \overline{DG}$ e $\overline{BC} = \overline{EH}$. Como foi definido que $\overline{AB} = \overline{BC}$, segue-se que $\overline{DG} = \overline{AB} = \overline{BC} = \overline{EH}$. Logo, por transitividade $\overline{DG} = \overline{EH}$.

Ao apresentar aos estudantes que os ângulos $\widehat{DGE} = \widehat{EHF}$, detalhar a demonstração a partir da imagem a seguir.



Dadas as retas paralelas s e t e os pontos auxiliares P e Q , contidos nas retas r e s , respectivamente, segue-se que os ângulos $\widehat{EHF} = \widehat{PEQ}$, pois são correspondentes.

De modo análogo, dadas as retas paralelas que contêm os segmentos de reta \overline{DG} e \overline{EH} e os pontos auxiliares P e Q , segue-se que os ângulos $\widehat{PEQ} = \widehat{DGE}$, pois também são correspondentes.

Como $\widehat{EHF} = \widehat{PEQ} = \widehat{DGE}$, segue-se, por transitividade, que $\widehat{DGE} = \widehat{EHF}$.

As atividades da página 210 têm como objetivo trabalhar situações envolvendo o teorema de Tales. Na atividade 6, é importante avaliar se os problemas elaborados pelos estudantes contemplam as ideias relacionadas ao conceito proposto. Ao final, alguns desses problemas elaborados podem ser reproduzidos na lousa e discutidos com a turma.

Páginas 211 a 215

Semelhança de polígonos

O trabalho com esse tópico favorece, com maior ênfase, o desenvolvimento da competência específica 3 e da habilidade EM13MAT308 da área de Matemática e suas Tecnologias, ao abordar as ideias de congruência e semelhança de figuras. Além disso, propicia uma abordagem do Tema Contemporâneo Transversal Ciência e Tecnologia ao serem explorados os diferentes formatos de vídeo (tela).

Ao trabalhar as informações sobre os formatos de vídeo, argumentar com os estudantes que esses formatos também podem ser chamados de **aspect ratio**.

Existem calculadoras *on-line* que podem ser utilizadas para determinar proporções específicas ao redimensionar fotografias ou vídeos de acordo com os formatos de tela de equipamentos que utilizamos no dia a dia, como a disponível em https://andrew.hedges.name/experiments/aspect_ratio (acesso em: 13 out. 2024).

Propor aos estudantes que pesquisem a tradução do termo **widescreen** ("panorâmico").

Ao definir semelhança de polígonos, discutir com os estudantes que a mesma ideia pode ser utilizada para semelhança de figuras planas quaisquer. Intuitivamente, duas figuras planas são semelhantes quando têm o mesmo formato, independentemente do tamanho. Argumentar que o significado da palavra **semelhante** na Língua Portuguesa é diferente do significado matemático. Na Língua Portuguesa, semelhante pode ser considerado sinônimo de "parecido". Em Matemática, duas figuras parecidas não são necessariamente semelhantes.

No tópico **Semelhança de triângulos**, comentar com os estudantes que o pantógrafo, criado no início do século XVII pelo astrônomo Christoph Scheiner (1573-1650), tem como principal função ampliar ou reduzir figuras, mantendo seu formato.

O estudo da semelhança de triângulos possivelmente foi proposto em anos anteriores. Portanto, é importante que sejam resgatados os conhecimentos prévios dos estudantes e valorizadas as experiências de cada um deles. Destinar um tempo para que eles comentem esse conceito, manifestando suas impressões e possíveis dificuldades. É importante que os estudantes compreendam a necessidade de estabelecer casos de semelhança de triângulos, por exemplo, quando não é possível obter a medida de todos os lados de um triângulo.

Atividade Extra

Os três casos de semelhança de triângulos enunciados nas páginas 212 e 213 podem ser demonstrados. Com dois colegas, escolham um desses casos, pesquisem e analisem uma demonstração da validade do caso de semelhança de triângulos escolhido. Depois, apresentem essa demonstração aos colegas. Vocês podem utilizar *slides* para isso.

Após a realização da atividade extra proposta, ressaltar para os estudantes que as demonstrações têm grande importância na Matemática. Por meio delas, as proposições matemáticas são consideradas socialmente verdadeiras. Aproveitar essa discussão para associá-la ao tema da abertura da Unidade, argumentando que grande parte das demonstrações matemáticas utiliza o método dedutivo.

Na atividade R3, trabalha-se semelhança de polígonos em uma situação que envolve um jogo. As etapas apresentadas estão associadas à resolução de problemas. Sugere-se estruturar e executar essas etapas, como foi apresentado, sempre que perceber que os estudantes estão com dificuldades em determinado problema matemático. Para complementar, conversar com os estudantes sobre o tema dessa atividade em conjunto com um professor da área de Ciências da Natureza e suas Tecnologias, que poderá auxiliar com a proposta de experimentos e a utilização de argumentos, próprios de sua área, a respeito dos ângulos de incidência e rebatimento obtidos do ponto de vista da óptica.

As atividades da página 215 têm como objetivos principais trabalhar a semelhança de polígonos e o cálculo da razão de semelhança entre eles e explorar a semelhança de triângulos e o teorema fundamental da semelhança.

Páginas 216 a 220

Relações métricas no triângulo retângulo

O trabalho com esse tópico favorece, com maior ênfase, o desenvolvimento da competência específica 3 e da habilidade EM13MAT308 da área de Matemática e suas Tecnologias, ao abordar as relações métricas no triângulo retângulo para elaborar e resolver problemas.

O estudo das relações métricas no triângulo retângulo foi abordado em anos anteriores; por isso, propor uma avaliação diagnóstica a fim de identificar possíveis dificuldades dos estudantes. Sugere-se desenhar na lousa um triângulo retângulo, indicando sua altura em relação à hipotenusa e demais elementos, conforme apresentado na página 216. A partir disso, questionar os estudantes acerca das relações que podem ser estabelecidas considerando os elementos dados.

Ao demonstrar que o triângulo *DBA* é semelhante ao triângulo *DAC*, na página 217, argumentar com os estudantes que essa conclusão somente pode ser considerada por causa da propriedade transitiva, que é válida para semelhança de triângulos.

Conexões

Ao abordar o box **Matemática na história** da página 218, sugerir aos estudantes a leitura do livro a seguir, que apresenta textos a respeito da vida e da obra do filósofo e matemático grego Pitágoras de Samos.

- STRATHERN, Paul. **Pitágoras e seu teorema em 90 minutos**. Tradução: Marcus Penchel. 2. ed. Rio de Janeiro: Jorge Zahar Editor, 1998. (Coleção Cientistas em 90 minutos).

A seção **Atividades** das páginas 219 e 220 tem como objetivo explorar as relações métricas em um triângulo retângulo. A atividade 18 trabalha uma exploração geométrica do teorema de Pitágoras. Antes de os estudantes resolverem os itens propostos, apresentar outros exemplos de ternos pitagóricos, como os indicados a seguir.

- 9, 12 e 15. • 5, 12 e 13. • 8, 15 e 17.

Perguntar à turma por que esses exemplos podem ser considerados ternos pitagóricos. Espera-se que os estudantes digam que são números naturais que podem representar as medidas dos catetos e da hipotenusa de um triângulo retângulo.

Páginas 221 a 230

Razões trigonométricas no triângulo retângulo

O trabalho com esse tópico favorece, com maior ênfase, o desenvolvimento da competência geral 1, da competência específica 3 e da habilidade EM13MAT308 da área de Matemática e suas Tecnologias, pois trata de relações entre as medidas de lados e ângulos internos de triângulos. No tópico, são abordadas situações com o objetivo de promover ações coletivas que melhorem as condições de vida em âmbito local e regional, o que propicia um trabalho com a competência específica 1 da área de Ciências da Natureza e suas Tecnologias e do Tema Contemporâneo Transversal Educação em Direitos Humanos.

Antes de iniciar a discussão sobre as normas da Associação Brasileira de Normas Técnicas (ABNT), realizar uma roda de conversa com os estudantes a fim de problematizar a importância de diretrizes gerais a ser estabelecidas para garantir ao maior número de pessoas a utilização dos espaços de maneira autônoma. Dizer que a criação dessas diretrizes possibilita promover a equidade, a valorização dos direitos humanos e a garantia da acessibilidade. Possibilitar aos estudantes que reconheçam que esse tipo de iniciativa promove o respeito a diferentes pessoas, a acessibilidade, o combate à violência e a valorização da saúde mental.

Explicar aos estudantes que a norma NBR 9050 da ABNT estabelece critérios e parâmetros voltados à acessibilidade em edificações, mobiliário, espaços e equipamentos urbanos.

Ao abordar a página 222, sugere-se trabalhar com ideias da investigação matemática, uma das tendências metodológicas abordadas na parte geral destas **Orientações para o professor**. Para isso, propor aos estudantes que, em uma malha quadriculada ou em um *software* de geometria dinâmica, como o GeoGebra, esbocem um triângulo retângulo *ABC*, destacando o ângulo reto e um ângulo interno agudo α . Em seguida, solicitar que construam segmentos de reta paralelos ao cateto oposto a α , de maneira a obter triângulos semelhantes ao triângulo *ABC*, assim como apresentado na página 221. Por fim, considerando os diferentes triângulos retângulos obtidos, pedir a eles que determinem a razão entre as medidas:

- do cateto oposto a α e da hipotenusa;
- do cateto adjacente a α e da hipotenusa;
- do cateto oposto a α e do cateto adjacente a α .

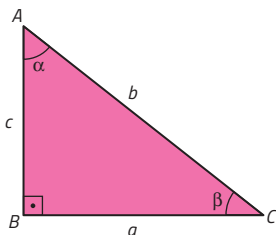
O objetivo é que os estudantes percebam que cada uma dessas razões é sempre igual nos diferentes triângulos retângulos e que atribuem significados a essas razões, reconhecendo, com o trabalho desse tópico, a necessidade do desenvolvimento da trigonometria.

As atividades da página 224 têm como objetivo trabalhar as razões trigonométricas no triângulo retângulo. A atividade 25 trabalha a representação de um triângulo retângulo pelos estudantes com o uso de instrumentos de desenho e relações trigonométricas. Verificar os procedimentos utilizados pelos estudantes na representação do triângulo retângulo e solicitar a um deles que apresente o modo como fez a construção para o restante da turma.

As atividades das páginas 227 a 230 abordam as razões trigonométricas no triângulo retângulo em variados contextos, incluindo a consulta à tabela trigonométrica. Na atividade 35, destacar para os estudantes que o comprimento de uma sombra e a medida do ângulo formado pelos raios solares com o solo não são grandezas diretamente proporcionais, ou seja, se dobrarmos o comprimento da sombra, as medidas dos ângulos não serão necessariamente dobradas também.

A atividade 37 trabalha a investigação de conjecturas por meio de uma tabela trigonométrica. Para complementar, apresentar aos estudantes a demonstração de pelo menos uma das conjecturas que podem ser exploradas, por exemplo, $\sin \alpha = \cos (90^\circ - \alpha)$, com $0^\circ < \alpha < 90^\circ$.

Demonstração: Considere um triângulo ABC , com lados medindo a , b e c , com $a, b, c \in \mathbb{R}_+$ e ângulos internos medindo 90° , α e β , conforme representado a seguir.



Assim, segue-se que $\sin \alpha = \frac{a}{b}$ e $\cos \beta = \frac{a}{b}$. Portanto,

$\sin \alpha = \cos \beta$.

Como $\beta = 90^\circ - \alpha$, segue-se que:

$\sin \alpha = \cos (90^\circ - \alpha)$, para $0^\circ < \alpha < 90^\circ$.

Aproveitar a temática da atividade 39 para desenvolver com os estudantes, se for conveniente, um projeto em parceria com um professor da área de Ciências da Natureza e suas Tecnologias sobre o tema sustentabilidade no uso da energia solar. Explorar questões sociais, geográficas, físicas, biológicas e matemáticas associadas a esse tema. Desenvolver o projeto de modo que, ao final, os estudantes produzam pôsteres de divulgação para conscientizar os demais colegas da escola e a comunidade local a respeito dos benefícios do uso da energia solar.

No boxe **No mundo do trabalho** da página 230, perguntar aos estudantes se eles conhecem algum profissional que trabalhe nessa área. Em caso afirmativo, propor que, se possível, conversem com esse profissional, questionando o que o atraiu nessa profissão e quais são os principais desafios enfrentados. Os estudantes também podem realizar uma pesquisa detalhada a respeito das profissões mencionadas e apresentar aos colegas por meio de exposição oral ou de cartazes.

Páginas 231 a 233

Integrando com Ciências Humanas e Sociais Aplicadas

O trabalho com essa seção, ao abordar a resolução de problemas por meio do uso de conhecimentos sobre as razões trigonométricas no triângulo retângulo, favorece, com maior ênfase, o desenvolvimento das competências gerais 1, 2 e 7, da competência específica 3 e da habilidade EM13MAT308 da área de Matemática e suas Tecnologias.

Inicialmente, questionar os estudantes sobre o termo **acessibilidade** e sua importância para que manifestem suas impressões e opiniões relacionadas ao tema. É relevante que, neste momento, seja discutido o fato de que a acessibilidade procura promover o respeito e a equidade entre as pessoas, de maneira que seus direitos e suas necessidades específicas sejam considerados.

No boxe **No mundo do trabalho**, promover uma roda de conversa com os estudantes a respeito do que eles entendem pelo termo **empatia**. Destacar que, independentemente de essa ser uma habilidade buscada no mercado de trabalho, a empatia deve ser praticada em qualquer relação humana e em todos os lugares, como na sala de aula, com os colegas de turma, com os professores e funcionários da escola.

Sugere-se que a questão 6 do **Pensando no assunto** seja desenvolvida, em grupos, de acordo com etapas da modelagem matemática, uma das tendências metodológicas abordadas na parte geral destas **Orientações para o professor**, que pode ser organizada, para essa situação, em cinco etapas.

- 1ª) Reconhecimento/definição da situação-problema: Os estudantes reconhecem a situação-problema, que se associa ao cumprimento da norma NBR 9050 nas rampas no município em que moram.
- 2ª) Elaboração de hipóteses: Os estudantes elaboram hipóteses, considerando as experiências e os conhecimentos que têm a respeito das rampas no município em que moram. É importante que eles considerem quais rampas possibilitam uma análise mais aprofundada e que antecipem resultados que possam surgir.
- 3ª) Exploração da situação-problema: A partir das hipóteses elaboradas na 2ª etapa, os estudantes investigam informações relacionadas às rampas consideradas, buscando resolver a situação-problema.
- 4ª) Determinação do modelo matemático: Os estudantes buscam organizar as informações obtidas na 3ª etapa por meio de tabela, gráfico, esquema etc. A ideia é organizar as informações para que sejam apresentadas ou divulgadas a outras pessoas a fim de que sejam compreendidas com facilidade.
- 5ª) Discussão dos resultados: Os grupos apresentam aos colegas os resultados que obtiveram.

No item **b** da questão 6, comentar a determinação de que a altura de desnível seja de até 0,8 m, pois, para alturas maiores que essa, é necessário haver mais de um lance de rampa ou reduzir-se o ângulo de inclinação máxima. Verificar cada rampa escolhida pelos grupos, orientando-os a não avaliar uma mesma rampa, de maneira que seja analisado o maior número de rampas possível.

Páginas 234 a 241

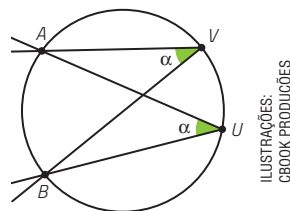
Razões trigonométricas em um triângulo qualquer

O trabalho com esse tópico favorece, com maior ênfase, o desenvolvimento da competência específica 3 e da habilidade EM13MAT308 da área de Matemática e suas Tecnologias, uma vez que aborda, entre outros aspectos, as leis dos senos e dos cossenos na elaboração e na resolução de problemas.

Discutir com os estudantes que, anteriormente, o estudo do seno, do cosseno e da tangente era associado a ângulos de triângulos retângulos. Por esse motivo, os ângulos considerados, além do ângulo reto, eram agudos.

Na demonstração da lei dos senos, se necessário, retomar alguns conceitos, como os apresentados a seguir.

- Chama-se ângulo inscrito em uma circunferência todo ângulo cujo vértice está sobre a circunferência e cujos lados passam por outros pontos distintos dela.
- Um ângulo inscrito em uma circunferência tem vértice em V , lados que passam pelos pontos A e B e medida α , sendo V , A e B pontos sobre essa circunferência. Se outro ângulo inscrito nessa mesma circunferência tem vértice em U , distinto de V , e lados que passam pelos mesmos pontos A e B , então esse ângulo também tem medida α .



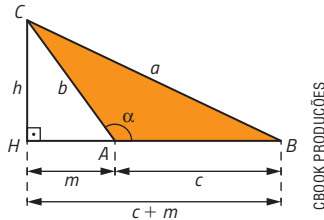
As atividades das páginas 236 e 237 têm como objetivo trabalhar a lei dos senos em diferentes contextos. Na atividade 44, que propõe a elaboração de um problema envolvendo a lei dos senos, destacar aos estudantes que eles podem propor um problema que, por falta de dados no enunciado, não seja possível resolver. Por exemplo, de acordo com o contexto escolhido, pode-se descrever uma região modelada por um triângulo em que sejam identificadas apenas as medidas de dois lados, apenas as medidas de um lado e de um ângulo interno ou apenas as medidas de dois ângulos internos. É importante, nesse caso, que os estudantes que receberem

o problema identifiquem a falta de dados do enunciado e façam sugestões de ajustes, de maneira a tornar possível sua resolução.

No tópico **Lei dos cossenos**, após a realização da demonstração da lei dos cossenos para triângulos acutângulos, apresentar aos estudantes as demonstrações da lei dos cossenos para triângulos obtusângulos e triângulos retângulos.

Triângulo obtusângulo

Considerar o triângulo ABC , cujos lados medem a , b e c , e o ângulo obtuso α em A . Traçando a altura do triângulo relativa ao lado \overline{AB} , são obtidas as medidas m e h , conforme representado a seguir.



Como os triângulos BCH e ACH são retângulos, pode-se utilizar o teorema de Pitágoras e obter as equações a seguir.

$$\bullet h^2 + (c + m)^2 = a^2$$

$$\bullet h^2 + m^2 = b^2$$

Subtraindo, membro a membro, essas duas equações, tem-se:

$$(c + m)^2 - m^2 = a^2 - b^2 \Rightarrow c^2 + 2cm + m^2 - m^2 = a^2 - b^2 \Rightarrow a^2 = b^2 + c^2 + 2cm \text{ (I)}$$

Tem-se, ainda, que o ângulo \widehat{HAC} é suplementar ao ângulo α , ou seja, tem medida igual a $(180^\circ - \alpha)$. Assim:

$$\cos(180^\circ - \alpha) = \frac{m}{b}$$

Como $\cos(180^\circ - \alpha) = -\cos \alpha$, segue-se que $\cos \alpha = -\frac{m}{b} \Rightarrow m = -b \cdot \cos \alpha$.

Substituindo m na equação I, tem-se que:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos \alpha$$

De maneira análoga, pode-se verificar que:

$$\bullet b^2 = a^2 + c^2 - 2 \cdot a \cdot c \cdot \cos \widehat{B}$$

$$\bullet c^2 = a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos \widehat{C}$$

Triângulo retângulo

Considerar um triângulo retângulo ABC , com lados de medidas a , b e c e ângulo reto em A .

Como o triângulo ABC é retângulo, pode-se utilizar o teorema de Pitágoras:

$$a^2 = b^2 + c^2$$

Como $-2 \cdot b \cdot c \cdot \cos 90^\circ = 0$, pode-se escrever a equação:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos 90^\circ$$

As atividades das páginas 240 e 241 têm como objetivo trabalhar a lei dos cossenos, seja em situações contextualizadas, seja em situações estritamente matemáticas. Ao trabalhar a atividade 52, verificar a possibilidade de desenvolvê-la em parceria com um professor da área de Ciências da Natureza e suas Tecnologias. Pode-se planejar, por exemplo, uma proposta para que os estudantes realizem pesquisas em pequenos grupos sobre diferentes grandezas vetoriais e escalares. Explicar a eles que grandezas escalares são aquelas representadas apenas por um valor numérico (módulo) e uma unidade, como massa, temperatura e energia. No item **a**, discutir com os estudantes a diferença entre módulo, direção e sentido. Dizer que módulo é o valor numérico do vetor, cuja unidade é definida pela natureza da grandeza vetorial. A direção associa-se à posição em que se encontra o vetor, isto é, se está na diagonal, na vertical ou na horizontal. O sentido, por sua vez, refere-se à orientação do vetor, ou seja, se está orientado para norte, sul, leste, oeste, direita, esquerda, para cima, para baixo etc.

Com a finalidade de verificar se os estudantes compreendem as razões trigonométricas, bem como a sua importância para a resolução de problemas, sugere-se propor uma prova-escrita-com-cola, conforme apresentado na parte geral destas **Orientações para o professor**. Para isso, propor aos estudantes que elaborem um resumo das razões trigonométricas estudadas, contendo os principais pontos, na metade de uma folha avulsa. É importante que os estudantes elaborem suas "colas" individualmente e que esta seja entregue com a prova resolvida. A prova aplicada pode ser composta, também, de algumas questões da seção **Praticando: Enem e vestibulares**, disponível no final dessa Unidade.

Páginas 242 e 243

Você conectado

O trabalho com essa seção favorece, com maior ênfase, o desenvolvimento da competência geral 5, na medida em que utiliza tecnologias digitais de forma significativa para produzir conhecimentos e resolver problemas. Além disso, possibilita o desenvolvimento da competência específica 3 e da habilidade EM13MAT308 da área de Matemática e suas Tecnologias.

Nessa seção, é importante que os estudantes consigam investigar a lei dos senos utilizando o GeoGebra. Por meio dessa tecnologia digital, eles podem produzir significado para essa relação trigonométrica, que foi sistematizada no decorrer do estudo desta Unidade.

Na etapa **B**, explicar aos estudantes que, na fórmula, α e a correspondem, respectivamente, às medidas do ângulo e do lado oposto a esse ângulo no triângulo construído na etapa **A**. Ressaltar para os estudantes que, ao construírem essas representações no GeoGebra, é importante que mantenham as nomenclaturas correspondentes na fórmula inserida. Dizer que eles podem modificar os rótulos desses objetos de acordo com o lado e o ângulo oposto tomados como referência. Para isso, basta que selecionem o objeto, cliquem com o botão direito do mouse e, em seguida, escolham a opção Renomear.

Mãos à obra - página 243

- Para complementar essa questão, comparar com os estudantes a demonstração da lei dos senos realizada anteriormente nesta Unidade e sua verificação para o triângulo construído no GeoGebra nessa seção. Explicar que uma demonstração válida um resultado de maneira generalizada, enquanto uma verificação válida esse resultado apenas para um caso específico.
- Essa questão trabalha a verificação da lei dos cossenos para um triângulo qualquer no GeoGebra. Para complementar, escolher uma dupla de estudantes para apresentar a verificação que realizaram aos demais colegas.

Páginas 244 e 245

O que estudei

A seção tem como objetivo possibilitar um momento de reflexão e de autoavaliação para o professor e os estudantes. Para o trabalho com as questões 1, 2 e 3, sugere-se localizar, na parte geral destas **Orientações para o professor**, o tópico que trata especificamente dessa seção, em que são apresentadas mais informações sobre como conduzi-la.

A questão 4 trabalha informações sobre métodos científicos, retomando, assim, o tema da abertura da Unidade. No item **a**, apresentar a seguinte dica aos estudantes: geralmente, em uma proposição matemática do tipo "se p , então q ", o que antecede o "então" é considerado premissa e o que sucede o "então" é considerado conclusão. No item **d**, auxiliar os estudantes, de maneira que identifiquem a premissa (k é a razão de semelhança entre dois quadrados) e a conclusão da proposição apresentada (a razão entre as áreas desses quadrados é k^2).

Praticando: Enem e vestibulares

Essa seção possibilita a realização de uma avaliação somativa dos estudantes. Sugere-se localizar, na parte geral destas **Orientações para o professor**, o tópico que trata especificamente dessa seção, no qual são apresentadas mais informações sobre como conduzi-la.

Unidade 6 Estatística: gráficos e tabelas

Quadro-síntese da Unidade

BNCC	Competências gerais: 5, 8 e 9 Competências específicas de Matemática e suas Tecnologias: 1 e 4 Competência específica de Ciências Humanas e Sociais Aplicadas: 5 Habilidades de Matemática e suas Tecnologias: EM13MAT102, EM13MAT406 e EM13MAT407
Temas Contemporâneos Transversais	Direitos da Criança e do Adolescente; Educação para valorização do multiculturalismo nas matrizes históricas e culturais Brasileiras; Saúde; Trabalho; e Vida Familiar e Social
Conteúdos	Tabelas, gráfico de colunas e gráfico de barras, gráfico de segmentos e gráfico de setores, diagrama de caixas e diagrama de ramos e folhas, distribuição de frequência, intervalo de classes e histograma.

Objetivos da Unidade

- Compreender o uso de tabelas simples e de dupla entrada para representação de dados estatísticos.
- Construir, interpretar e compreender o uso de gráficos de colunas ou de barras, de segmentos e de setores, bem como de diagramas de caixas ou *box-plot* e diagramas de ramos e folhas, para a representação de dados estatísticos.
- Identificar e escolher o tipo de gráfico ou de diagrama mais adequado para representar, analisar ou comparar dados estatísticos de acordo com sua natureza.
- Compreender a distribuição de frequência e sua representação em tabelas e histogramas, calculando a amplitude dos intervalos de classe.
- Construir histogramas para representar a distribuição de frequência em diferentes contextos.
- Identificar inadequações em gráficos ou tabelas e analisar criticamente a influência das inadequações na interpretação dos dados estatísticos representados.
- Construir gráficos estatísticos utilizando uma planilha eletrônica.

Orientações didáticas

O trabalho com esta Unidade, além da compreensão de conceitos estatísticos, favorece o desenvolvimento de competências relacionadas a autoconhecimento, apreciação de si mesmo, cuidados com a saúde e compreensão de si na diversidade humana, reconhecendo as próprias emoções. Também promove empatia, diálogo, resolução de conflitos e cooperação, visando ao respeito a si mesmo e ao próximo e à valorização da diversidade.

Abertura da Unidade

O trabalho com a abertura da Unidade favorece o desenvolvimento do Tema Contemporâneo Transversal Saúde, uma vez que trata da importância da vacinação para a erradicação de doenças. Para entenderem um pouco mais sobre algumas vacinas, como a tríplice viral (sarampo, rubéola e caxumba), a da poliomielite e a da febre amarela, propor aos estudantes que façam uma pesquisa a respeito do assunto. Se possível, trabalhar em parceria com um professor da área de Ciências da Natureza e suas Tecnologias a fim de que o docente auxilie os estudantes na pesquisa e explique como as vacinas agem no organismo do ser humano.

No primeiro item proposto, sugerir aos estudantes que pesquisem informações sobre o calendário nacional de vacinação no site do Ministério da Saúde (disponível em: <https://www.gov.br/saude/pt-br/vacinacao/calendario>; acesso em: 24 set. 2024). Em seguida, pedir que comparem esse calendário com a carteira de vacinação deles para identificar se está faltando alguma vacina. Em relação às outras maneiras de representar os dados apresentados na página, registrar as respostas dos estudantes e, ao final da Unidade, retomar a pergunta, verificando se eles compreenderam novas maneiras de representação desses dados estatísticos.

Em relação aos itens propostos nessa seção, todas as respostas são pessoais.

Tabelas

O trabalho com esse tópico favorece, com maior ênfase, o desenvolvimento da competência específica 1 e da habilidade EM13MAT102 da área de Matemática e suas Tecnologias, pois aborda o uso de tabelas na organização de dados estatísticos. Espera-se que os estudantes utilizem tabelas como ferramentas para representar, interpretar e analisar variáveis estatísticas. Pedir a eles que pesquisem o que são variáveis estatísticas e como elas podem ser classificadas: qualitativa nominal, qualitativa ordinal, quantitativa discreta e quantitativa contínua. Discutir as diferenças e semelhanças entre esses tipos de variável.

Gráficos

O trabalho com esse tópico favorece, com maior ênfase, o desenvolvimento das competências específicas 1 e 4 e das habilidades EM13MAT102 e EM13MAT407 da área de Matemática e suas Tecnologias, uma vez que aborda a análise de diferentes gráficos e a interpretação de dados estatísticos por meio de diagramas.

Antes de trabalhar os diferentes tipos de gráfico, sugere-se realizar uma avaliação diagnóstica a fim de identificar os conhecimentos prévios dos estudantes a respeito do assunto. Para isso, podem ser propostas questões por escrito ou verbalmente em relação aos gráficos que os estudantes conhecem e às situações em que costumam ser empregados. Algumas sugestões de questões são: O que são gráficos de colunas? E gráficos de segmentos? Em que situação cada um costuma ser utilizado? Uma mesma situação pode ser representada por ambos os gráficos? O que são gráficos de setores? Que exemplos de dados estatísticos são apresentados em gráficos de setores? A partir das respostas dos estudantes, trabalhar as páginas 251 a 253 do Livro do estudante.

O contexto apresentado no tópico **Gráfico de colunas e gráfico de barras** propicia uma abordagem do Tema Contemporâneo Transversal Direitos da Criança e do Adolescente. Ler para os estudantes o trecho de um texto a seguir, que caracteriza o trabalho infantil.

Trabalho infantil é toda forma de trabalho realizado por crianças e adolescentes abaixo da idade mínima permitida, de acordo com a legislação de cada país. No Brasil, o trabalho

é proibido para quem ainda não completou 16 anos, como regra geral. Quando realizado na condição de aprendiz, é permitido a partir dos 14 anos. Se for trabalho noturno, perigoso, insalubre ou atividades da lista TIP (piores formas de trabalho infantil), a proibição se estende aos 18 anos incompletos.

O QUE é trabalho infantil? [S. l.]: Criança livre de trabalho infantil, [202-]. Disponível em: <https://livredetrabalhoinfantil.org.br/trabalho-infantil/o-que-e/>. Acesso em: 27 set. 2024.

Comentar com os estudantes que, para construir gráficos de colunas ou de barras, a largura dos retângulos deve ser fixa para que as comparações sejam feitas somente pela altura das colunas ou pelo comprimento das barras.

O contexto do tópico **Gráfico de segmentos**, na página 252, diz respeito à Cultura Indígena e está associado ao Tema Contemporâneo Transversal Educação para valorização do multiculturalismo nas matrizes históricas e culturais Brasileiras.

No boxe **Para pensar** da página 252, apresentar um exemplo de como um dado do primeiro gráfico pode ser obtido a partir de um par de dados do segundo gráfico, em determinado período. Por exemplo, em 2017, a quantidade de indígenas matriculados em instituições de Ensino Superior públicas e privadas, respectivamente, era 13 898 e 42 852, dados representados no segundo gráfico. Essas quantidades somam 56 750 indígenas matriculados em cursos de graduação em 2017, dados representados no primeiro gráfico.

Comentar com os estudantes que o gráfico de segmentos também costuma ser chamado de gráfico de linhas e que, geralmente, é utilizado para situações em que uma das variáveis é o tempo, uma vez que mostra o comportamento dos dados em certo período.

No tópico **Gráfico de setores**, na página 253, comentar com os estudantes que, geralmente, os gráficos de setores contêm porcentagens, de modo a indicar cada setor em uma relação entre as partes e o todo. Pedir aos estudantes que calculem as medidas, em grau, dos ângulos centrais dos demais setores do gráfico apresentado (Analfabeto: 14,4°; Ensino Fundamental: 106,2°; Ensino Superior: 58,68°; Outros: 25,92°).

Ao efetuarem os cálculos, os estudantes podem perceber que as medidas dos ângulos centrais podem ser obtidas como o produto entre 360° e a representação decimal (ou fracionária) da porcentagem correspondente.

No tópico **Diagrama de caixas ou box-plot**, na página 254, comentar com os estudantes que a precipitação indica a queda de água do céu. Explicar a eles, em linhas gerais, como é construído um diagrama de caixas, apresentando os seguintes passos.

- 1º) Determinar as seguintes informações: o menor valor, o maior valor, o primeiro, o segundo e o terceiro quartis. O primeiro quartil é o número que faz que 25% dos valores sejam menores ou iguais a ele. O segundo faz que 50% dos valores sejam menores ou iguais a ele. E o terceiro faz que 75% dos valores sejam menores ou iguais a ele.
- 2º) Representar, em um eixo graduado, os cinco valores obtidos.
- 3º) Desenhar dois retângulos justapostos verticalmente, com largura fixa. O comprimento de um retângulo é a distância do primeiro ao segundo quartil, e o do outro retângulo é a distância do segundo ao terceiro quartil.
- 4º) Construir o bigode, traçando um segmento do menor valor ao primeiro quartil e outro segmento do terceiro quartil ao maior valor.

No boxe **Para pensar**, verificar os conhecimentos prévios dos estudantes em relação ao conceito de probabilidade. Caso necessário, retomar o trabalho com esse conceito, realizado no Ensino Fundamental.

A seção **Atividades** das páginas 255 a 262 tem como objetivo trabalhar a análise de informações apresentadas em tabelas, em gráficos e no diagrama de caixas. Na atividade 6, ler para os estudantes o trecho de um texto a seguir, a respeito de sítios arqueológicos.

Os sítios arqueológicos são lugares onde é possível encontrar evidências de atividades humanas, como pinturas rupestres, construções antigas, túmulos e artefatos, que simbolizam e representam determinado momento histórico da região.

BRASIL. Ministério do Turismo. **Conheça alguns sítios arqueológicos brasileiros que são considerados patrimônio cultural do nosso país**. Brasília, DF: MT, 24 jul. 2024. Disponível em: <https://www.gov.br/turismo/pt-br/assuntos/noticias/conheca-alguns-sitios-arqueologicos-brasileiros-que-sao-considerados-patrimonio-cultural-do-nosso-pais>. Acesso em: 2 out. 2024.

Para auxiliar os estudantes na pesquisa sobre os sítios arqueológicos do município, buscar parceria com professores da área de Ciências Humanas e Sociais Aplicadas. Caso exista, na região em que a escola se localiza, algum sítio arqueológico, verificar a possibilidade de realizar uma visita a ele com os estudantes. Com isso, é possível promover a aprendizagem não apenas de conteúdos matemáticos mas também contribuir para a formação cidadã dos estudantes. Se a visita puder ser realizada, propor à turma a elaboração de um relatório, produzido em pequenos grupos.

Na atividade 9, ao debater com os estudantes ações que podem reduzir a quantidade de mortes violentas intencionais no Brasil, verificar a possibilidade de realizar um trabalho integrado com um professor da área de Ciências Humanas e Sociais Aplicadas. Propor aos estudantes que pesquiseem quais são as regiões ou os estados do Brasil com os maiores índices de mortes violentas intencionais e que, com base na pesquisa, busquem estabelecer com o professor da área possíveis relações entre os índices obtidos e alguns fatores como desigualdade social e segurança pública deficitárias.

Com base no debate estabelecido, os estudantes podem propor medidas que visem reduzir a quantidade de mortes violentas intencionais no país, como o investimento em políticas públicas com a finalidade de diminuir as desigualdades sociais e de garantir uma segurança pública eficaz, além do acesso à educação. Assim, também é possível abordar a temática necropolítica, que diz respeito ao uso do poder público na proposição de ações ou na falta delas que, de certo modo, determinam que parte da população permaneça ou não com vida.

Atividade Extra

Após a atividade 10, propor aos estudantes que façam, em sala de aula, uma enquete sobre os hábitos alimentares deles. Para isso, organizar os estudantes em pequenos grupos e propor que elaborem um questionário, com algumas questões, como as sugeridas a seguir: Na última semana, você consumiu bebidas ultraprocessadas? (Sim; Não). Na última semana, você consumiu biscoitos recheados? (Sim; Não). Na última semana, você consumiu doces industrializados? (Sim; Não). Com que frequência você consome alimentos ultraprocessados? (Não consome; Consome entre uma e três vezes por semana; Consome entre quatro e seis vezes por semana; Consome todos os dias). Depois, propor que cada um dos grupos entreviste todos os estudantes da turma, incluindo os integrantes que compõem o grupo. Por fim, solicitar que elaborem um gráfico com as informações obtidas e apresentem para toda a turma.

No tópico **Diagrama de ramos e folhas**, na página 263, comentar com os estudantes que esse tipo de diagrama é utilizado para apresentar dados estatísticos e, ainda, para dar destaque ao modo como esses dados podem ser distribuídos. Verificar se eles entenderam que um ramo com muitas folhas indica que aquele ramo tem grande incidência.

Explicar à turma que, ao aumentar a quantidade de ramos em um diagrama, os dados ficam detalhados e, ao diminuí-la, é possível observar melhor a distribuição dos dados.

As atividades das páginas 264 e 265 têm como objetivo trabalhar a análise e a interpretação de diagramas de ramos e folhas, bem como abordar a elaboração desse tipo de diagrama. Para a realização do item **d** da atividade 19, organizar os estudantes em pequenos grupos e sugerir que pesquisem o *site* da Secretaria

de Saúde do município em que moram ou indicar o *site* do IBGE a seguir.

● Conexões

Acessar o *site* indicado a seguir para obter a taxa de mortalidade infantil em estados e em municípios brasileiros no último Censo.

- INSTITUTO BRASILEIRO DE GEOGRAFIA E ESTATÍSTICA. **Brasil:** taxa de mortalidade infantil. Rio de Janeiro: IBGE, 2022. Localizável em: Selecionar local: Estados: Ano 2022. Disponível em: <https://cidades.ibge.gov.br/brasil/rj/pesquisa/39/30279?tipo=ranking&indicador=30279&ano=2022>. Acesso em: 27 set. 2024.

Ainda sobre essa atividade, comentar com os estudantes que a massa de um recém-nascido é um dos fatores que influenciam na saúde da criança. Todo recém-nascido com menos de 2,5 kg é considerado baixo peso ao nascer (BPN). Para apresentar as informações pesquisadas, pedir aos estudantes que construam uma tabela e um gráfico com as informações. Discutir com eles o tipo de gráfico mais adequado para apresentar os dados obtidos.

A atividade 21 aborda o Tema Contemporâneo Transversal Trabalho. Para auxiliar os estudantes na compreensão do que é a variação relativa de estoque, explicar a eles que, por exemplo, o dado "7,45", apresentado no quadro, indica que, em uma das unidades da Federação ocorreu um aumento aproximado de 7,45% na quantidade de empregos regidos pela Consolidação das Leis do Trabalho (CLT) em 2023 em relação a 2022.

Páginas 266 a 269

● Integrando com Ciências Humanas e Sociais Aplicadas

O trabalho com essa seção favorece, com maior ênfase, o desenvolvimento das competências gerais 8 e 9, da competência específica 1 e da habilidade EM13MAT102 da área de Matemática e suas Tecnologias, uma vez que, a partir dos dados apresentados em tabelas e em gráficos, possibilita reflexões a respeito da importância de exercitar a empatia e de cuidar de si mesmo emocionalmente. Além disso, trata da identificação e do combate ao preconceito e à violência manifestados por meio da intimidação sistemática (*bullying*), o que permite abordar a competência específica 5 da área de Ciências Humanas e Sociais Aplicadas. Com isso, também são abordados na seção os Temas Contemporâneos Transversais Direito da Criança e do Adolescente e Saúde, ao apresentar reflexões acerca da autoestima.

Dizer aos estudantes que existem leis *antibullying* no Brasil, as quais visam à promoção de uma cultura de paz como responsabilidade de todos, incluindo as escolas.

Com base no texto, dialogar com a turma sobre práticas de combate ao *bullying* que podem ser implementadas no ambiente escolar para a promoção de uma cultura de paz. Se possível, conversar com professores de outras áreas do conhecimento para discutir atitudes que possibilitem o aumento da autoestima.

● Conexões

Para discutir o tema autoestima, ler o texto a seguir, que relaciona esse assunto com a violência escolar.

- MARRIEL, Lucimar Câmara *et al.* Violência escolar e autoestima de adolescentes. **Cadernos de Pesquisa**, São Paulo, v. 36, n. 127, p. 35-50, jan./abr. 2006. Disponível em: www.scielo.br/pdf/cp/v36n127/a0336127.pdf. Acesso em: 27 set. 2024.

A questão 5 do **Pensando no assunto** trabalha a elaboração de uma campanha *antibullying* que visa promover uma melhor convivência no ambiente escolar. Coordenar os grupos para que apresentem informações claras sobre o *bullying* nas escolas, trazendo dados estatísticos e outras informações relevantes sobre

o assunto. As informações podem ser apresentadas por meio de mídias digitais ou cartazes. Atentar para que a campanha não exponha as pessoas envolvidas nem tenha cunho agressivo. Se possível, durante o período de elaboração da campanha, convidar um psicólogo que trabalhe com psicologia escolar para proferir palestras aos estudantes, pais, professores e funcionários, visando apoiar todos os agentes da comunidade escolar no combate ao *bullying*. Ao final, expor o trabalho dos estudantes no *site* da escola, em um blogue ou no ambiente escolar. Essa questão também pode ser proposta a partir da metodologia ativa de aprendizagem baseada em projetos, apresentada na parte geral destas **Orientações para o professor**. Uma sugestão é que os estudantes produzam vídeos de conscientização sobre o *cyberbullying*. Para isso, podem ser elaboradas as fases a seguir.

1. Pesquisas gerais acerca do *cyberbullying* e sobre como denunciá-lo.
2. Discussão sobre ações de combate ao *cyberbullying*.
3. Investigação sobre como pode ser realizada a conscientização dos estudantes da escola por meio da divulgação de vídeos.
4. Gravação dos vídeos em grupos. Os vídeos podem ser encenações, gravações de telas de computador ou celular, noticiário ou minidocumentário.
5. Divulgação dos vídeos na escola e em plataformas digitais.

Ao final do projeto, é importante avaliar a participação individual e coletiva dos estudantes na realização de cada fase proposta.

Páginas 270 a 277

Distribuição de frequência

O trabalho com esse tópico favorece, com maior ênfase, o desenvolvimento da competência específica 4 e das habilidades EM13MAT406 e EM13MAT407 da área de Matemática e suas Tecnologias, uma vez que aborda a construção e a interpretação de tabelas e gráficos de frequência, bem como a interpretação de histogramas.

Na página 270, ao tratar do box **No mundo do trabalho**, questionar os estudantes sobre o que eles sabem a respeito dos profissionais qualificados que foram citados no texto (engenheiro mecânico, programador de robôs e especialista em inteligência artificial). Propor que realizem uma pesquisa a respeito das funções e das responsabilidades de cada um desses profissionais e apresentem os resultados à turma. Os estudantes também podem pesquisar outras profissões que utilizam a robótica em seu trabalho, como é o caso de médicos cirurgiões, por exemplo, que realizam cirurgias com apoio de robôs.

Na página 271, verificar se os estudantes compreenderam que as frequências acumuladas relativas representam as porcentagens das frequências acumuladas absolutas correspondentes.

As atividades das páginas 272 e 273 têm como objetivo trabalhar a interpretação e a elaboração de tabelas de distribuição de frequência. O contexto da atividade 23 propicia uma abordagem do Tema Contemporâneo Transversal Vida Familiar e Social, uma vez que apresenta informações sobre o Índice de Desenvolvimento Humano (IDH). Para a construção da tabela no item **b**, os dados referentes à frequência relativa podem ser aproximados. Para construir os gráficos propostos nessa atividade, os estudantes podem utilizar uma planilha eletrônica. Na seção **Você conectado**, apresentada mais adiante nessa Unidade, há instruções de como realizar essas construções na planilha eletrônica LibreOffice Calc.

Verificar a possibilidade de propor a atividade 23 aos estudantes como um momento de avaliação. Uma sugestão é que eles a realizem em uma folha avulsa para ser entregue ao professor. Com isso, espera-se identificar se os estudantes são capazes de elaborar uma tabela de distribuição de frequências a partir de um conjunto de dados e se constroem gráficos com base nessa tabela, escolhendo o

tipo mais adequado de acordo com a natureza dos dados. Ao final da resolução da atividade, questionar os estudantes se eles sentiram dificuldades para responder aos itens e, em caso afirmativo, quais foram essas dificuldades. Com base nas respostas apresentadas, retomar o trabalho com esse conteúdo, se necessário.

No tópico **Intervalo de classes e histograma**, na página 273, comentar com os estudantes que, de modo geral, os intervalos de classe têm a mesma amplitude. Explicar à turma que, na determinação dos intervalos de classes do exemplo apresentado na página 274, o número 26,8 foi substituído por 30 para que a divisão pela quantidade de classes (5 classes) fosse exata. Ressaltar que é importante que se escolha sempre um número maior que a diferença obtida na primeira etapa a fim de que as classes tenham amplitude suficiente para contemplar todos os dados. Em relação à escolha da quantidade dos intervalos de classe, dizer aos estudantes que essa escolha é arbitrária e conveniente.

[...] Entretanto, deve-se observar que, com um pequeno número de classes, perde-se informação, e com um número grande de classes, o objetivo de resumir os dados fica prejudicado. Normalmente, sugere-se o uso de 5 a 15 classes com a mesma amplitude.

BUSSAB, Wilton de Oliveira; MORETTIN, Pedro Alberto. **Estatística básica**. 4. ed. São Paulo: Atual, 1987. (Métodos qualitativos, p. 7).

Na página 275, explicar aos estudantes que, ao se construir um histograma, usualmente não se deixa “espaço” entre as colunas, construindo-as de maneira justapostas. Já em um gráfico de colunas, é usual que se tenha um “espaço” entre essas colunas.

A seção **Atividades** das páginas 275 a 277 tem como objetivo trabalhar a interpretação de informações organizadas em intervalos de classes e histogramas, bem como abordar a elaboração de tabelas de distribuição de frequência com dados agrupados em intervalos de classes e a construção de histogramas. Na atividade 26, para a pesquisa proposta no item f, realizar uma parceria com um professor de Ciências da Natureza e suas Tecnologias, uma vez que é abordado o Tema Contemporâneo Transversal Saúde. Para complementar, pedir aos estudantes que investiguem outras doenças causadas por insetos ou aracnídeos que afetam os moradores da região em que moram.

Páginas 278 e 279

● Você conectado

O trabalho com essa seção favorece, com maior ênfase, o desenvolvimento da competência geral 5, da competência específica 4 e das habilidades EM13MAT406 e EM13MAT407 da área de Matemática e suas Tecnologias, pois propõe o uso de planilhas eletrônicas (*softwares*) para organizar dados estatísticos e construir diferentes tipos de gráfico. Orientar os estudantes na construção de tabelas em planilhas eletrônicas, levando-os a interpretar e reconhecer os dados estatísticos que estão sendo inseridos a fim de dar sentido a elas no contexto apresentado.

Para auxiliar os estudantes na construção dos gráficos, comentar que, na etapa C, os títulos do gráfico e dos eixos e os rótulos podem ser inseridos de maneira análoga ao realizado com o gráfico de colunas. Na etapa D, para que apareça o valor correspondente a cada setor, deve-se clicar com o botão direito do *mouse* sobre o gráfico e selecionar a opção **Inserir rótulos de dados**. Para indicar os rótulos em porcentual, clicar com o botão direito do *mouse* sobre o gráfico, selecionar a opção **Formatar rótulo de dados** e, na aba **Rótulos de dados**, marcar a opção **Mostrar valor como porcentagem** e desmarcar a opção **Mostrar valor como número**.

Mãos à obra - página 279

- Após a construção do gráfico, auxiliar os estudantes na compreensão do que cada barra dele indica (a frequência acumulada correspondente).

Páginas 280 a 286

Gráficos e tabelas: inadequações que podem induzir a erro de interpretação

O trabalho com esse tópico favorece, com maior ênfase, o desenvolvimento da competência específica 1 e da habilidade EM13MAT102 da área de Matemática e suas Tecnologias, pois aborda inadequações na construção de gráficos e tabelas que podem induzir a erro de interpretação. Para isso, o texto introdutório trata de questões relacionadas ao Tema Contemporâneo Transversal Vida Familiar e Social, uma vez que relaciona gráficos e tabelas inadequados com a disseminação de *fake news*.

Ao abordar o boxe **No mundo do trabalho** da página 282, questionar os estudantes se eles conhecem algum jornalista e, se possível, convidá-lo para falar com toda a turma a respeito de seu trabalho. Os estudantes podem elaborar algumas perguntas para nortear a conversa. Algumas sugestões são: Por que você escolheu essa profissão? Você trabalha em qual segmento do jornalismo? Quais são os desafios encontrados no dia a dia? O que você mais admira no jornalismo?

● Conexões

Sugerir aos estudantes que acessem o *site* do Conselho Nacional de Justiça, que apresenta um painel de checagem de notícias falsas.

- BRASIL. Conselho Nacional de Justiça. **Painel de checagem de fake news**. Brasília, DF: CNJ, 2024. Disponível em: <https://www.cnj.jus.br/programas-e-acoes/painel-de-checagem-de-fake-news/noticias-cheçadas/>. Acesso em: 27 set. 2024.

A resolução apresentada na atividade R1, da página 283, utiliza etapas que estão associadas à resolução de problemas. Sugere-se estruturar e executar essas etapas, como foi apresentado na resolução, sempre que perceber que os estudantes estão com dificuldades na resolução de um problema matemático. Para complementar, conversar com os estudantes sobre as diferenças entre os dois gráficos e sobre o fato de que o gráfico alterado pode induzir os leitores a interpretar que a quantidade de eleitores que preferem o candidato B seria bem menor que a real.

A seção **Atividades** das páginas 284 a 286 tem como objetivo trabalhar a análise de gráficos e de pictogramas que contêm inadequações ou apresentam falta de informações (fonte, elementos do título etc.).

Páginas 287 e 288

● O que estudei

A seção tem como objetivo possibilitar um momento de reflexão e de autoavaliação para o professor e os estudantes. Para o trabalho com as questões 1, 2 e 3, sugere-se localizar, na parte geral destas **Orientações para o professor**, o tópico que trata especificamente dessa seção, em que são apresentadas mais informações sobre como conduzi-la.

A questão 4 trabalha a interpretação de informações representadas em gráficos e tabelas sobre vacinação, tema abordado em outros momentos da Unidade, como na abertura. Perguntar aos estudantes se eles foram vacinados contra a *influenza* alguma vez. Ressaltar a importância dessa vacina na prevenção de epidemias de doenças respiratórias.

Páginas 289 e 290

● Praticando: Enem e vestibulares

Essa seção possibilita a realização de uma avaliação somativa dos estudantes. Sugere-se localizar, na parte geral destas **Orientações para o professor**, o tópico que trata especificamente dessa seção, no qual são apresentadas mais informações sobre como conduzi-la.

Direitos trabalhistas para todos**[MÚSICA DE TRANSIÇÃO]**

Nos últimos anos, a dificuldade de inserção no mercado de trabalho fez com que algumas profissões, como motoristas e entregadores por aplicativos, se popularizassem e, em muitos casos, se tornassem símbolos do trabalho informal precarizado no Brasil.

Os serviços prestados por esses trabalhadores se mostraram essenciais nas grandes cidades, principalmente após o início do isolamento social durante a pandemia de covid-19 em 2020, e continuam sendo muito utilizados até hoje.

Nesse modelo de trabalho, o vínculo empregatício entre o trabalhador e as empresas responsáveis pelos aplicativos não é reconhecido legalmente, privando esses profissionais de garantias e direitos trabalhistas, como salário mínimo, férias, seguro-desemprego, entre outros. Assim, os trabalhadores assumem todos os custos e os riscos relacionados às suas atividades.

[SOM DE BUZINA]

Em 2024, um estudo do Instituto de Pesquisa Econômica e Aplicada (Ipea), intitulado "Plataformização e Precarização do Trabalho de Motoristas e Entregadores no Brasil", revelou que a adesão dos motoristas ao trabalho mediado pelas plataformas levou a uma redução na renda média desses profissionais.

De acordo com esse estudo, entre 2012 e 2015, havia cerca de 400 mil motoristas autônomos no setor de transporte de passageiros, com uma renda mensal média de R\$ 3.100. Em 2022, com a quantidade de profissionais chegando perto de 1 milhão, essa remuneração média caiu para menos de R\$ 2.400.

Além disso, o percentual de trabalhadores com jornadas entre 49 e 60 horas semanais aumentou de 21,8%, em 2012, para 27,3% em 2022. O estudo destaca que esse crescimento não foi observado entre os trabalhadores autônomos que não utilizam essas plataformas.

Ao analisar a contribuição desses profissionais para a previdência social, o estudo aponta que, em 2015, pouco menos da metade dos motoristas contribuíam para a previdência, que garante proteção em casos como doença, acidentes e aposentadoria. Em 2022, o percentual de contribuintes caiu para 24,8%.

[SOM DE VEÍCULO MOTORIZADO]

O estudo mostrou que, assim como os motoristas, a quantidade de entregadores atuando em plataformas, incluindo motociclistas e ciclistas aumentou, enquanto a renda desses trabalhadores diminuiu. Em 2015, o Brasil tinha 56 mil trabalhadores nesse setor, com uma renda média mensal de R\$ 2.250. Em 2021, esse número subiu para 366 mil, mas a renda média caiu para R\$ 1.650.

Além disso, o percentual de entregadores que contribuíam para a previdência social diminuiu, passando de 31,1%, entre 2012 e 2018, para 23,1% entre 2019 e 2022. O estudo também observou um aumento na quantidade de profissionais com jornadas de trabalho superiores a 49 horas semanais.

O estudo concluiu que o trabalho nas plataformas está se tornando cada vez mais precário, caracterizado por baixa remuneração, falta de formalização e de contribuição previdenciária, além de longas jornadas de trabalho.

Diante da pressão dessa categoria, o governo federal iniciou, em 2023, um debate para a criação de um projeto de lei que visa garantir direitos aos motoristas de aplicativo. O projeto prevê jornada de trabalho de 8 ou, no máximo, de 12 horas diárias, remuneração mínima de R\$ 1.412 e contribuição previdenciária obrigatória para os motoristas e as plataformas responsáveis pelos aplicativos, além de conceder outros direitos, como o auxílio-maternidade.

[MÚSICA DE TRANSIÇÃO]

Você já parou para pensar em como a Matemática está presente no trabalho desses motoristas?

A Matemática desempenha um papel importante no trabalho desses profissionais. Por exemplo, para determinar os ganhos diários ou semanais, é necessário entender o valor da tarifa por corrida, calcular o total recebido no dia ou na semana, e subtrair as despesas com os quilômetros rodados, que incluem gastos com combustível e a manutenção do veículo.

Um caso específico é o dos entregadores, cuja remuneração é geralmente baseada na distância entre o local de retirada do pedido

e o cliente. Em 2023, uma das plataformas mais utilizadas por esses profissionais oferecia um pagamento mínimo de R\$ 1,50 por quilômetro percorrido. Assim, em uma entrega de cerca de 12 quilômetros, o entregador receberia, no mínimo, R\$ 18,00. Além disso, se a distância percorrida não resultasse em um pagamento de R\$ 6,50, a empresa garantiria esse valor mínimo. Portanto, mesmo em uma entrega de apenas 2 quilômetros, que renderia apenas R\$ 3,00, a plataforma assegurava o pagamento de R\$ 6,50. No entanto, esse valor não é o líquido que o entregador recebe, pois, como comentamos, ele deve subtrair os custos, como os gastos com gasolina.

[MÚSICA DE TRANSIÇÃO]

Neste *podcast*, você pôde perceber o impacto da plataforma na vida de motoristas e entregadores de aplicativos e refletir sobre a importância da regulação e da proteção dos direitos trabalhistas dessa categoria. Também percebeu como os conhecimentos matemáticos estão presentes no cotidiano desses profissionais, ajudando, por exemplo, a calcular o valor recebido por cada entrega e os ganhos diários e semanais.

[MÚSICA DE TRANSIÇÃO]

Créditos: Os áudios inseridos neste *podcast* são da Freesound.

Acessibilidade: um direito de todos**[MÚSICA DE TRANSIÇÃO]****[ÁUDIO EXTRAÍDO DE VÍDEO]**

"Acessibilidade é como o próprio nome já diz, né, é o acesso a determinado lugar, plataforma, atividade de forma segura e autônoma. Então, quando a gente fala em acessibilidade, a gente está falando do direito de usufruir de algo de maneira autônoma, de maneira independente, sem que a gente precise de uma outra pessoa, de um outro alguém nos auxiliando."

[MÚSICA DE TRANSIÇÃO]

Flávia Dutra, coordenadora do Laboratório de Inclusão e Diversidade da Universidade Estadual do Rio de Janeiro, no trecho apresentado, define acessibilidade como o "direito de usufruir de algo de maneira autônoma". No entanto, embora esse direito deva ser garantido a todas as pessoas com deficiência, ele nem sempre esteve presente nas políticas públicas e nas discussões da sociedade civil.

Durante muito tempo, a falta de informação e o preconceito em relação às pessoas com deficiência fizeram com que muitas delas fossem excluídas da vida em sociedade. Antes, a acessibilidade não era uma prioridade para os governantes e para a sociedade civil. No entanto, a partir do século XX, começaram a ocorrer algumas mudanças significativas.

[MÚSICA DE TRANSIÇÃO]

Um marco importante foi o Programa de Ação Mundial para as Pessoas Deficientes, criado pela ONU em 1982, com a finalidade de promover, entre outros aspectos, a inclusão de pessoas com deficiência, oferecendo-lhes oportunidades e participação equitativa na sociedade.

A necessidade de políticas para garantir os direitos de pessoas com deficiência começou a se consolidar não só para assegurar o convívio coletivo dessas pessoas mas também para reverter toda uma história de negligência em vários aspectos. As prioridades de desenvolvimento desses direitos ocorreram nas áreas de educação e trabalho.

No Brasil, em 1990, o Estatuto da Criança e do Adolescente trouxe em seu texto a garantia de atendimento educacional especializado às crianças e aos adolescentes com deficiência. No ano seguinte, uma lei federal estabeleceu que as empresas com 100 ou mais empregados deveriam destinar de 2% a 5% das vagas de trabalho para pessoas com deficiência.

O aumento da inclusão das pessoas com deficiência, sobretudo nas escolas e nas empresas, gerou uma demanda crescente de adaptação desses ambientes. Por isso, em 2000, outra lei federal determinou normas gerais e critérios para a acessibilidade a vias e espaços públicos, construções, edifícios e meios de transporte.

[MÚSICA DE TRANSIÇÃO]

Mas não basta ter leis para que as pessoas com deficiência tenham acesso aos locais que desejam frequentar. É preciso garantir que a acessibilidade prevista por essas leis seja segura, bem

planejada e atenda aos cálculos e normas técnicas. Você sabia que os conhecimentos matemáticos podem contribuir para isso?

Diversos conceitos matemáticos ajudam a garantir a acessibilidade. Por exemplo, para definir a altura de interruptores, as dimensões de corredores e portas, o comprimento de pisos táteis, entre outros itens de acessibilidade, são usados conceitos de grandezas e medidas. Podemos recorrer à Geometria para calcular áreas e garantir que os espaços sejam seguros e confortáveis. Até a inclinação de rampas de acesso é determinada por normas específicas, cujo cálculo conta com uma ajudinha especial da Matemática.

[MÚSICA DE TRANSIÇÃO]

Mas a acessibilidade vai além de garantir a mobilidade das pessoas com deficiência. Relembrando a fala de Flávia Dutra no início deste *podcast*, a acessibilidade está relacionada ao direito de ter uma vida autônoma e equitativa. Isso também depende do acesso à educação e ao mercado de trabalho, como já mencionado, mas, infelizmente, ainda não é a realidade no Brasil. Para entender melhor esse cenário, podemos contar com mais uma aplicação dos conhecimentos matemáticos: as pesquisas estatísticas.

[MÚSICA DE TRANSIÇÃO]

De acordo com dados do IBGE (Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística), em 2022, cerca de 18 milhões e 600 mil brasileiros com 2 anos ou mais tinham algum tipo de deficiência, o que corresponde a quase 9% da população nessa faixa etária.

Desse total, apenas uma em cada quatro pessoas com deficiência completou o Ensino Médio, que é obrigatório no país, e menos de 7% estavam cursando o Ensino Superior.

Com menos escolaridade, as possibilidades de conseguir um emprego são menores. Em 2022, apenas 26,6% das pessoas com deficiência estavam empregadas, segundo a pesquisa do IBGE.

Mesmo com o avanço da inclusão de pessoas com deficiência, ainda há muito a fazer por meio de políticas públicas e iniciativas da sociedade civil organizada para garantir a verdadeira acessibilidade às pessoas com deficiência no Brasil.

Que tal fazer parte dessa mudança? Busque mais informações sobre esse assunto e compartilhe com as pessoas do seu convívio. Isso também é um ato de cidadania e promoção da igualdade.

[MÚSICA DE TRANSIÇÃO]

Créditos: O vídeo “O que é acessibilidade” está disponível no canal TV UERJ Explica da Universidade Estadual do Rio de Janeiro do YouTube. Os outros áudios inseridos neste *podcast* são da Freesound.

A Matemática no combate às fake news

[MÚSICA DE TRANSIÇÃO]

Você conhece aquele ditado que diz que “notícia ruim chega logo”? Pois bem, parece que o mesmo ocorre com as notícias falsas. Essa foi a conclusão de um grupo de pesquisadores do Instituto de Tecnologia de Massachusetts, o MIT, após realizarem uma pesquisa, em 2018, com mensagens trocadas em uma rede social. Essa pesquisa mostrou que as *fake news* tinham uma probabilidade 70% maior de serem compartilhadas que as notícias verdadeiras. Foram analisadas cerca de 126 mil mensagens entre 2006 e 2017, e concluiu-se que 3 milhões de pessoas publicaram ou compartilharam *fake news* cerca de 4,5 milhões de vezes, e que toda essa movimentação de mensagens falsas foi produzida por humanos, e não por robôs, como se imaginava.

No Brasil, uma pesquisa realizada pelo Instituto Locomotiva revela que 90% dos brasileiros admitem já ter acreditado em informações falsas. Além disso, um quarto da população afirma ter sido responsabilizado por espalhar notícias enganosas por pessoas com opiniões divergentes das suas. Vamos conversar um pouco mais sobre isso?

[MÚSICA DE TRANSIÇÃO]

Mais do que mentiras, as *fake news* recebem esse nome porque contêm diversos recursos que fazem com que as pessoas acreditem em inverdades publicadas como se fossem notícias verdadeiras. Além do formato, que imita as cores e os tipos de letras usados por veículos de comunicação conhecidos, a notícia pode incluir

um trecho verdadeiro fora de contexto ou desatualizado. Ah! E não podemos esquecer da utilização da inteligência artificial na produção de *fake news*, em que as imagens e as vozes de jornalistas ou pessoas de destaque são manipuladas, como se eles tivessem realmente dito as mentiras divulgadas. Grave, não é?

Mas por que as notícias falsas têm maior probabilidade de serem compartilhadas? De acordo com o professor de Filosofia Willian Maron, as *fake news* podem confirmar algumas crenças pessoais ou fatos que gostaríamos que fossem verdade, o que as torna facilmente acreditadas e disseminadas pelos interlocutores.

[MÚSICA DE TRANSIÇÃO]

Como notamos, nem sempre é fácil identificar o que é *fake news*, mas a Matemática pode auxiliar nessa tarefa.

Por exemplo, para combater o avanço das *fake news*, foram criados algoritmos computacionais que checam automaticamente se as informações são reais. Essa verificação é feita por meio de métodos e cálculos numéricos que cruzam informações disponíveis na internet e as comparam com dados verdadeiros. Com o desenvolvimento desses modelos matemáticos, surgiram agências e canais de checagem de informação que podem ser consultados para ter certeza sobre a veracidade de uma notícia. O Tribunal Superior Eleitoral, por exemplo, criou sua própria página de checagem, chamada Fato ou Boato. Além dessas ferramentas, você pode verificar se algumas notícias são falsas quando se depara com elas, identificando títulos chamativos e sensacionalistas, erros gramaticais típicos de textos sem revisão jornalística ou publicações em sites desconhecidos ou não confiáveis.

[MÚSICA DE TRANSIÇÃO]

Você sabia que a Estatística pode ajudar a identificar *fake news*? Isso mesmo! Muitas vezes, os autores de notícias falsas usam dados estatísticos manipulados e distorcidos para enganar o leitor e induzi-lo a interpretações incorretas. Esses dados são frequentemente apresentados em gráficos, e saber como analisá-los é essencial para verificar se houve manipulação e distorção das informações. Acompanhe o que a professora Ana de Medeiros diz sobre isso.

[ÁUDIO EXTRAÍDO DE VÍDEO]

“A estatística é uma ferramenta de conhecimento, de produção de conhecimento, de validação de conhecimento, que não é acessível a grande parte da população. Como que a gente desmistifica uma determinada desinformação, quando grande parte da população não tem acesso às ferramentas ‘pra’ compreender o uso da estatística? E aqui a gente pode pensar nas questões de correlação, por exemplo, ou de como o número em si ganha uma proporção, por uma questão de grandeza – então 90% é mais do que 20%. Quando a gente vai pensar nas eficácias, 50% é vacina, por exemplo, e como é que a gente usa essas porcentagens e o que que elas representam. Dentro de um imaginário social, esses números, como números brutos, eles têm muito mais sentido do que todo o conhecimento acumulado e organizado ‘pra’ dizer o que que é uma estatística e de que maneira a gente chega nesse número, e o que efetivamente esse número significa dentro de uma comunidade, de uma população. O próprio conceito de população, que é o conceito estatístico, né, que nasce com a Estatística, lá no século XIX, não é claro ‘pra’ grande parte das pessoas, né. Então, são vários conhecimentos acumulados que, quando a gente fala, quando nós apresentamos num determinado momento, é..., as pessoas não têm acesso a esses detalhes de como esse conhecimento é produzido”.

[MÚSICA DE TRANSIÇÃO]

O conhecimento matemático é um forte aliado no combate às *fake news* e à desinformação. Saber ler e interpretar dados é fundamental para compreender notícias e informações, além de verificar se são verdadeiras antes de acreditar nelas ou compartilhá-las.

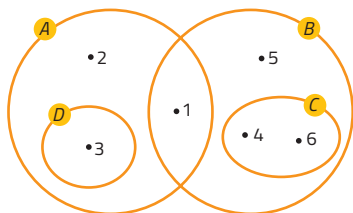
Que tal começar a usar seus conhecimentos de Matemática e Estatística para avaliar se uma notícia é fato ou *fake*?

[MÚSICA DE TRANSIÇÃO]

Créditos: Você pode ver o vídeo “MESA Redonda Int2: *fake news* e manipulação de dados estatísticos” no canal Uesb Eventos Virtuais no YouTube. Os áudios inseridos nesse *podcast* são da Freesound.

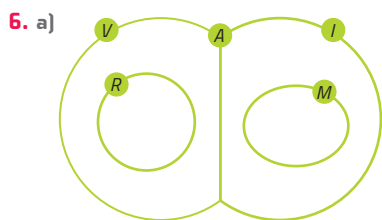
Unidade 1 • Conjuntos

- $A = \{c, h, i, k\}$, $B = \{b, c, e, f, g, j, k\}$ e $C = \{a, c, d, e, f, h\}$
- a) $A = \{2, 4, 6\}$, $B = \{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$ e $C = \{1, 4, 9, 16, 25\}$
b) Sim, A é subconjunto de B , pois todo elemento de A também é elemento de B .
- Respostas possíveis: \emptyset , $\{3, 6, 9\}$, $\{3, 6\}$, $\{3, 9\}$, $\{6, 9\}$, $\{3\}$, $\{6\}$, $\{9\}$.



- a) $D \subset A$ d) $C \subset B$
b) $B \not\subset C$ e) $\emptyset \subset D$
c) $A \not\subset B$ f) $B \not\subset D$

5. Resposta possível: $\emptyset \subset A$; $B \not\subset A$.



- b) $I \subset V$
▪ $V \subset A$ é verdadeiro, pois todo vertebrado é animal.
▪ $I \subset V$ é falso, pois nenhum invertebrado é vertebrado.
▪ $M \subset A$ é verdadeiro, pois todo molusco é invertebrado e todo invertebrado é animal; logo, todo molusco é animal.
▪ $R \subset V$ é verdadeiro, pois todo réptil é vertebrado.

c) Uma tartaruga é um réptil (R), todo réptil é vertebrado (V) e todo vertebrado é animal (A). Portanto, a tartaruga é elemento de A , V e R .

- a) Analisando as informações apresentadas na planilha, temos que: 3 funcionários são do setor de produção (Antônio, Keila e Rosana) e 2 funcionários têm idade inferior a 30 anos (Bruna e Rosana).
b) Resposta esperada: Não, pois existe um funcionário nessa faixa etária que é do setor de produção; no caso, Antônio, com 36 anos de idade.
c) Keila
d) Resposta possível: Selecionar apenas funcionários com idade inferior a 30 anos.
- Resposta pessoal.
- Considerando os conjuntos $A = \{-4, -2, 0, 2, 4\}$, $B = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ e $C = \{-2, 5, 7, 9\}$, temos:
a) $A \cup C = \{-4, -2, 0, 2, 4, 5, 7, 9\}$

- b) $C \cap A = \{-2\}$
c) $B \cap C = \emptyset$
d) $A \cap B = \{0, 2, 4\}$
 $C \cup (A \cap B) = \{-2, 0, 2, 4, 5, 7, 9\}$
e) $B - A = \{1, 3\}$
f) $B \cup C = \{-2, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 7, 9\}$
 $A - (B \cup C) = \{-4\}$
g) $A - C = \{-4, 0, 2, 4\}$
 $B \cap (A - C) = \{0, 2, 4\}$
h) $A \cup B = \{-4, -2, 0, 1, 2, 3, 4\}$
 $A \cap B = \{0, 2, 4\}$
 $(A \cup B) - (A \cap B) = \{-4, -2, 1, 3\}$

10. Alternativa b, pois a parte destacada em verde no diagrama corresponde aos elementos que pertencem aos conjuntos A ou B e não pertencem ao conjunto C , expressa por $(A \cup B) - C$.

a: $C - (A \cup B)$; c: $A \cup B$; d: C

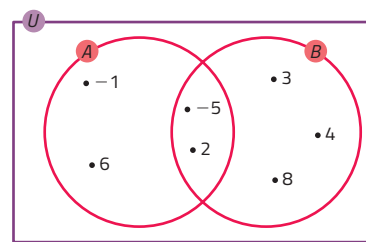
- a) F, pois $B \cup C = \{d, e, f, g, h\}$
b) V, pois $B \subset A$
c) V, pois $A = \{a, b, c, d, e\}$
d) F, pois $C \cup A = \{a, b, c, d, e, f, g, h\}$, ou seja, $n(C \cup A) = 8$
e) V, pois, como $B \subset A$, temos $C \cap A = A - B = \{a, b, c, e\}$
f) F, pois $B - A = \emptyset$

12. a) Resposta esperada: Não é possível resolver o problema, pois, considerando a relação $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$, para determinar $n(A)$, além das informações apresentadas sobre $n(A \cup B)$ e $n(A \cap B)$, ainda é necessário saber o valor de $n(B)$.

b) Resposta esperada: Para resolver o problema, é necessário conhecer, além dos dados apresentados, a quantidade de elementos do conjunto B . Assim, se considerarmos $n(B) = 21$, temos:
 $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B) \Rightarrow 31 = n(A) + 21 - 12 \Rightarrow n(A) = 22$; ou seja, se indicarmos no enunciado que o conjunto B tem 21 elementos, podemos determinar que o conjunto A tem 22 elementos.

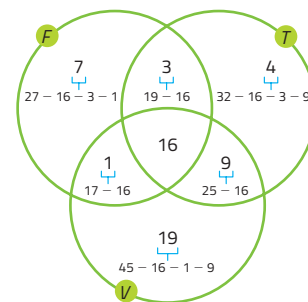
- a) Cinco regiões: Centro-Oeste, Nordeste, Norte, Sudeste e Sul. Resposta pessoal.
b) 27 unidades da Federação, sendo 26 estados e um Distrito Federal. Resposta pessoal.
c) As respostas dependem da região em que os estudantes moram.
d) Conjunto formado pelas unidades da Federação localizadas nas regiões do Brasil em que os estudantes não moram. A quantidade de elementos desse conjunto depende da região em que os estudantes moram.

14. a) Uma possível resposta:
▪ Identificar os elementos de $A \cup B$, $A - B$ e $B - A$.
▪ Determinar $B = (A \cup B) - (A - B) = \{-5, 2, 3, 4, 8\}$.
▪ Determinar $A = (A \cup B) - (B - A) = \{-5, -1, 2, 6\}$.



b) Resposta pessoal.

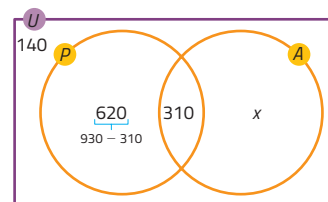
15. Considerando F , T e V os conjuntos de pessoas que estudam, respectivamente, flauta, teclado e violão, temos o seguinte diagrama de Venn:



Assim, o total de pessoas que estudam nessa escola é:

$$7 + 4 + 19 + 3 + 1 + 9 + 16 = 59 \rightarrow 59 \text{ pessoas}$$

16. Considere os conjuntos:
 P : conjunto dos sócios que usaram a piscina
 A : conjunto dos sócios que usaram a academia
No diagrama de Venn, temos:



No diagrama, x é a quantidade de sócios que utilizaram apenas a academia. Como há um total de 1450 sócios, temos:
 $620 + 310 + x + 140 = 1450 \Rightarrow x = 380$
Portanto, 380 sócios.

b) Resposta pessoal.

17. a) Diagrama de Venn com conjuntos A e B. Valores: A={98}, B={67}, A ∩ B={115}, universo={33}.

b) $98 + 115 + 67 + 33 = 313 \rightarrow 313$ estudantes

- c) ▪ Dupla Adulto (dT):
 $98 + 115 = 213 \rightarrow 213$ estudantes

▪ HPV: $67 + 115 = 182 \rightarrow$
 $\rightarrow 182$ estudantes

▪ Ambas as vacinas:
 115 estudantes

d) $98 + 115 + 67 = 280 \rightarrow$
 $\rightarrow 280$ estudantes

e) A quantidade de doses de vacina Dupla Adulto (dT) e de HPV corresponde, respectivamente, a $n(C_u^A)$ e $n(C_u^B)$, ou seja:

▪ Dupla Adulto (dT):

$67 + 33 = 100 \rightarrow 100$ vacinas

▪ HPV: $98 + 33 = 131 \rightarrow 131$ vacinas

18. $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B) \Rightarrow$
 $\Rightarrow n(A \cup B) = 35 + 49 - 23 \Rightarrow$
 $\Rightarrow n(A \cup B) = 61$
 Logo, $100 - 61 = 39 \rightarrow 39$ pessoas.

19. Elaboração do estudante. Resposta possível: Analisando os dados da tabela, determine o percentual de domicílios brasileiros que não tinham automóvel nem motocicleta em 2022. Resolução: O percentual de domicílios brasileiros que tinham automóvel ou motocicleta em 2022 é dado por $49,8\% + 25,0\% - 13,1\% = 61,7\%$. Assim, o percentual de domicílios brasileiros que não tinham automóvel nem motocicleta em 2022 é dado por $100\% - 61,7\% = 38,3\%$.

Integrando com...

1. Respostas pessoais.

2. $A - B$: É o tipo sanguíneo de indivíduos cujas hemácias apresentam apenas o antígeno A, ou seja, sangue tipo A.
 $A \cap B$: É o tipo sanguíneo de indivíduos cujas hemácias apresentam o antígeno A e o antígeno B, ou seja, sangue tipo AB.
 $B - A$: É o tipo sanguíneo de indivíduos cujas hemácias apresentam apenas o antígeno B, ou seja, sangue tipo B.
 $U - (A \cup B)$: É o tipo sanguíneo de indivíduos cujas hemácias não apresentam o antígeno A nem o antígeno B, ou seja, sangue tipo O.

3. a) Resposta esperada: Apesar de o doador apresentar em suas hemácias o mesmo antígeno B do receptor, ele também apresenta em suas hemácias o antígeno Rh (Rh+), o que o torna incompatível com o receptor, que não tem o antígeno Rh (Rh-).

b) Resposta esperada: Como o doador apresenta o mesmo antígeno A do receptor e tem ausência de antígeno Rh (Rh-) em suas hemácias, ele é compatível com o receptor.

4. a) É doador para: A+, A-, AB+ e AB-. É receptor de: A- e O-.

b)

O-	RECEBE DE	O-
	DOA PARA	O- O+ A- A+ B- B+ AB- AB+

O+	RECEBE DE	O- O+
	DOA PARA	O+ A+ B+ AB+

A-	RECEBE DE	O- A-
	DOA PARA	A- A+ AB- AB+

A+	RECEBE DE	O- O+ A- A+
	DOA PARA	A+ AB+

B-	RECEBE DE	O- B-
	DOA PARA	B- B+ AB- AB+

B+	RECEBE DE	O- O+ B- B+
	DOA PARA	B+ AB+

AB-	RECEBE DE	O- A- B- AB-
	DOA PARA	AB- AB+

AB+	RECEBE DE	O- O+ A- A+ B- B+ AB- AB+
	DOA PARA	AB+

c) Resposta esperada: O doador universal corresponde ao tipo O-, pois ele pode doar sangue a todos os tipos sanguíneos; e o receptor universal corresponde ao tipo AB+, pois ele pode receber sangue de todos os tipos sanguíneos.

5. Respostas pessoais.

20. a) $2,5 \notin \mathbb{Z}$

b) $-3 \notin \mathbb{N}$

c) $0 \in \mathbb{Z}$

d) $\frac{31}{3} \in \mathbb{Q}$

e) $54 \in \mathbb{N}$

f) $-5,8\bar{3} \notin \mathbb{Z}$

g) $9 \in \mathbb{Q}$

h) $-7,6 \in \mathbb{Q}$

21. a) $A = \{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$

b) $B = \{-1, 0, 1, 2, 3\}$

c) $A \cup B = \{-1, 0, 1, 2, 3, 4, 6, 12\}$

d) $A \cap B = \{1, 2, 3\}$

22. a) $\frac{7}{9} = 7 : 9 = 0,777... = 0,\bar{7}$

b) $\frac{26}{5} = 26 : 5 = 5,2$

c) $\frac{83}{90} = 83 : 90 = 0,9222... = 0,9\bar{2}$

d) $\frac{17}{250} = 17 : 250 = 0,068$

23. a) $0,65 = \frac{65}{100} = \frac{13}{20}$

b) $8,024 = \frac{8024}{1000} = \frac{1003}{125}$

c) $2,\bar{7} = 2,777...$

$x = 2,777...$

$10x = 27,777...$

$10x = 25 + \frac{2,777...}{x}$

$10x = 25 + x$

$9x = 25$

$x = \frac{25}{9}$

d) $3,9\bar{5} = 3,9555...$

$x = 3,9555...$

$10x = 39,555...$

$100x = 395,555...$

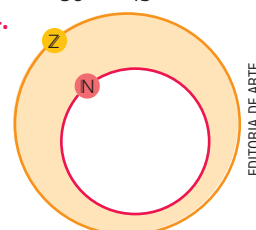
$100x = 356 + \frac{39,555...}{10x}$

$100x = 356 + 10x$

$90x = 356$

$x = \frac{356}{90} = \frac{178}{45}$

24.



Resposta: Os números inteiros negativos.

25. Respostas pessoais. Nos itens a e b, espera-se que os estudantes determinem dois números racionais e, posteriormente, outros contidos no intervalo por eles determinado. No item c, espera-se que os estudantes percebam que sempre é possível determinar um número racional compreendido entre outros dois números racionais dados. No item d, uma estratégia é determinar o número racional c como a média aritmética dos números racionais a e b.

26. a) $\frac{1}{3} + \frac{1}{2} = \frac{5}{6}$

b) $\frac{1}{2} + \frac{1}{15} = \frac{17}{30}$

c) $\frac{1}{10} + \frac{1}{3} = \frac{13}{30}$

27. alternativa c

$\frac{3}{4} = 3 : 4 = 0,75$

$0,75 \cdot 2,54 = 1,905 \rightarrow 1,905$ cm

Logo, a medida está, em centímetro, entre 1,5 e 2.

▪ Resposta esperada: Não, o comprimento do cano, por exemplo, é um dado desnecessário para a resolução desta atividade.

28. a) ▪ Para $n = 0$: $x = 2 \cdot 0 + 1 = 1$
 ▪ Para $n = 1$: $x = 2 \cdot 1 + 1 = 3$
 ▪ Para $n = 2$: $x = 2 \cdot 2 + 1 = 5$
 ▪ Para $n = 3$: $x = 2 \cdot 3 + 1 = 7$
 ▪ Para $n = 4$: $x = 2 \cdot 4 + 1 = 9$
 ▪ Para $n = 5$: $x = 2 \cdot 5 + 1 = 11$
 ...

Algumas respostas possíveis: 1; 3; 5; 7; 9; 11.

b) II

c) Os números naturais pares são os números da forma $2n$, com $n \in \mathbb{N}$. Assim, $B = \{x \mid x = 2n, \text{ com } n \in \mathbb{N}\}$.

d) Resposta esperada: Nenhum elemento, pois $A \cap B = \emptyset$, uma vez que não há número que seja simultaneamente par e ímpar.

29. $1^2 = 1; 2^2 = 4; 3^2 = 9; 4^2 = 16;$
 $5^2 = 25; 6^2 = 36; 7^2 = 49;$
 $8^2 = 64; 9^2 = 81; 10^2 = 100;$
 $11^2 = 121; 12^2 = 144$

a) Resposta pessoal.

b) número par: 342^2 e 2778^2 ; número ímpar: 1655^2 e 81^2

▪ Resposta pessoal.

c) Resposta esperada: Se um número natural é par, então seu quadrado também é par. Se um número natural é ímpar, então seu quadrado também é ímpar.

30. a) $\text{IMC (fev.)} = \frac{83,9}{1,63^2} = \frac{83,9}{2,6569} \approx 31,6$
 obesidade, pois $31,6 > 30$

b) $64,8 - 83,9 = -19,1 \rightarrow$ redução de 19,1 kg

c) $\text{IMC (nov.)} = \frac{64,8}{1,63^2} = \frac{64,8}{2,6569} \approx 24,4$

Resposta esperada: Sim, pois, para ser classificado como "peso adequado", o IMC deve estar entre $18,5 \text{ kg/m}^2$ e 25 kg/m^2 , e o IMC de Sueli, no mês de novembro, foi de aproximadamente $24,4 \text{ kg/m}^2$.

d) Resposta pessoal.

31. a) Amazonas: 13,9; Ceará: 11,6;
 Goiás: 11,4; Santa Catarina: 9,3;
 Rio de Janeiro: 12,6

b) Respostas possíveis: Sim, ao compararmos, por exemplo, a maior taxa de mortalidade calculada com a menor taxa de mortalidade calculada, há uma diferença de 4,6 óbitos de menores de 1 ano de idade, valor significativo quando expresso em números absolutos. Não, ao compararmos, por exemplo, a taxa de mortalidade do estado do Ceará com a de Goiás, com a diferença de apenas 0,2 óbito de menores de 1 ano por 1 000 nascidos vivos.

c) Resposta pessoal.

d) Resposta pessoal.

32. a) Veículo 1: $\frac{1400}{156} \approx 8,97 \text{ km/L};$
 veículo 2: $\frac{1750}{232} \approx 7,5 \text{ km/L};$
 veículo 3: $\frac{1522}{179} \approx 8,5 \text{ km/L};$
 veículo 4: $\frac{2300}{330} \approx 6,97 \text{ km/L};$
 veículo 5: $\frac{2150}{230} \approx 9,3 \text{ km/L}.$

b) Calculando 85% de $8,5 \text{ km/L}$, temos: $0,85 \cdot 8,5 = 7,225 \rightarrow 7,255 \text{ km/L}$

Comparando os resultados obtidos no item a, apenas o veículo 4 está com consumo inferior a $7,255 \text{ km/L}$ ($6,97 < 7,255$).

33. a) Ensino Fundamental – Anos Iniciais, pois $0,98 > 0,96 > 0,90$.

b) Ensino Fundamental – Anos Iniciais:

$$I = 0,98 \cdot \frac{6,2 + 5,24}{2} \Rightarrow I =$$

$$= 0,98 \cdot 5,8 \Rightarrow I = 5,684$$

Ensino Fundamental – Anos Finais:

$$I = 0,98 \cdot \frac{4,6 + 6}{2} \Rightarrow I = 0,96 \cdot 5,45 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow I = 5,232$$

Ensino Médio:

$$I = 0,90 \cdot \frac{4,5 + 3,7}{2} \Rightarrow I = 0,90 \cdot 4,1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow I = 3,690$$

▪ Resposta pessoal.

34. a) ▪ Norte:

$$\frac{17\,354\,884}{3850\,593,105} \approx 4,51 \rightarrow$$

$$\rightarrow \text{aproximadamente } 4,51 \text{ hab./km}^2$$

▪ Nordeste:

$$\frac{54\,658\,515}{1552\,175,42} \approx 35,21 \rightarrow$$

$$\rightarrow \text{aproximadamente } 35,21 \text{ hab./km}^2$$

▪ Sudeste:

$$\frac{84\,840\,113}{924\,558,341} \approx 91,76 \rightarrow$$

$$\rightarrow \text{aproximadamente } 91,76 \text{ hab./km}^2$$

▪ Sul:

$$\frac{29\,937\,706}{576\,736,822} \approx 51,91 \rightarrow$$

$$\rightarrow \text{aproximadamente } 51,91 \text{ hab./km}^2$$

Centro-Oeste:

$$\frac{16\,289\,538}{1\,606\,354,086} \approx 10,14 \rightarrow$$

$$\rightarrow \text{aproximadamente } 10,14 \text{ hab./km}^2$$

b) Resposta esperada: Sim, pois a densidade demográfica varia consideravelmente de uma região para outra do Brasil.

c) Resposta pessoal.

35. a) Irracional, pois

$$\frac{2^2}{4} < 5 < \frac{3^2}{9} \Rightarrow 2 < \sqrt{5} < 3.$$

b) Racional, pois $2\frac{1}{2} = \frac{5}{2}$.

c) Racional, pois $\sqrt[3]{-8} = -2$.

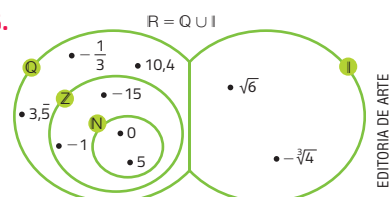
d) Irracional, pois

$$\frac{3^2}{9} < 11 < \frac{4^2}{16} \Rightarrow 3 < \sqrt[2]{11} < 4.$$

e) Racional.

f) Irracional, pois é o quociente de um número irracional (π) com um racional diferente de zero (3).

36.



EDITORIA DE ARTE

37. Resposta esperada: Considerando um triângulo equilátero ABC de lado 2 cm e D o ponto médio de \overline{BC} , que determina o triângulo retângulo ABD , com $AB = 2$, $BD = 1$ e \overline{BA} correspondente a h . Utilizando o teorema de Pitágoras no triângulo retângulo ABD , temos: $(AB)^2 = h^2 + (BD)^2 \Rightarrow 2^2 = h^2 + 1^2 \Rightarrow h^2 = 3 \Rightarrow h = \sqrt{3}$. Como 3 é um número natural, mas não é um número quadrado perfeito, temos que $\sqrt{3}$, que corresponde à medida h da altura do triângulo ABC , em centímetro, é um número irracional.

38. a) $\sqrt{24} \approx \frac{1 + 24}{2} \approx 12,5$

$$\sqrt{24} \approx \frac{2 + 12}{2} \approx 7$$

$$\sqrt{24} \approx \frac{3 + 8}{2} \approx 5,5$$

$$\sqrt{24} \approx \frac{4 + 6}{2} \approx 5$$

b) $\sqrt{24} \approx 4,898979$. Resposta esperada: Sendo $n = a \cdot b$ um número natural que não seja quadrado perfeito, quanto mais próximos entre si são a e b , melhor é a aproximação de \sqrt{n} pelo método de Herão.

c) Respostas pessoais.

39. a) $\sqrt{1} = 1; \sqrt{4} = 2; \sqrt{9} = 3; \sqrt{16} = 4$.

Como os números 1, 4, 9 e 16 são quadrados perfeitos, temos que $\sqrt{1}$, $\sqrt{4}$, $\sqrt{9}$ e $\sqrt{16}$ são classificados como racionais. De modo análogo, temos que as demais raízes correspondem a números irracionais.

b) Respostas pessoais.

c) Resposta esperada: Porque nessa espiral são formados triângulos retângulos, cujas medidas dos lados (catetos e hipotenusa) podem ser relacionadas por meio do teorema de Pitágoras.

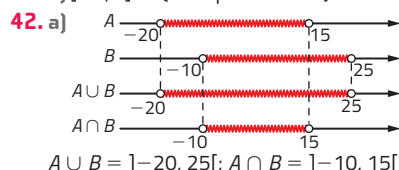


41. a) $]-\infty, -7[$ ou $\{x \in \mathbb{R} \mid x < -7\}$

b) $[-3, \sqrt{45}]$ ou $\{x \in \mathbb{R} \mid -3 \leq x \leq \sqrt{45}\}$

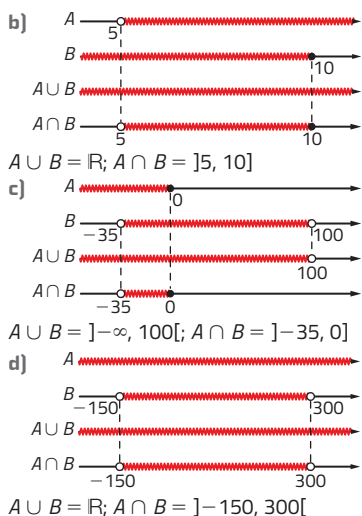
c) $\left[\frac{2}{3}, +\infty\right[$ ou $\left\{x \in \mathbb{R} \mid x \geq \frac{2}{3}\right\}$

d) $]-\pi, 0]$ ou $\{x \in \mathbb{R} \mid -\pi < x \leq 0\}$



ILUSTRAÇÕES: CBOOK PRODUÇÕES

ILUSTRAÇÕES: CBOOK PRODUÇÕES

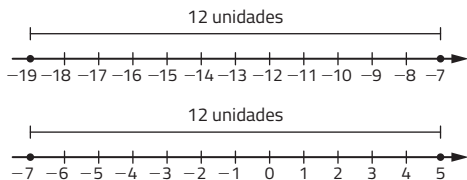


43. a) $-3 \cdot |-10| = -3 \cdot 10 = -30$
 b) $|-4| \cdot |-7| = 4 \cdot 7 = 28$
 c) $|6 - 18| = |-12| = 12$
 d) $||-10| - 15| = |10 - 15| = |-5| = 5$
 e) $|3 - 8| - |-13 + 5| = |-5| - |-8| = 5 - 8 = -3$
 f) $|2 \cdot (-8)| = |-16| = 16$

44. $\frac{7}{3} \approx 2,3$; $-4,78 \approx -4,8$; $-\frac{11}{5} = -2,2$;
 $-\sqrt[3]{35} \approx -3,3$; $\frac{\pi}{3} \approx 1$; $5,241 \approx 5,2$;
 $2\sqrt{19} \approx 8,7$; $-0,25 \approx -0,3$



45. alternativa b
 $4x + 10 = 2 \Rightarrow 4x = -8 \Rightarrow x = -2$
 Temos $-2 \in]-4, 0[$, pois $-4 < -2 < 0$.
46. Resposta pessoal. Sugestão de resposta: A alternativa c é correta apenas se $z < y$. Mas, de acordo com o enunciado, podemos ter tanto $z < y$ como $z > y$.
47. a) O ponto correspondente a x pode estar à direita ou à esquerda do ponto correspondente a -7 .



Respostas possíveis: -19 ou 5 .

- b) Respostas possíveis: $|-7 - (-19)| = 12$;
 $|-19 - (-7)| = 12$; $|5 - (-7)| = 12$; $|-7 - 5| = 12$.

48. a) entre dois números racionais
 b) Resposta esperada: Temos que $\frac{223}{71} \approx 3,140845$,
 $\pi \approx 3,141593$ e $\frac{22}{7} \approx 3,142857$.

Como $3,140845 < 3,141593 < 3,142857$, a conclusão de Arquimedes está correta, ou seja, $\frac{223}{71} < \pi < \frac{22}{7}$.

49. Elaboração do estudante. Resposta possível: Quais números podem estar sendo apresentados pelas letras a , b , c e d no diagrama?
 Resposta: $1, -2, \sqrt{3}, \frac{1}{2}$.

O que estudei

1. Respostas pessoais.
2. Resposta pessoal.
3. Respostas pessoais.
4. a) Respostas pessoais. Espera-se que os estudantes discutam a respeito do gerenciamento de bancos de dados e expressem seus conhecimentos sobre a temática, estabelecendo relações com as ideias de conjunto mobilizadas ao longo da Unidade.
 b) Respostas pessoais. Espera-se que os estudantes relacionem o conteúdo com suas vivências e discutam a respeito de diferentes tipos de estrutura de bancos de dados. Caso eles não tenham tido contato com algum tipo de banco de dados, apresente características das principais estruturas, como o banco de dados hierárquico, considerado defasado em razão da sua estrutura do tipo árvore, e o relacional, muito utilizado atualmente e que contempla relações existentes entre os dados.
 c) ■ Comparando as alturas das colunas do gráfico, podemos identificar que a categoria com a maior quantidade de livros é "aventura".

$$\begin{aligned} & \frac{10\,000}{\text{total}} - \frac{(950 + 3\,600 + 2\,350 + 1\,110 + 1\,360)}{\text{classificados}} = \\ & = 10\,000 - 9\,370 = 630 \rightarrow 630 \text{ livros} \\ & \frac{3\,600}{10\,000} = \frac{9}{25}; 0,36. \text{ Número racional.} \end{aligned}$$

- d) Sendo A e M os conjuntos formados pelos motoristas habilitados para conduzir automóveis e motocicletas, respectivamente, temos $n(A - M) = 13$ e $n(M - A) = 14$. Considerando que os 45 motoristas têm habilitação para ao menos um tipo de veículo, temos $n(A \cup B) = 45$.

Assim, segue que: $n(AM) = n(A \cup B) - n(A - M) - n(M - A) \Rightarrow$
 $\Rightarrow n(A \cap B) = 45 - 13 - 14 = 18$.

Portanto, 18 motoristas são habilitados para os dois tipos de veículo.

- e) Considere os conjuntos:

A : pessoas que foram vacinadas contra febre amarela;

B : pessoas que foram vacinadas contra sarampo. Temos:

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B) = 200 + 153 - 23 = 330$$

Como havia 400 pessoas registradas, então o número de pessoas que não haviam sido vacinadas contra sarampo nem febre amarela é:

$$400 - 330 = 70 \rightarrow 70 \text{ pessoas}$$

Praticando: Enem e Vestibulares

1. alternativa b

$$F1: \frac{18}{6} = 3 \text{ mg/dia}$$

$$F4: \frac{6}{3} = 2 \text{ mg/dia}$$

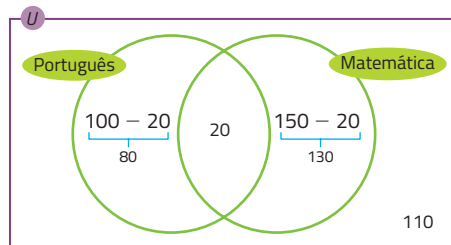
$$F2: \frac{15}{3} = 5 \text{ mg/dia}$$

$$F5: \frac{3}{2} = 1,5 \text{ mg/dia}$$

$$F3: \frac{18}{4} = 4,5 \text{ mg/dia}$$

$$1,5 < 2 < 3 < 4,5 < 5$$

2. alternativa b



$$80 + 20 + 130 + 110 = 340$$

ILUSTRAÇÕES:
EDITORIA DE ARTE

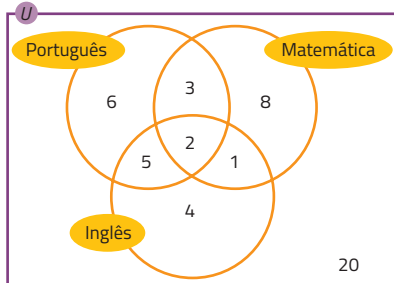
3. alternativa d
 A^c é o conjunto dos números maiores ou iguais a 250.
 B^c é o conjunto dos números naturais que não são múltiplos de 4.
 C^c é o conjunto dos números ímpares.
 Logo, $33 \notin A^c$, $33 \in B^c$ e $33 \in C^c$.
 Assim, $33 \in (B^c \cup C^c)$, e do mesmo modo $33 \in (A^c \cap B^c) \cup (B^c \cap C^c)$.

4. alternativa e
 1,35 bilhão = 1 350 milhão =
 = 1 350 000 mil = 1 350 000 000

5. alternativa c
 Do enunciado, temos que $x \in A$, $x \in C$ e $x \notin B$. Assim, $x \in A \cap C$.

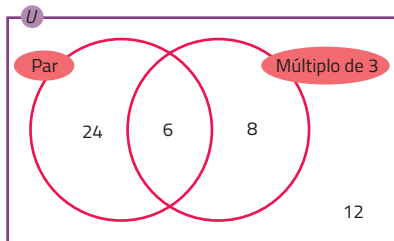
6. alternativa e
 Multiplicando-se os elementos de A pelos elementos de B e excluindo-se as repetições, temos: $C = \{-1, -2, -3, -4, -5, -6, -8, -9, -10, -12, -15, -16, -20, -25\}$, ou seja, 14 elementos.

7. alternativa e
 Não obtiveram nota mínima em Matemática e Português: $5 - 3 = 2$.
 Não obtiveram nota mínima em Matemática e Inglês: $3 - 2 = 1$.
 Não obtiveram nota mínima em Inglês e Português: $7 - 2 = 5$.
 Não obtiveram nota mínima em Matemática: $14 - (3 + 2 + 1) = 8$.
 Não obtiveram nota mínima em Português: $16 - (3 + 2 + 5) = 6$.
 Não obtiveram nota mínima em Inglês: $12 - (1 + 2 + 5) = 4$.



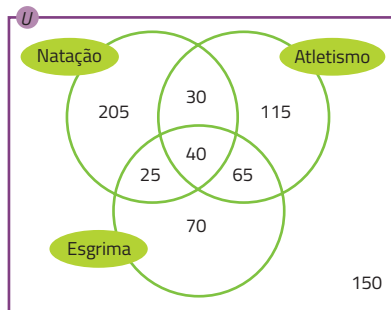
Participaram do concurso: $6 + 3 + 5 + 2 + 1 + 8 + 4 + 20 = 49 \rightarrow 49$.

8. alternativa b
 12 pessoas escolherem números primos. Todos são ímpares e maiores que 3, pelo enunciado, e nenhum deles é múltiplo de 3, por ser primo.
 30 pessoas escolherem um número par e 14 escolheram múltiplo de 3. Os múltiplos de 6 são também múltiplos de 3. Assim, na interseção entre números pares e múltiplos de 3, estão os múltiplos de 6, como no diagrama a seguir.



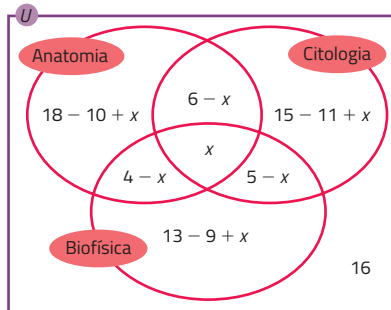
Pares ou múltiplos de 3:
 $24 + 6 + 8 = 38$
 Ímpares não múltiplo de 3:
 $64 - 38 = 26$

9. alternativa b
 Como $1 \text{ m} = 10 \text{ dm}$, temos:
 $843 \text{ dm} = 84,3 \text{ m}$.
 Como $1 \text{ km} = 1000 \text{ m}$, temos:
 $35 \text{ km} = 35000 \text{ m}$.
10. alternativa c
 Praticam apenas atletismo e esgrima:
 $105 - 40 = 65$.
 Praticam apenas natação e esgrima:
 $65 - 40 = 25$.
 Praticam apenas natação e atletismo:
 $70 - 40 = 30$.
 Praticam apenas esgrima:
 $200 - (65 + 25 + 40) = 70$.
 Praticam apenas atletismo:
 $250 - (30 + 65 + 40) = 115$.
 Praticam apenas natação:
 $300 - (25 + 30 + 40) = 205$.



Entrevistados: $65 + 30 + 40 + 25 + 70 + 115 + 205 + 150 = 700$

11. alternativa e
 Sendo x a quantidade de alunos que cursam as três disciplinas, temos:



$16 + 18 - 10 + x + 13 - 9 + x + 15 - 11 + x + 4 - x + x + 5 - x + 6 - x = 50 \Rightarrow x = 3$
 Alunos que cursam exatamente duas disciplinas:
 $4 - 3 = 1$; $6 - 3 = 3$; $5 - 3 = 2$.
 Total: $1 + 3 + 2 = 6$.

12. alternativa a
 Distrito Federal: $\frac{10800}{2650} \approx 4,08$
 Minas Gerais: $\frac{40400}{19900} \approx 2,03$

São Paulo: $\frac{110450}{41900} \approx 2,64$

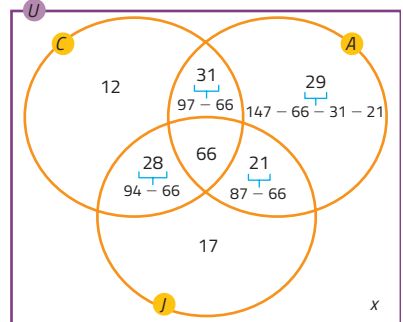
Sergipe: $\frac{3000}{2120} \approx 1,42$

Piauí: $\frac{3300}{3140} \approx 1,05$

13. alternativa e
 Considerando que todos os melhores amigos de Eduardo estão entre seus amigos, temos que $M \subset E$. Além disso, como nem todos os melhores amigos de Eduardo foram à festa, temos que $M \not\subset F$. O único diagrama que apresenta simultaneamente essas relações é o item e.

14. alternativa e
 Área ocupada às 10 horas, em m^2 :
 $500 \cdot 500 = 250000$
 Quantidade de pessoas às 10 horas da manhã:
 $250000 \cdot 4 = 1000000$
 Quantidade de pessoas às 4 horas da tarde:
 $1000000 + 6 \cdot 120000 = 1720000$
 Assim, a quantidade necessária de policiais é:
 $\frac{1720000}{2000} = 860 \rightarrow 860$ policiais

15. Considerando C , A e J os conjuntos dos funcionários que ingerem algum tipo de proteína animal, respectivamente, no café da manhã, no almoço e no jantar, temos o seguinte diagrama de Venn:



Assim, o número x de funcionários que não se alimentam com proteína animal em nenhuma das refeições é dado por:
 $12 + 29 + 17 + 31 + 28 + 21 + 66 + x = 260 \Rightarrow x = 56 \rightarrow 56$ funcionários

16. alternativa b
 $200 + 150 - 70 = 280$
 $500 - 280 = 220$
 $\frac{220}{500} = 0,44 \rightarrow 44\%$

Unidade 2 • Relações entre grandezas e noção de função

1. a) massa; 8500
 • Toneladas (t) e kilogramas (kg) correspondem a medidas de massa.
 • $8,5 \text{ t} = 8,5 \cdot \frac{1 \text{ t}}{1000 \text{ kg}} = 8,5 \cdot 1000 \text{ kg} = 8500 \text{ kg}$

b) comprimento; 90 000

- Metros (m) e quilômetros (km) correspondem a medidas de comprimento.
- $90 \text{ km} = 90 \cdot \frac{1 \text{ km}}{1000 \text{ m}} = 90 \cdot 1000 \text{ m} = 90\,000 \text{ m}$

c) tempo; 3

- Segundos (s) e horas (h) correspondem a medidas de tempo.
- $10800 \text{ s} = 10800 \cdot \frac{1 \text{ s}}{60 \text{ min}} = 10800 \cdot \frac{1 \text{ min}}{60 \text{ h}} = 180 \cdot \frac{1 \text{ h}}{60} = 3 \text{ h}$

d) comprimento; 0,07

- Decímetros (dm) e milímetros (mm) correspondem a medidas de comprimento.
- $7 \text{ mm} = 7 \cdot \frac{1 \text{ mm}}{0,01 \text{ dm}} = 7 \cdot 0,01 \text{ dm} = 0,07 \text{ dm}$

e) massa; 1,65

- Kilogramas (kg) e gramas (g) correspondem a medidas de massa.
- $1650 \text{ g} = 1650 \text{ g} \cdot \frac{1 \text{ g}}{1000 \text{ kg}} = 1650 \cdot \frac{1}{1000} \text{ kg} = 1,65 \text{ kg}$

f) tempo; 252

- Minutos (min) e segundos (s) correspondem a medidas de tempo.
- $4,2 \text{ min} = 4,2 \cdot \frac{1 \text{ min}}{60 \text{ s}} = 4,2 \cdot 60 \text{ s} = 252 \text{ s}$

2. a) $4 \text{ TB} = 4 \cdot \frac{1 \text{ TB}}{1024 \text{ GB}}$

$$= 4 \cdot 1024 \text{ GB} = 4096 \text{ GB}$$

$$\text{b) } 512 \text{ B} = 512 \cdot \frac{1 \text{ B}}{1024 \text{ kB}} = 512 \cdot \frac{1}{1024} \text{ kB} = 0,5 \text{ kB}$$

$$\text{c) } 3072 \text{ kB} = 3072 \cdot \frac{1 \text{ kB}}{1024 \text{ MB}} = 3072 \cdot \frac{1}{1024} \text{ MB} = 3 \text{ MB}$$

$$\text{d) } 0,5 \text{ GB} = 0,5 \cdot \frac{1 \text{ GB}}{1024 \text{ MB}} = 0,5 \cdot 1024 \cdot \frac{1 \text{ MB}}{1024 \text{ kB}} = 512 \cdot 1024 \text{ kB} = 524\,288 \text{ kB}$$

3. Capacidade total em MB: $2 \text{ GB} = 2 \cdot \frac{1 \text{ GB}}{1024 \text{ MB}} = 2 \cdot 1024 \text{ MB} = 2048 \text{ MB}$

Total não utilizado:

$$2048 - 1460 = 588 \rightarrow 588 \text{ MB}$$

Portanto, Jean ainda pode armazenar 147 arquivos de fotografia de 4 MB, pois $588 : 4 = 147$.

$$4. \text{ a) } A: d = \frac{m}{v} \Rightarrow d = \frac{384}{160} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow d = 2,4 \rightarrow 2,4 \text{ g/cm}^3$$

$$\text{b) } B: d = \frac{m}{v} \Rightarrow 7,9 = \frac{2,8}{v} \Rightarrow$$

$$v = \frac{2,8}{7,9} \Rightarrow v \approx 0,35 \rightarrow$$

$$\rightarrow \text{aproximadamente } 0,35 \text{ cm}^3$$

$$\text{c) } C: d = \frac{m}{v} \Rightarrow 8,4 = \frac{m}{5} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow m = 42 \rightarrow 42 \text{ g}$$

5. a) comprimento: diâmetro e distância média do Sol; tempo: período orbital e período de rotação; temperatura: temperatura de superfície

b) hectometro: $6792 \text{ km} =$

$$= 6792 \cdot \frac{1 \text{ km}}{10 \text{ hm}} = 6792 \cdot 10 \text{ hm} =$$

$$= 67920 \text{ hm}$$

$$\text{metro: } 6792 \text{ km} = 6792 \cdot \frac{1 \text{ km}}{1000 \text{ m}} =$$

$$= 6792 \cdot 1000 \text{ m} = 6792000 \text{ m}$$

$$\text{centimetro: } 6792 \text{ km} =$$

$$= 6792000 \text{ m} =$$

$$= 6792000 \cdot \frac{1 \text{ m}}{100 \text{ cm}} =$$

$$= 6792000 \cdot 100 =$$

$$= 679200000 \text{ cm}$$

$$\text{c) } 25 - (-125) = 25 + 125 =$$

$$= 150 \rightarrow 150^\circ \text{C}$$

$$\text{d) } 0,62 \text{ h} = 0,62 \cdot \frac{1 \text{ h}}{60 \text{ min}} =$$

$$= 0,62 \cdot 60 \text{ min} = 37,2 \text{ min}$$

$$\text{e) } 0,2 \text{ min} = 0,2 \cdot \frac{1 \text{ min}}{60 \text{ s}} =$$

$$= 0,2 \cdot 60 \text{ s} = 12 \text{ s}$$

$$\text{Assim: } 24,62 \text{ h} = 24\text{h}37,2\text{min} =$$

$$= 24\text{h}37\text{min}12\text{s}$$

e) Respostas pessoais. Espera-se que os estudantes pesquisem informações como diâmetro, distância média do Sol, período de rotação, temperatura da superfície, número de satélites e outras referentes ao planeta escolhido. É importante que, nas anotações, estejam indicadas as unidades de medidas de cada uma dessas informações e que eles registrem as fontes das pesquisas.

6. a) rotação e translação

b) Grandeza: velocidade; Unidade de medida: quilometro por hora (km/h).

c) Resposta esperada: Como o movimento de rotação da Terra tem duração aproximada de 24 h, podemos multiplicar esse valor pela medida da velocidade de rotação da Terra, que é de aproximadamente 1675 km/h , para estimar a medida do comprimento da linha do equador em 40200 km ($1675 \cdot 24 = 40200$).

7. A densidade da mistura homogênea (d_T) é dada pela média aritmética ponderada das densidades de cada líquido (d_A e d_B), considerando o volume correspondente deles (V_A e V_B , com $V_A + V_B = V_T$). Assim, temos:

$$d_T = \frac{d_A \cdot V_A + d_B \cdot V_B}{V_T} = \frac{0,9 \cdot 500 + d_B \cdot 500}{1000} = \frac{0,9 + d_B}{2}$$

Calculando a densidade do objeto (d_o), temos:

$$d_o = \frac{180}{100} = 1,8 \rightarrow 1,8 \text{ g/cm}^3$$

Como o objeto sólido flutuou na mistura homogênea, a densidade do objeto é menor ou igual a da mistura. Assim, segue que:

$$\frac{0,9 + d_B}{2} \geq 1,8 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 0,9 + d_B \geq 3,6 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow d_B \geq 3,6 - 0,9 \Rightarrow d_B \geq 2,7$$

Resposta: $2,7 \text{ g/cm}^3$.

8. a) Como $1 \text{ mm} = 10^6 \text{ nm}$, temos:

$$\text{dimensão mínima: } \frac{10}{10^6} =$$

$$= 10^{-5} \text{ mm ou } 0,00001 \text{ mm}$$

dimensão máxima:

$$\frac{300}{10^6} = \frac{3 \cdot 10^2}{10^6} = 3 \cdot 10^{-4} \text{ mm}$$

ou $0,0003 \text{ mm}$

De $0,00001 \text{ mm}$ ou 10^{-5} mm até $0,0003 \text{ mm}$ ou $3 \cdot 10^{-4} \text{ mm}$.

$$\text{b) } 4,8 \cdot 0,000025 = 0,00012 \rightarrow$$

$$\rightarrow 0,00012 \text{ mm}$$

$$0,00012 \cdot 10^6 = 120 \rightarrow 120 \text{ nm}$$

c) menor tamanho médio de uma bactéria:

$$10 \cdot 10 \text{ nm} = 100 \text{ nm}$$

Convertendo essa medida para milímetro, temos:

$$\frac{100}{10^6} = \frac{1 \cdot 10^2}{10^6} = 1 \cdot 10^{-4} \text{ mm}$$

ou $0,0001 \text{ mm}$

Convertendo essa medida para metro, temos:

$$\frac{1 \cdot 10^{-4}}{10^3} = 1 \cdot 10^{-7} \text{ m}$$

ou $0,0000001 \text{ m}$

maior tamanho médio de uma bactéria: $15 \cdot 300 \text{ nm} = 4500 \text{ nm}$
Convertendo essa medida para milímetro, temos:

$$\frac{4500}{10^6} = \frac{4,5 \cdot 10^3}{10^6} =$$

$$= 4,5 \cdot 10^{-3} \text{ mm ou } 0,0045 \text{ mm}$$

Convertendo essa medida para metro, temos:

$$\frac{4,5 \cdot 10^{-3}}{10^3} = 4,5 \cdot 10^{-6} \text{ m}$$

ou $0,0000045 \text{ m}$

De $0,0000001 \text{ m}$ (10^{-7} m) até $0,0000045 \text{ m}$ ($4,5 \cdot 10^{-6} \text{ m}$).

$$9. 275 \text{ MB} = 275 \cdot \frac{1 \text{ MB}}{8 \text{ Mb}} = 275 \cdot 8 \text{ Mb} = 2200 \text{ Mb}$$

Tamanho do arquivo (Mb)	Tempo (s)
50	1
2200	x

$$\frac{50}{2200} = \frac{1}{x} \Rightarrow 50x = 2200 \Rightarrow x = 44 \rightarrow 44 \text{ s}$$

10. Total de espaço ocupado pelos arquivos em GB:

$$\frac{800 + 210}{1024} + 9 + 12 = \frac{1010}{1024} + 21 \approx 22 \rightarrow$$

\rightarrow aproximadamente 22 GB

Vamos analisar cada item e verificar se o espaço é suficiente para fazer o backup.

a) Insuficiente, pois é necessário quase 22 GB.

b) Suficiente, pois 1 TB equivale a 1024 GB.

c) Suficiente, pois os 5 DVDs comportam $\frac{23,5 \text{ GB}}{5 \cdot 4,7}$.

d) Suficiente, pois $32 \text{ GB} > 22 \text{ GB}$.

e) Insuficiente, pois cada CD tem menos de 1 GB de capacidade; assim, 10 CDs comportam menos de 10 GB.

Portanto, ela poderá escolher os dispositivos das alternativas b, c ou d.

11. a) Resposta pessoal. Espera-se que os estudantes concluam que existem algumas possibilidades, como armazenar os dados em nuvem e excluir do smartphone ou tablet e desinstalar aplicativos que não são utilizados com frequência.

b) Atividade de elaboração do estudante. Espera-se que as questões abordem medidas de capacidade de armazenamento de dados e conversões entre elas. Por exemplo, pode-se compor uma atividade em que um smartphone tenha certa capacidade de armazenamento e esteja com parte dela ocupada; deseja-se baixar um aplicativo cujo tamanho está dado em outra unidade; pode-se propor que se verifique a viabilidade desse download.

12. a)

Tamanho do arquivo (Mb)	Tempo (s)
x	49
24	1

$$\frac{x}{24} = \frac{49}{1} \Rightarrow x = 24 \cdot 49 = 1176 \rightarrow 1176 \text{ Mb}$$

$$1176 \text{ Mb} = \frac{1176}{8} \text{ MB} = 147 \text{ MB}$$

Portanto, 1176 Mb ou 147 MB.

b)

Tamanho do arquivo (Mb)	Tempo (s)
40	1
1176	x

$$\frac{40}{1176} = \frac{1}{x} \Rightarrow 40x = 1176 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = 29,4 \rightarrow 29,4 \text{ s}$$

Portanto, o tempo estimado seria 29,4 s.

13. a) Resposta esperada: O desenvolvimento de tecnologias e recursos voltados à preservação do meio ambiente, especialmente o armazenamento de dados em nuvem.

Respostas esperadas: Permite que arquivos digitais sejam armazenados em servidores especializados e possam ser acessados a qualquer momento. Possibilita reduzir a geração de resíduos eletrônicos, diminuir as emissões de CO_2 e poupar o uso de papel para impressão de documentos.

b) Convertendo 10 GB em kB, temos:

$$10 \text{ GB} = 10 \cdot 1024 \text{ MB} = 10240 \text{ MB} = 10240 \cdot 1024 \text{ kB} = 10485760 \text{ kB}$$

Assim, a quantidade de papel correspondente a 10 GB é:

$$\frac{10485760}{80} = 131072 \rightarrow$$

$\rightarrow 131072$ páginas de papel

$$c) 15 \text{ GB} = 15 \cdot 1024 \text{ MB} = 15360 \text{ MB} = 15360 \cdot 8 \text{ Mb} = 122880 \text{ Mb}$$

$$4 \text{ min} = 4 \cdot 60 \text{ s} = 240 \text{ s}$$

Como foram transferidos 122880 Mb em 240 s, temos que a taxa de transferência foi:

$$\frac{122880}{240} = 512 \rightarrow 512 \text{ Mbps}$$

d) Resposta pessoal. Espera-se que os estudantes compreendam a importância do armazenamento de dados em nuvem para a agilidade do compartilhamento de dados no dia a dia das empresas, para a facilidade de acesso e produção conjunta de documentos entre diferentes pessoas, para a diminuição do risco de perda de arquivos importantes e para a preservação do meio ambiente num futuro mais sustentável.

14. Como a cada 1 t economiza-se 450 L de água, temos:

$$1000000 \cdot 450 = 450000000 \text{ L}$$

15. 3,8 km: $d = 3,8 \Rightarrow$

$$\Rightarrow t = 5,50 + 0,25 \cdot 3,8 =$$

$$= 6,45 \rightarrow \text{R\$ } 6,45$$

$$5 \text{ km: } d = 5 \Rightarrow t = 5,50 + 0,25 \cdot 5 = 6,75 \rightarrow \text{R\$ } 6,75$$

$$\begin{aligned} & \bullet 6,5 \text{ km: } d = 6,5 \Rightarrow \\ & \Rightarrow t = 5,50 + 0,25 \cdot 6,5 = \\ & = 7,125 \rightarrow \text{R\$ } 7,12 \end{aligned}$$

$$\bullet 10 \text{ km: } d = 10 \Rightarrow t = 5,50 + 0,25 \cdot 10 = 8 \rightarrow \text{R\$ } 8,00$$

$$\bullet 12 \text{ km: } d = 12 \Rightarrow t = 5,50 + 0,25 \cdot 12 = 8,5 \rightarrow \text{R\$ } 8,50$$

Deslocamento (km)	Taxa de entrega (em reais)
3,8	6,45
5	6,75
6,5	7,12
10	8
12	8,5

$$16. a) x = 12 \Rightarrow v = 3,90 \cdot 2 \cdot 12^2 = 1123,2 \rightarrow \text{R\$ } 1.123,20$$

$$b) v = 1755 \Rightarrow 3,90 \cdot 2x^2 = 1755 \Rightarrow 7,8x^2 = 1755 \Rightarrow x^2 = 225$$

A largura x deve ser um número positivo; logo:

$$\bullet x = \sqrt{225} = 15 \rightarrow 15 \text{ m (largura)}$$

$$\bullet 2x = 2 \cdot 15 = 30 \rightarrow 30 \text{ m (comprimento)}$$

17. a) perímetro: $p = 4x$

$$\bullet \text{ área: } a = x^2$$

- b) perímetro: $x = 5 \Rightarrow$

$$\Rightarrow p = 4 \cdot 5 = 20 \rightarrow 20 \text{ cm}$$

$$\bullet \text{ área: } x = 5 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a = 5^2 = 25 \rightarrow 25 \text{ cm}^2$$

- c) $p = 56 \Rightarrow 4x = 56 \Rightarrow x = 14$

$$\bullet a = 144 \Rightarrow x^2 = 144$$

A medida x deve ser um número positivo; então, $x = \sqrt{144} = 12$.

18. Preço, em reais, por grama de comida

$$\text{servida: } \frac{63}{1000} = 0,063$$

Sendo p a quantia paga e m a massa, em grama, temos: $p = 0,063m$.

19. a) Sim. Algumas respostas possíveis:

$$c = \frac{120t}{100}; c = \frac{12t}{10}; c = \frac{6t}{5}$$

$$b) t = 8 \Rightarrow c = \frac{1200}{1000} \cdot 8 = 9,6 \rightarrow$$

$\rightarrow 9,6 \text{ kWh}$

$$c) c \leq 7,2 \Rightarrow \frac{1200}{1000} \cdot t \leq 7,2 \Rightarrow t \leq 6$$

Logo, pode ser usado por, no máximo, 6 h.

$$d) \text{ televisor: } c = \frac{90t}{1000};$$

$$\text{computador: } c = \frac{300t}{1000};$$

$$\text{aspirador de pó: } c = \frac{600t}{1000};$$

$$\text{condicionador de ar: } c = \frac{1400t}{1000};$$

$$\text{micro-ondas: } c = \frac{2000t}{1000}$$

Resposta pessoal. Espera-se que os estudantes identifiquem as potências de alguns aparelhos eletrônicos de suas

residências e utilizem a mesma estratégia dos itens **a** e **b** para definir as funções que relacionam o consumo de energia e o tempo de uso.

20. alternativa b

Custo, em reais, por aluno no laboratório **A**:

$$\frac{180\,000 + 60\,000 \cdot 4}{100} = 4\,200$$

Custo, em reais, por aluno no laboratório **B**:

$$\frac{120\,000 + 16\,000 \cdot 4}{80} = 2\,300$$

$$\text{Diferença: } 4\,200 - 2\,300 = 1\,900 \rightarrow 1,90 \text{ mil reais}$$

21. Tipo A:

$$c = \frac{180\,000 + 60\,000 \cdot t}{100}$$

$$\Rightarrow c = 1\,800 + 600t$$

Tipo **B**:

$$c = \frac{120\,000 + 16\,000 \cdot t}{80}$$

$$\Rightarrow c = 1\,500 + 200t$$

22. a) Resposta esperada:

- Sapos e gafanhotos:

Quantidade de gafanhotos	Quantidade de sapos
800	30
g	s

$$\frac{800}{g} = \frac{30}{s} \Rightarrow 800s = 30g \Rightarrow$$

$$\Rightarrow s = \frac{3}{80}g$$

- Gafanhotos e plantas de capim:

Quantidade de plantas de capim	Quantidade de gafanhotos
5\,000	800
c	g

$$\frac{5\,000}{c} = \frac{800}{g} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 5\,000g = 800c \Rightarrow g = \frac{4}{25}c$$

b) Utilizando a relação $s = \frac{3}{80}g$ entre sapos e gafanhotos, temos: $g = 560 \Rightarrow$

$$\Rightarrow s = \frac{3}{80} \cdot 560 = 21 \rightarrow 21 \text{ sapos}$$

c) Utilizando a relação $g = \frac{4}{25}c$ entre gafanhotos e plantas de capim, temos:

$$g = 1\,000 \Rightarrow \frac{4}{25}c = 1\,000 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow c = 6\,250 \rightarrow 6\,250 \text{ plantas de capim}$$

d) Resposta pessoal. Espera-se que os estudantes identifiquem uma ação do homem que causa desequilíbrio

ambiental, como a realização de queimadas, e promovam discussões que visem identificar meios de atenuar ou eliminar tais práticas e contribuir para a preservação do meio ambiente. Os estudantes podem trazer informações, por exemplo, sobre o aumento no número de queimadas em diversas áreas do território brasileiro nos últimos anos e as consequências dessa ação para o futuro do meio ambiente.

23. alternativa b

$$35 - 25 = 10$$

$$\frac{10}{5} = 2 \rightarrow \text{R\$ 2,00 por metro quadrado}$$

pintado

$$25 + 2 \cdot 150 = 25 + 300 = 325 \rightarrow \text{R\$ 325,00}$$

24. Como são cobrados R\\$ 2,00 por metro quadrado, mais R\\$ 25,00 de taxa fixa, temos:

$$v = 2a + 25$$

25. a) $150 \cdot 7 + 110 = 1\,050 + 110 = 1\,160 \rightarrow \text{R\$ 1.160,00}$

b) Como são cobrados R\\$ 150,00 por diária mais R\\$ 110,00 de taxas, temos:

$$v = 150d + 110$$

$$c) 860 = 150d + 110 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 860 - 110 = 150d \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 750 = 150d \Rightarrow$$

$$\Rightarrow d = \frac{750}{150} = 5 \rightarrow 5 \text{ dias}$$

26. a) De acordo com a 2ª coluna e a 2ª linha da anotação, 216 mL.

b) De acordo com as anotações, a água enche o recipiente a uma velocidade de 18 mL por minuto, pois $\frac{90}{5} = \frac{216}{12} =$

$$= \dots = \frac{810}{45} = 18; \text{ logo, a expressão que}$$

relaciona q e t é dada por $q = 18t$.

c) $t = 60 \Rightarrow q = 18 \cdot 60 \Rightarrow q = 1\,080$
Indica que após 60 min de gotejamento havia 1\,080 mL de água no recipiente.

$$d) q = 4\,320 \Rightarrow 18t = 4\,320 \Rightarrow t = 240$$

$$240 \text{ min} = \frac{240}{60} \text{ h} = 4 \text{ h}$$

Portanto, o reparo foi feito após 4 h.

27. Respostas pessoais. Espera-se que os estudantes estabeleçam relações algébricas entre os elementos das tabelas nutricionais e a quantidade de alimento a ser ingerida. Eles podem elaborar, por exemplo, uma atividade relacionando a quantidade de determinado elemento da tabela nutricional a cada grama de alimento ingerida.

28. alternativas a e d

a) É função, pois para cada elemento de A corresponde um único elemento de B .

b) Não é função, pois o elemento $-4 \in A$ está associado a dois elementos em B : -3 e -2 .

c) Não é função, pois o elemento $-2 \in A$ não está associado a nenhum elemento em B .

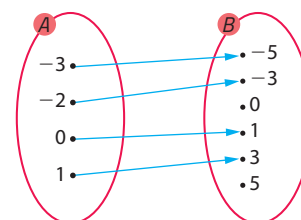
d) É função, pois para cada elemento de A corresponde um único elemento de B .

29. a) $f(-3) = 2 \cdot (-3) + 1 = -5$

▪ $f(-2) = 2 \cdot (-2) + 1 = -3$

▪ $f(0) = 2 \cdot 0 + 1 = 1$

▪ $f(1) = 2 \cdot 1 + 1 = 3$



$$D(f) = \{-3, -2, 0, 1\};$$

$$CD(f) = \{-5, -3, 0, 1, 3, 5\};$$

$$Im(f) = \{-5, -3, 1, 3\}.$$

30. a) $g(3) = 3 \cdot 3 + 5 = 14$

b) $g(0) = 3 \cdot 0 + 5 = 5$

c) $g(10) = 3 \cdot 10 + 5 = 35$

d) $g(5) = 3 \cdot 5 + 5 = 20$

▪ Resposta pessoal. Espera-se que os estudantes sejam capazes de apresentar uma função indicando seu domínio, contradomínio e lei de formação e que possam determinar valores da imagem a partir da atribuição dos valores do domínio, a lei de formação.

31. alternativas b e c

a) Não corresponde, pois

$$h(0) = 22 + 0 = 22 \rightarrow 22 \notin B.$$

b) Corresponde, pois $f(x) = 5 - x$ associa para cada elemento em A um único elemento em B :

▪ $f(-15) = 5 - (-15) = 20$

▪ $f(-8) = 5 - (-8) = 13$

▪ $f(-2) = 5 - (-2) = 7$

▪ $f(0) = 5 - 0 = 5$

▪ $f(4) = 5 - 4 = 1$

▪ $f(5) = 5 - 5 = 0$

c) Corresponde, pois $m(x) = x + 15$ associa para cada elemento em A um único elemento em B :

▪ $m(-15) = (-15) + 15 = 0$

▪ $m(-8) = (-8) + 15 = 7$

▪ $m(-2) = (-2) + 15 = 13$

▪ $m(0) = 0 + 15 = 15$

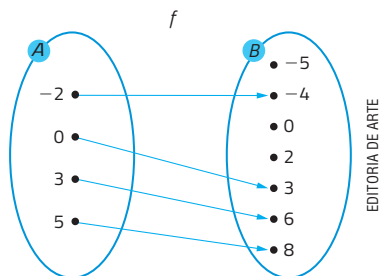
▪ $m(4) = 4 + 15 = 19$

▪ $m(5) = 5 + 15 = 20$

d) Não corresponde, pois $g(0) = -1 - 0 = -1 \notin B$.

e) Não corresponde, pois $p(-8) = -(-8) = 8 \notin B$.

32. Uma resposta possível:



33. a) ■ Como $2000,00 \leq 2112,00$, esse contribuinte é isento de cobrança do IRPF.
 ■ Como $2112,01 \leq 2500,00 < 2826,65$, a alíquota desse contribuinte será de 7,5% com dedução de R\$ 158,40:
 $0,075 \cdot 2500,00 - 158,40 = 29,10 \rightarrow \text{R\$ } 29,10$.
 ■ Como $2826,66 \leq 3200,00 < 3751,05$, a alíquota desse contribuinte será de 15% com dedução de R\$ 370,40:
 $0,15 \cdot 3200,00 - 370,40 = 109,60 \rightarrow \text{R\$ } 109,60$.

b) Sendo r o salário e $f(r)$ o valor a ser pago, temos:

- Para $\text{R\$ } 2.826,66 \leq r \leq \text{R\$ } 3.751,05$, temos alíquota de 15% e R\$ 370,40 de dedução:
 $f(r) = 0,15r - 370,40$
- Para $\text{R\$ } 3.751,06 \leq r \leq \text{R\$ } 4.664,68$, temos alíquota de 22,5% e R\$ 651,73 de dedução:
 $f(r) = 0,225r - 651,73$
- Para $r \geq \text{R\$ } 4.664,68$, temos alíquota de 27,5% e R\$ 884,96 de dedução:
 $f(r) = 0,275r - 884,96$

$$c) f(r) = \begin{cases} 0, & \text{se } r \leq 2112,00 \\ 0,075r - 158,40, & \text{se } 2112,01 \leq r \leq 2826,65 \\ 0,15r - 370,40, & \text{se } 2826,66 \leq r \leq 3751,05 \\ 0,225r - 651,73, & \text{se } 3751,06 \leq r \leq 4664,68 \\ 0,275r - 884,96, & \text{se } r > 4664,68 \end{cases}$$

d) Como $f(r) = 0,275r - 884,96$, se $r > 4664,68$, segue que:
 $f(5000,00) = 0,275 \cdot 5000,00 - 884,96 = 490,04 \rightarrow f(5000) = 490,04$.

Esse cálculo indica que um contribuinte, cuja renda mensal é R\$ 5.000,00, paga R\$ 490,04 de IRPF.

e) Resposta pessoal. Espera-se que os estudantes identifiquem algumas profissões que têm piso salarial, como as de professor, enfermeiro, metalúrgico, médico anestesiológista, advogado, arquiteto, contador, dentista e jornalista, e, a partir disso, sejam capazes de calcular o IRPF referente ao piso da profissão escolhida. Para isso, eles podem utilizar a função cuja lei de formação foi determinada no item c.

Integrando com...

- a) *Upload*, que significa "subir" em tradução simples, é a ação de transferir dados de um terminal local para um sistema remoto. E *download*, que significa "baixar" em tradução simples, corresponde ao ato de transferir dados de um sistema remoto para um terminal local.
 b) Resposta pessoal. Espera-se que os estudantes apliquem os significados de *upload* e *download* na composição da frase. Por exemplo, eles podem escrever sobre o *download* de um aplicativo e sobre o *upload* de fotografias do celular para a nuvem.
- Temos as seguintes equivalências:

$$4 \text{ MB} = 32 \text{ Mb} = 32768 \text{ kb}$$

- Em uma velocidade de 56 kbps:

Tamanho do arquivo (kb)	Tempo (s)
56	1
32768	x

$$\frac{56}{32768} = \frac{1}{x} \Rightarrow 56x = 32768 \Rightarrow x \approx 585 \rightarrow \rightarrow \text{aproximadamente } 585 \text{ s}$$

- Em uma velocidade de 10 Mbps:

Tamanho do arquivo (Mb)	Tempo (s)
10	1
32	x

$$\frac{10}{32} = \frac{1}{x} \Rightarrow 10x = 32 \Rightarrow x = 3,2 \rightarrow 3,2 \text{ s}$$

- Resposta esperada: A medição **1** está de acordo com a regulamentação estabelecida pela Anatel, uma vez que a velocidade aferida de *download* e *upload* é maior que a velocidade da conexão contratada. A medição **2** não está de acordo com a regulamentação, pois a velocidade aferida de *download* e *upload* é inferior a 80% da velocidade da conexão contratada (80% de 500 Mbps = 400 Mbps, 185 Mbps < 400 Mbps; 80% de 35 Mbps = 28 Mbps; 12,95 Mbps < 35 Mbps). A medição **3** está de acordo com a regulamentação, pois a velocidade aferida de *download* e *upload* corresponde a um percentual maior que 80% da velocidade da conexão contratada (410 Mbps > 400 Mbps e 28,7 Mbps > 28 Mbps).
- Resposta pessoal. Espera-se que os estudantes possam aplicar funções no contexto da velocidade de conexão. Eles podem, por exemplo, utilizar a regulamentação estabelecida pela Anatel para criar um problema com a própria velocidade de conexão de suas residências. Outra possibilidade é estabelecer relação entre o custo e a velocidade de conexão de uma empresa de telefonia. Se necessário, orientar os estudantes a pesquisar em fontes confiáveis para utilização de dados reais.
- Respostas pessoais. Espera-se que os estudantes coletem dados reais sobre um plano de telefonia oferecido na região e investiguem se a norma relativa à velocidade de *download* e *upload* está sendo cumprida. Os dados e as conclusões devem ser expostos no relatório. Caso a conclusão seja negativa, orientar os estudantes a debater as medidas que podem ser tomadas para que a empresa regularize a situação.

34. a) Temos a seguinte condição:

$$2x - 6 \neq 0 \Rightarrow 2x \neq 6 \Rightarrow x \neq 3$$

Assim, $D(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 3\}$.

b) Temos a seguinte condição:

$$9x + 3 > 0 \Rightarrow 9x > -3 \Rightarrow x > -\frac{1}{3}$$

$$\text{Assim, } D(f) = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x > -\frac{1}{3}\right\}.$$

c) Temos a seguinte condição:

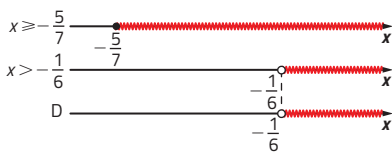
$$x^2 - 81 \neq 0 \Rightarrow x^2 \neq 81 \Rightarrow x \neq -9 \text{ e } x \neq 9$$

Assim, $D(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq -9 \text{ e } x \neq 9\}$.

d) Temos as seguintes condições:

$$\bullet 7x + 5 \geq 0 \Rightarrow 7x \geq -5 \Rightarrow x \geq -\frac{5}{7} \approx -0,7$$

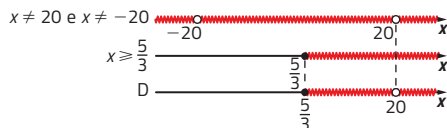
$$\bullet 6x + 1 > 0 \Rightarrow 6x > -1 \Rightarrow x > -\frac{1}{6} \approx -0,2$$



Assim, $D(f) = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid x \geq -\frac{1}{6} \right\}$.

e) Temos as seguintes condições:

- $2x^2 - 800 \neq 0 \Rightarrow 2x^2 \neq 800 \Rightarrow x^2 \neq 400 \Rightarrow x \neq 20 \text{ e } x \neq -20$
- $3x - 5 \geq 0 \Rightarrow 3x \geq 5 \Rightarrow x \geq \frac{5}{3}$



Assim, $D(f) = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid x \geq \frac{5}{3} \text{ e } x \neq 20 \right\}$.

f) Temos a seguinte condição:

$$\sqrt[3]{x} \neq 0 \Rightarrow x \neq 0$$

Assim, $D(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 0\}$.

g) Temos a seguinte condição:

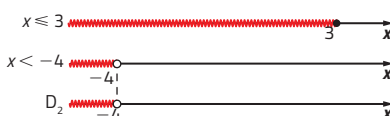
$$\frac{x-3}{x+4} \geq 0$$

Essa condição será satisfeita se $x-3 \geq 0$ e $x+4 > 0$, ou se $x-3 \leq 0$ e $x+4 < 0$.

- $x-3 \geq 0$ e $x+4 > 0$:



- $x-3 \leq 0$ e $x+4 < 0$:



Assim, $D(f) = D_1 \cup D_2 = \{x \in \mathbb{R} \mid x < -4 \text{ ou } x \geq 3\}$.

35. alternativa d

a) Não tem, pois:

$$f(9) = \frac{\sqrt{9-9}}{\sqrt{7 \cdot 9 - 4}} = \frac{0}{\sqrt{59}} = 0$$

Ou seja, o número 9 pertence a $D(f)$, mas não pertence ao intervalo dado.

b) Não tem, pois:

$$f(0) = 4\sqrt{9-0} = 4\sqrt{9} = 4 \cdot 3 = 12$$

Ou seja, o número 0 pertence a $D(f)$, mas não pertence ao intervalo dado.

c) Não tem, pois:

$$f\left(\frac{4}{7}\right) = \frac{9 - \frac{4}{7}}{7 \cdot \frac{4}{7} - 4} = \frac{9 - \frac{4}{7}}{0}$$

A fração obtida não está definida, então $\frac{4}{7}$ não pertence a $D(f)$, mas pertence ao intervalo dado.

d) Vamos obter o domínio de f . Temos as seguintes condições:

- $7x - 4 \geq 0 \Rightarrow 7x \geq 4 \Rightarrow x \geq \frac{4}{7}$
- $9 - x > 0 \Rightarrow -x > -9 \Rightarrow x < 9$



Ou seja, o intervalo dado corresponde ao domínio de f .

e) Não tem, pois:

$$f(0) = \frac{7 \cdot 0 - 4}{8 - 0} = -\frac{1}{2}$$

Ou seja, o número 0 pertence a $D(f)$, mas não pertence ao intervalo dado.

36. a) $A = \frac{b \cdot h}{2} = \frac{20 \cdot 4}{2} = 40 \rightarrow 40 \text{ cm}^2$

b) $A(h) = \frac{20 \cdot h}{2} = 10h$

$A(h) = \frac{20 \cdot h}{2}$ ou $A(h) = 10h$

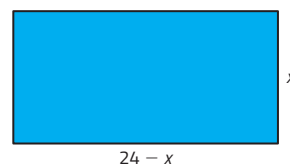
c) Como o triângulo está inscrito na semicircunferência de raio 10 cm, sua altura máxima será 10 cm. Assim, temos:

$$D(A) = \{h \in \mathbb{R} \mid 0 < h \leq 10\}$$

37. a) Sendo y a medida do outro par de lados, temos:

$$2x + 2y = 48 \Rightarrow 2y = 48 - 2x \Rightarrow y = 24 - x$$

Assim, a quadra de jogo pode ser representada por um retângulo de lados x e $24 - x$.



b) Como as medidas são x e $24 - x$, conforme o item a, sua área pode ser expressa por:

$$f(x) = x \cdot (24 - x) \Rightarrow f(x) = 24x - x^2$$

c) As medidas do retângulo que representa a quadra devem ser positivas, ou seja:

- $x > 0$
- $24 - x > 0 \Rightarrow -x > -24 \Rightarrow x < 24$

Assim, $D(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x < 24\}$.

d) dimensões:

- $x = 8 \rightarrow 8 \text{ m}$
- $24 - x = 24 - 8 = 16 \rightarrow 16 \text{ m}$

$$\text{área: } 8 \cdot 16 = 128 \rightarrow 128 \text{ m}^2$$

38. $\frac{3}{5}x + 90 = 150 \Rightarrow \frac{3}{5}x = 150 - 90 \Rightarrow 3x = 60 \cdot 5 \Rightarrow 3x = 300 \Rightarrow$

$$\Rightarrow x = 100$$

$$D(V) = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x \leq 100\}$$

39. a) Considerando que o número de quadrados vermelhos aumenta uma unidade de uma figura para a seguinte e o número de quadrados verdes aumenta três unidades de uma figura para a seguinte, temos que a figura 4 terá 4 quadrados vermelhos e 12 verdes.

b) Resposta esperada: As figuras dessa sequência são formadas por quadrados vermelhos (fileira horizontal superior) e verdes (fileira horizontal inferior) cujas quantidades correspondem, respectivamente, às sequências dos números naturais positivos e à sequência dos múltiplos positivos de 3.

c) Resposta esperada: Como em cada figura os quadrados verdes correspondem ao triplo dos vermelhos, temos:

- 133 quadrados vermelhos;
- $133 \cdot 3 = 399 \rightarrow 399$ quadrados verdes.

d) Resposta esperada: A figura da posição n tem $3n$ quadrados verdes. Assim:

$$3n = 900 \Rightarrow n = 300 \rightarrow \text{Figura 300}$$

Essa figura é formada por 300 quadrados vermelhos.

e) Não, pois 31 não é múltiplo positivo de 3.

f) Resposta esperada: Conforme observado no item d, a figura da posição n tem $3n$ quadrados verdes. Então, a lei de formação é dada por:

$$f(n) = 3n$$

Essa função só tem sentido para valores naturais positivos de n . Assim, $D(f) = \{n \in \mathbb{N} \mid n > 0\}$.

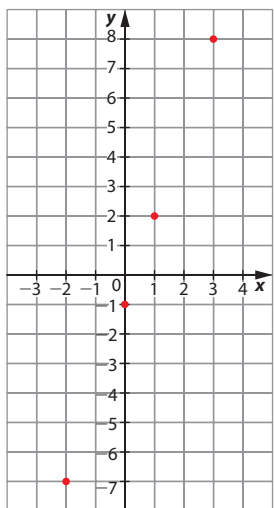
g) Resposta esperada: Se x é a quantidade de quadrados verdes e n , a posição da figura correspondente, temos:

$$3n = x \Rightarrow n = \frac{x}{3}$$

Assim, a lei de formação é dada por $g(x) = \frac{x}{3}$, sendo x um múltiplo positivo de 3, ou seja, $D(g) = \{x \in \mathbb{N} \mid x \text{ é múltiplo de } 3 \text{ e } x > 0\}$.

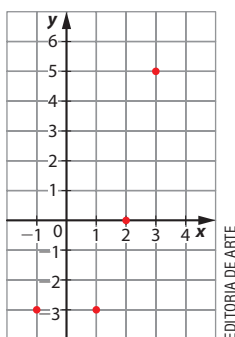
40. a)

x	$f(x) = 3x - 1$	(x, y)
-2	$f(-2) = 3 \cdot (-2) - 1 = -7$	$(-2, -7)$
0	$f(0) = 3 \cdot 0 - 1 = -1$	$(0, -1)$
1	$f(1) = 3 \cdot 1 - 1 = 2$	$(1, 2)$
3	$f(3) = 3 \cdot 3 - 1 = 8$	$(3, 8)$



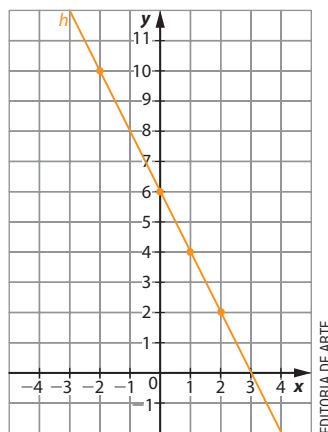
b)

x	$g(x) = x^2 - 4$	(x, y)
-1	$g(-1) = (-1)^2 - 4 = -3$	$(-1, -3)$
1	$g(1) = 1^2 - 4 = -3$	$(1, -3)$
2	$g(2) = 2^2 - 4 = 0$	$(2, 0)$
3	$g(3) = 3^2 - 4 = 5$	$(3, 5)$



c)

x	$h(x) = 6 - 2x$	(x, y)
-2	$h(-2) = 6 - 2 \cdot (-2) = 10$	$(-2, 10)$
0	$h(0) = 6 - 2 \cdot 0 = 6$	$(0, 6)$
1	$h(1) = 6 - 2 \cdot 1 = 4$	$(1, 4)$
2	$h(2) = 6 - 2 \cdot 2 = 2$	$(2, 2)$

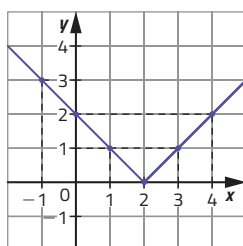


d) Para $x < 2$:

x	$m(x) = 2 - x$	(x, y)
-1	$m(-1) = 2 - (-1) = 3$	$(-1, 3)$
0	$m(0) = 2 - 0 = 2$	$(0, 2)$
1	$m(1) = 2 - 1 = 1$	$(1, 1)$

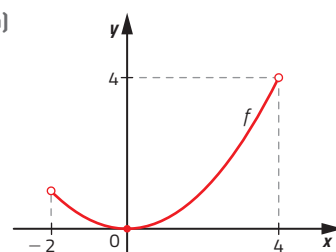
Para $x \geq 2$:

x	$m(x) = x - 2$	(x, y)
2	$m(2) = 2 - 2 = 0$	$(2, 0)$
3	$m(3) = 3 - 2 = 1$	$(3, 1)$
4	$m(4) = 4 - 2 = 2$	$(4, 2)$

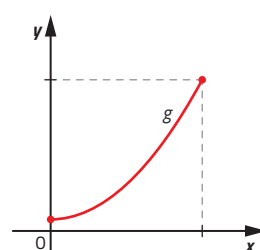


41. Respostas possíveis:

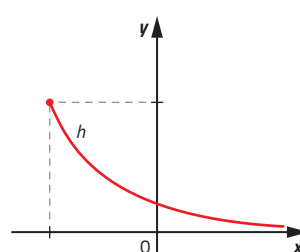
a)



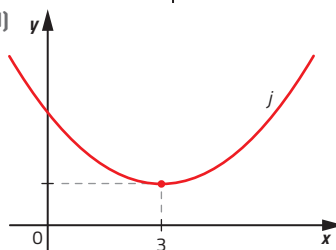
b)



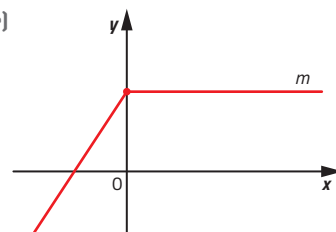
c)



d)

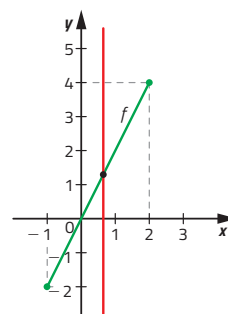


e)

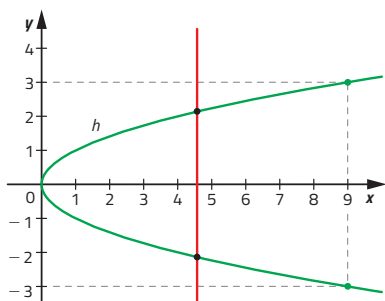


42. alternativas a e c

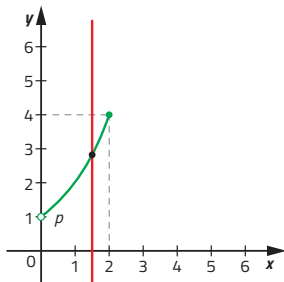
a) Representa uma função, pois cada abscissa está associada a uma única ordenada.



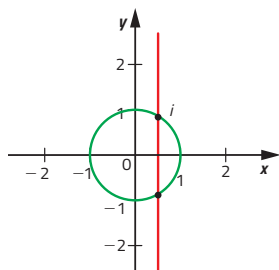
b) Não representa uma função, pois existe pelo menos uma abscissa associada a mais de uma ordenada.



c) Representa uma função, pois cada abscissa está associada a uma única ordenada.



d) Não representa uma função, pois existe pelo menos uma abscissa associada a mais de uma ordenada.



ILUSTRAÇÕES: CBOOK PRODUÇÕES

43. Com base nos gráficos apresentados, para determinar o domínio da função, observa-se o intervalo no eixo das abscissas em que a função está definida. Para determinar o conjunto imagem, observa-se o intervalo no eixo das ordenadas em que a função está definida. Assim, temos:

a) $D(f) =]-4, 5]$; $\text{Im}(f) = [-1, 2]$

b) $D(g) = [-1, 1]$; $\text{Im}(g) = [2, 4]$

c) $D(h) =]-2, 2[$; $\text{Im}(h) = [1, 5]$

44. a) Observando o intervalo em que a função está definida no eixo das abscissas, temos:

$D(f) = [-4, 4]$

b) Observando o intervalo em que a função está definida no eixo das ordenadas, temos:

$\text{Im}(f) = [-4, 1]$

c) Analisando os intervalos do domínio cuja função é crescente, temos:

$[-4, 0]$ e $[3, 4]$

d) Analisando os intervalos do domínio cuja função é decrescente, temos: $[0, 1]$.

e) No gráfico, analisa-se o intervalo do domínio em que a imagem da função não varia, ou seja, $[1, 3]$.

45. a) Resposta esperada: O consumo foi entre 10 m^3 e 25 m^3 de água, pois, para consumo inferior a 10 m^3 , o valor da fatura é de R\$ 26,90, enquanto para o consumo superior a 25 m^3 , o valor da fatura é maior que R\$ 101,90.

b) III

O item I não apresenta a lei de formação de f , pois, por essa lei, temos:

$f(10) = 36,9 \neq 26,9$

A do item II também não é, pois a taxa de crescimento da função é alterada no ponto de abscissa $x = 25$, e não em $x = 20$. Portanto, o item III é o correto.

c) 9 m^3 : Observando o gráfico, o valor da fatura será R\$ 26,90.

30 m^3 : Usando a lei de formação determinada no item b, temos:

$f(30) = 8,7 \cdot 30 - 115,6 = 145,4 \rightarrow \text{R\$ } 145,40$

25 m^3 : Observando o gráfico, o valor da fatura será R\$ 101,90.

d) Usando a lei de formação determinada no item b e sabendo que o consumo x está entre 10 m^3 e 25 m^3 , temos:

$f(x) = 50 \Rightarrow 5x - 23,1 = 50 \Rightarrow 5x = 73,1 \Rightarrow x = 14,62 \rightarrow 14,62 \text{ m}^3$

46. alternativa b

O gráfico contém os pontos de coordenadas $(0, 50)$ e $(500, 0)$.

Substituindo $x = 0$ nas expressões indicadas nas alternativas, temos:

a) $y = -10 \cdot 0 + 500 = 500$

b) $y = -\frac{0}{10} + 50 = 50$

c) $y = -\frac{0}{10} + 500 = 500$

d) $y = \frac{0}{10} + 50 = 50$

e) $y = \frac{0}{10} + 500 = 500$

Assim, eliminamos as alternativas a, c e e, pois, de acordo com o gráfico, quando $x = 0$, tem-se $y = 50$.

Substituindo $x = 500$ nas expressões apresentadas nas alternativas b e d, temos:

b) $y = \frac{-500}{10} + 50 = -50 + 50 = 0$

d) $y = \frac{500}{10} + 50 = 50 + 50 = 100$

Logo, a expressão que contém o ponto de coordenadas $(500, 0)$ é a da alternativa b.

47. a) Como o ponto de coordenadas $(500, 0)$ pertence ao gráfico, o automóvel tem o tanque vazio após 500 km, distância que corresponde à autonomia do automóvel.

b) Analisando a distância percorrida em kilometro com um tanque de

combustível, temos que $D(c) = [0, 500]$; analisando a variação da quantidade de litros de combustível no tanque, temos que $\text{Im}(c) = [0, 50]$.

48. Resposta pessoal. Espera-se que os estudantes reconheçam gráficos de função e de relações que não representam uma função. Eles podem construir, por exemplo, gráficos correspondentes a retas não paralelas ao eixo y para representar funções e de curvas cujo mesmo elemento do domínio tenha duas imagens para um gráfico que não represente uma função. A atividade pode ser utilizada para retomar as características estudadas sobre gráfico de uma função.

49. Resposta pessoal. Espera-se que os estudantes reconheçam funções crescentes, decrescentes e constantes. Verificar se eles compreenderam que, para as funções crescentes, devem ser consideradas situações em que as duas grandezas aumentam ou diminuem simultaneamente; para as funções decrescentes, as situações consideradas devem apresentar grandezas em que uma diminui ao passo que a outra aumenta; por fim, para as funções constantes, nas situações consideradas, uma das grandezas deve permanecer invariável, com a variação da outra.

50. Resposta pessoal. Espera-se que os estudantes construam um gráfico de função com três raízes reais no domínio dado, ou seja, que cruze o eixo das abscissas em tal intervalo.

51. alternativa c

a) Não é o gráfico de f , pois a função é positiva para $4 < x < 6$.

b) Não é o gráfico de f , pois a função não é nula para $x = -3$.

c) A função satisfaz a todas as condições dadas.

52. a) Analisando o gráfico, temos: $f(-6) = 1$; $f(1) = 1$; $f(-2) = -2$.

b) Observando os valores em que o gráfico da função intersecta o eixo x , os zeros da função são: -4 , -1 e 3 .

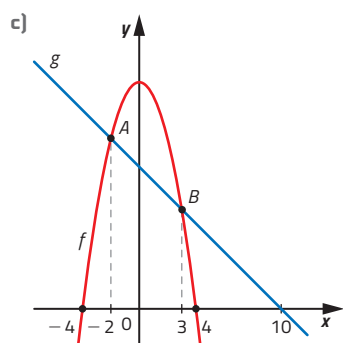
c) positiva: $-8 \leq x < -4$ ou $-1 < x < 3$

negativa: $-4 < x < -1$ ou $3 < x < 5$

nula: $x = -4$ ou $x = -1$ ou $x = 3$

53. a) Podemos observar que -4 e 4 são zeros de f , pois $-(-4)^2 + 16 = -4^2 + 16 = 0$, e 10 é um zero de g , pois $10 - 10 = 0$. Assim, o gráfico de f foi representado em vermelho e o de g , em azul.

b) Função f positiva para $-4 < x < 4$, negativa para $x < -4$ ou $x > 4$ e nula para $x = -4$ ou $x = 4$; função g positiva para $x < 10$, negativa para $x > 10$ e nula para $x = 10$.



Podemos observar no gráfico que:

- $f(x) < g(x)$ para $x < -2$ e $x > 3$, ou seja, $f < g$ em $]-\infty, -2[$ ou $]3, +\infty[$
- $g(x) < f(x)$ para $-2 < x < 3$, ou seja, $g < f$ em $]-2, 3[$

0 que estudei

1. Respostas pessoais.
2. Resposta pessoal.
3. Respostas pessoais.
4. a) Resposta pessoal. Espera-se que os estudantes construam argumentos a respeito das vantagens e desvantagens da venda ser por unidade ou por quilograma. Para isso, podem utilizar funções que determinem o preço em função da quantidade ou da massa.
- b) Como cada pão era vendido por R\$ 0,35, temos: $c(p) = 0,35p$.
- c) $10,80 : 15,00 = 0,72 \rightarrow 0,72$ kg ou 720 g
- d) Gráfico III, pois $f(0) = 0$ e $f(1) = 15,00$.
- e)
 - $f(x) = 15x$
 - $D(f) = \mathbb{R}_+$; $CD(f) = \mathbb{R}$; $Im(f) = \mathbb{R}_+$
 - Crescente, pois dados $a \in D(f)$ e $b \in D(f)$, com $a < b$, temos: $a < b \Rightarrow 15 \cdot a < 15 \cdot b \Rightarrow f(a) < f(b)$
 - $f(x) = 0 \Rightarrow 15x = 0 \Rightarrow x = 0$
 - Como $D(f) = \mathbb{R}_+$, f é crescente e $x = 0$ é zero de f , temos que não existe $x \in D(f)$ tal que $f(x) < 0$.
 - Como $D(f) = \mathbb{R}_+$, f é crescente e $x = 0$ é zero de f , temos que $f(x) > 0$ para $x > 0$.
- f) Respostas pessoais. Espera-se que os estudantes obtenham funções que relacionem o preço e a massa dos alimentos, ou o preço e a quantidade adquirida. A comparação entre os resultados pode ser feita utilizando a lei de formação da função e também a representação gráfica dela.

Praticando: Enem e vestibulares

1. alternativa c
A primeira bomba ligada foi responsável por escoar 1 000 L de água ($6 000 - 5 000 = 1 000$) na primeira hora. Considerando a mesma vazão de 1 000 L/h, nas duas horas seguintes ela escoou 2 000 L ($2 \cdot 1 000 = 2 000$).

CBOOK PRODUÇÕES

Como juntas as bombas escoaram 5 000 L na segunda hora, temos que a segunda bomba que foi ligada escoou 3 000 L ($5 000 - 2 000 = 3 000$) em duas horas. Assim, a vazão dessa bomba é dada por:

$$3 000 : 2 = 1 500 \rightarrow 1 500 \text{ L/h}$$

2. alternativa c
 $50 \cdot 1 610 = 80 500 \rightarrow 80 500 \text{ m}$ ou 80,5 km
3. alternativa b
Observando o gráfico, temos que os valores de x e y variam de 0 a 10, ou seja, $0 \leq x \leq 10$ e $0 \leq y \leq 10$. Além disso, para qualquer ponto do gráfico, temos que $y \leq x$. Assim, temos $0 \leq y \leq x \leq 10$.
4. alternativa d
I) Correta. Em uma fração, o denominador precisa ser diferente de zero.
II) Correta. No conjunto dos números reais não estão definidas raízes de índice par para radicandos negativos.
III) Correta. No conjunto dos números reais não estão definidas raízes de índice par para radicandos negativos e, em uma fração, o denominador precisa ser diferente de zero.
IV) Incorreta. No conjunto dos números reais, não estão definidas raízes de índice par para radicandos negativos, ou seja, para $r(x) < 0$. A função não estará definida.

5. alternativa b
 $1 008 - 252 = 756$
Temos que:
 $999 \cdot 0,45 = 449,55$
 $2 499 \cdot 0,40 = 999,60$
Logo, a quantidade de CDs comprada foi maior que 1 000 e menor que 2 500. Assim, o total de CDs comprados é dado por:

$$\frac{756,00}{0,40} = 1 890$$

6. alternativa b
Total de minutos em 60 dias:
 $60 \cdot 24 \cdot 60 = 86 400$
Total de acionamentos do borrifador:
 $\frac{86 400}{48} = 1 800$
Quantidade de inseticida por borrifada:
 $\frac{360}{1 800} = 0,2 \rightarrow 0,200 \text{ mL}$

7. alternativa b
Sendo x a quantidade de quilômetros rodados, temos:
 $220,00 + 2,90x \leq 2 300,00$
 $2,90x \leq 2 300,00 - 220,00$
 $2,90x \leq 2 080,00$

$$x \leq \frac{2 080}{2,90}$$

$$x \leq 717,24$$

8. alternativa c
 $32,74 + 5 \cdot 3,00 + 32,74 = 80,48 \rightarrow \text{R\$ } 80,48$

9. alternativa b

Como o conjunto A é dado pelos valores inteiros de S_1 , temos:

$$A = \{0, 1, 2, 3\}$$

Dos valores pertencentes ao conjunto A , temos:

$$x - 1 \neq 0 \rightarrow x \neq 1$$

$$\text{Se } x = 0, \text{ então } f(0) = 0.$$

$$\text{Se } x = 2, \text{ então}$$

$$f(2) = \sqrt{\frac{2}{2-1} - \frac{2 \cdot 2}{2+1}} = \sqrt{2 - \frac{4}{3}} = \sqrt{\frac{2}{3}}$$

$$\text{Se } x = 3, \text{ então}$$

$$f(3) = \sqrt{\frac{3}{3-1} - \frac{2 \cdot 3}{3+1}} = \sqrt{\frac{3}{2} - \frac{3}{2}} = 0.$$

Logo, apenas os números 0, 2 e 3 pertencem ao domínio da função e ao conjunto A . Portanto, $A \cap B = \{0, 2, 3\}$.

10. alternativa c

$$S = 5 \cdot 0 + 4 \cdot 1 + 3 \cdot 0 + 2 \cdot 0 = 4$$

$$\frac{4}{11} = 0 \text{ com resto } 4 \rightarrow R = 4$$

$$N_5 = 11 - R = 11 - 4 = 7$$

11. alternativa a

Analisando o gráfico, constatamos que o veículo que chegou em último lugar é representado pela linha reta mais escura. Acompanhando a variação dessa linha, notamos que o veículo representado por ela não realizou ultrapassagem alguma.

12. alternativa a

$$\text{I) } 120,00 \cdot 8 = 960,00$$

$$\text{II) } 180,00 \cdot 6 = 1 080,00$$

$$\text{III) } 170,00 \cdot 6 + 20,00 = 1 020,00 + 20,00 = 1 040,00$$

$$\text{IV) } 110,00 \cdot 9 + 10,00 = 990,00 + 10,00 = 1 000,00$$

$$\text{V) } 110,00 \cdot 10 = 1 100,00$$

13. alternativa c

Tempo, em hora, que a torneira ficou aberta: $t = 18 - 10 = 8$

Da expressão $V(t) = 5 000 - kt$, temos:

$$2 000 = 5 000 - k \cdot 8 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2 000 - 5 000 = -8k \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -3 000 = -8k \Rightarrow$$

$$\Rightarrow k = \frac{-3 000}{-8} = 375$$

$$2 750 = 5 000 - 375 \cdot t \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2 750 - 5 000 = -375t \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -2 250 = -375t \Rightarrow t = \frac{-2 250}{-375} = 6$$

$$10 \text{ h} + 6 \text{ h} = 16 \text{ h}$$

14. alternativa b

Plano A:

$$25,00 + (75 - 20) \cdot 1,50 + 50 \cdot 2,00 = 207,50$$

Plano B:

$$60,00 + (75 - 65) \cdot 1,00 + 50 \cdot 1,20 = 130,00$$

Plano C:
 $60,00 + (75 - 75) \cdot 1,00 + 50 \cdot 1,50 = 135,00$
 Plano D:
 $120,00 + 50 \cdot 0,90 = 165,00$
 Plano E:
 $120,00 + 50 \cdot 1,20 = 180,00$

Unidade 3 • Função afim e função modular

1. A função afim em cada item é da forma $f(x) = ax + b$. Nos casos em que $b = 0$, temos uma função linear. Para além disso, se $b = 0$ e $a = 1$, a função é também chamada de identidade. Dessa forma, temos:

- a) $a = 8$; $b = 10$
 b) $a = -2$; $b = -8,4$
 c) $a = -6$; $b = 4$
 d) $a = 1$; $b = 0$; função linear e função identidade

e) $a = \frac{3}{5}$; $b = 0$; função linear

f) $a = 0$; $b = -37$

g) $a = \sqrt{3}$; $b = \frac{2}{3}$

h) $a = -1$; $b = 0$; função linear

2. a) $f(-7) = 6 \cdot (-7) + 84 = 42$

b) $g(5) = -4 \cdot 5 - 6 = -26$

c) $g(0) = -4 \cdot 0 - 6 = -6$

d) $f\left(\frac{5}{3}\right) = 6 \cdot \frac{5}{3} + 84 = 94$

e) $f(2) + g(-10) = (6 \cdot 2 + 84) + [-4 \cdot (-10) - 6] = 96 + 34 = 130$

f) $g(4) - f(-3) = (-4 \cdot 4 - 6) - [6 \cdot (-3) + 84] = -22 - 66 = -88$

g) $\frac{f(-5)}{g(3)} = \frac{6 \cdot (-5) + 84}{-4 \cdot 3 - 6} = \frac{54}{-18} = -3$

3. a) Como a caixa-d'água tem capacidade de 100 000 L e o consumo é de 2 000 L por hora, sendo $v(t)$ o volume de água na caixa em função do tempo t , em hora, temos: $v(t) = 100\,000 - 2\,000t$.

b) $v(15) = 100\,000 - 2\,000 \cdot 15 = 100\,000 - 30\,000 = 70\,000 \rightarrow 70\,000$ L

c) $v(t) = 0 \Rightarrow 100\,000 - 2\,000t = 0 \Rightarrow t = \frac{-100\,000}{-2\,000} \Rightarrow t = 50 \rightarrow 50$ h

4. a) 0 minuto: $25 + 15 \cdot 0 = 25 \rightarrow 25^\circ\text{C}$
 1 minuto: $25 + 15 \cdot 1 = 40 \rightarrow 40^\circ\text{C}$
 2 minutos: $25 + 15 \cdot 2 = 55 \rightarrow 55^\circ\text{C}$
 3 minutos: $25 + 15 \cdot 3 = 70 \rightarrow 70^\circ\text{C}$
 4 minutos: $25 + 15 \cdot 4 = 85 \rightarrow 85^\circ\text{C}$
 5 minutos: $25 + 15 \cdot 5 = 100 \rightarrow 100^\circ\text{C}$

Tempo (min)	Temperatura ($^\circ\text{C}$)
0	25
1	40
2	55
3	70
4	85
5	100

b) Item IV, pois a temperatura interna do forno é 25°C quando ele é ligado e, a partir desse momento, aumenta 15°C por minuto.

c) $f(10) = 15 \cdot 10 + 25 = 175 \rightarrow 175^\circ\text{C}$
 $f(x) = 280 \Rightarrow 15x + 25 = 280 \Rightarrow 15x = 255 \Rightarrow x = 17 \rightarrow 17$ min

5. a) Considerando que o tanque está cheio com 18 000 L e que a bomba transfere 160 L por minuto, e sendo $L(t)$ o volume de leite, em litro, e t o tempo, em minuto, temos: $L(t) = 18\,000 - 160t$.

b) $L(t) = 0 \Rightarrow 18\,000 - 160t = 0 \Rightarrow t = \frac{-18\,000}{-160} = 112,5 \rightarrow 112,5$ h

Como 1 h = 60 min e 0,5 min = 30 s, temos: $112,5 - 60 = 52,5 \rightarrow 1\text{h}52\text{min}30\text{s}$.

6. a) 70 dólares:

Dólares	Reais
1	4,8844
70	y

$$\frac{1}{70} = \frac{4,8844}{y} \Rightarrow y = 70 \cdot 4,8844 \approx 341,91 \rightarrow \text{aproximadamente R\$ } 341,91$$

200 euros:

Euros	Reais
1	5,3577
200	y

$$\frac{1}{200} = \frac{5,3577}{y} \Rightarrow y = 200 \cdot 5,3577 = 1\,071,54 \rightarrow \text{R\$ } 1\,071,54$$

b) Dólares:

Dólares	Reais
1	4,8844
x	1,465,32

$$\frac{1}{x} = \frac{4,8844}{1\,465,32} \Rightarrow 4,8844x = 1\,465,32 \Rightarrow x = 300 \rightarrow 300 \text{ dólares}$$

Euros:

Euros	Reais
1	5,3577
x	1,465,32

$$\frac{1}{x} = \frac{5,3577}{1\,465,32} \Rightarrow 5,3577x = 1\,465,32 \Rightarrow x \approx 273,50 \rightarrow \text{aproximadamente } 273,50 \text{ euros}$$

c) Sim, pois, se aumentarmos ou reduzirmos uma das grandezas, a outra também aumentará ou será reduzida, respectivamente, na mesma proporção.

Dólares	Reais
1	4,8844
x	$f(x)$

$$\frac{1}{x} = \frac{4,8844}{f(x)} \Rightarrow f(x) = 4,8844x$$

Euros	Reais
1	5,3577
p	$g(p)$

$$\frac{1}{p} = \frac{5,3577}{g(p)} \Rightarrow g(p) = 5,3577p$$

e) $f(40) = 4,8844 \cdot 40 = 195,376$
 Para comprar 40 dólares, eram necessários aproximadamente R\\$ 195,38.

$g(100) = 5,3577 \cdot 100 = 535,77$
 Para comprar 100 euros, eram necessários R\\$ 535,77.

f) Resposta esperada: Sim, pois as funções f e g são funções afins, em que o termo independente é igual a zero.

g) Resposta pessoal. Espera-se que os estudantes pesquisem em sites confiáveis e verifiquem o que aconteceu com o dólar e o euro de janeiro de 2024 até a data pesquisada. A atividade pode ser ampliada questionando o que acontece com os valores encontrados nos itens a, b e e a partir das novas cotações do dólar e do euro a fim de que os estudantes identifiquem a proporcionalidade envolvida na situação.

7. Resposta pessoal. Espera-se que os estudantes identifiquem situações que podem ser descritas por uma função afim, como aquelas em que há proporcionalidade direta entre as grandezas. Verificar se as respostas contêm características como linearidade, proporcionalidade entre as grandezas e a presença das variáveis dependente e independente.

8. a) $3\,500 + 0,03 \cdot 26\,840 = 3\,500 + 805,2 = 4\,305,2 \rightarrow \text{R\$ } 4\,305,20$

b) Como César recebe 3% do valor v das vendas adicionado a um valor fixo de R\\$ 3.500,00, temos:

$$s(v) = 0,03v + 3\,500$$

$$c) 4\,541,84 = 0,03v + 3\,500 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow v = \frac{1\,041,84}{0,03} = 34\,728 \rightarrow \text{R\$ } 34\,728,00$$

9. a) $v(0) = 100 - 8 \cdot 0 = 100 \rightarrow 100 \text{ m}^3$

b) $v(4) = 100 - 8 \cdot 4 = 100 - 32 = 68 \rightarrow 68 \text{ m}^3$

$$c) 0 = 100 - 8t \Rightarrow t = \frac{-100}{-8}$$

$$\Rightarrow t = 12,5 \rightarrow 12,5 \text{ h ou } 12\text{h}30\text{min}$$

10. a) Resposta esperada: Não, pois, analisando cada linha do quadro, é possível constatar que a razão entre o preço e o tempo não corresponde a uma constante.

$$\frac{47}{\frac{1}{47}} \neq \frac{62}{\frac{2}{31}} \neq \frac{77}{\frac{3}{25,6}} \neq \frac{92}{\frac{4}{23}}$$

b) Sendo $p(t) = at + b$, com $a, b \in \mathbb{R}$, temos:

$$\begin{cases} p(1) = 47 \\ p(2) = 62 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a + b = 47 & \text{(I)} \\ 2a + b = 62 & \text{(II)} \end{cases}$$

Subtraindo (I) de (II), obtemos $a = 15$. Assim, de (I), temos:
 $15 + b = 47 \Rightarrow b = 32$
 Portanto, $p(t) = 15t + 32$.

c) $p(5) = 15 \cdot 5 + 32 = 107 \rightarrow \text{R\$ } 107,00$
 $p(10) = 15 \cdot 10 + 32 = 182 \rightarrow \text{R\$ } 182,00$

d) $p(t) = 84,5 \Rightarrow 15t + 32 = 84,5 \Rightarrow 15t = 52,5 \Rightarrow t = 3,5 \rightarrow 3,5 \text{ h}$
 ou 3h30min

11. a) No mapa, a distância real, em quilômetro correspondente a cada centímetro, é dada por: $\frac{7,5}{3} = 2,5$.

Assim, sendo d a distância medida no mapa (em cm) e $R(d)$ a distância real (em km), temos: $R(d) = 2,5d$.

b) $45 = 2,5d \Rightarrow d = \frac{45}{2,5} \Rightarrow d = 18 \rightarrow 18 \text{ cm}$

c) Como $1 \text{ km} = 100\,000 \text{ cm}$ e no mapa cada $2,5 \text{ cm}$ representa uma distância real de 1 km , temos:
 $2,5 \cdot 100\,000 = 250\,000$
 Portanto, a escala do mapa é $1 : 250\,000$.

12. Atividade de elaboração do estudante. Espera-se que os estudantes elaborem um problema tendo como base o cartaz do enunciado. Por exemplo, o problema pode envolver a função cuja lei de formação seja $f(x) = 8x + 10$, em que $f(x)$ indica a quantia a pagar pela locação da estação de trabalho por um período de x horas.

13. a) Resposta esperada: Aumentam-se os congestionamentos, a emissão de gases poluentes e o efeito estufa, a quantidade de acidentes de trânsito, entre outras consequências.

b) Automóvel individual, pois

$127 \text{ g} > 71 \text{ g} > 16 \text{ g}$.

c) Como, por passageiro transportado no deslocamento de 1 km , a emissão de CO_2 por motocicleta, automóvel individual e ônibus é de 71 g , 127 g e 16 g , respectivamente, temos:

▪ motocicleta: $m(x) = 71x$

▪ automóvel individual: $a(x) = 127x$

▪ ônibus: $o(x) = 16x$

d) ▪ motocicleta:

$m(50) = 71 \cdot 50 = 3\,550 \rightarrow 3\,550 \text{ g}$

▪ automóvel individual:

$a(50) = 127 \cdot 50 = 6\,350 \rightarrow 6\,350 \text{ g}$

▪ ônibus:

$o(50) = 16 \cdot 50 = 800 \rightarrow 800 \text{ g}$

e) Resposta pessoal. Espera-se que os estudantes citem atitudes como trocar o transporte particular pelo coletivo, dar carona para colegas de trabalho e utilizar mais meios de transporte sustentáveis, como as bicicletas. Eles podem, por exemplo, comparar a quantidade de CO_2 emitida por passageiro a cada quilômetro percorrido ao longo de um ano com a quantidade não emitida ao tomarem atitudes como as descritas anteriormente.

14. a) $\frac{f(2) - f(-1)}{2 - (-1)} = \frac{(2 \cdot 2^2 + 6) - [2 \cdot (-1)^2 + 6]}{3} = \frac{14 - 8}{3} = 2$

b) $\frac{f(0) - f(-4)}{0 - (-4)} = \frac{(4 \cdot 0 - 1) - [4 \cdot (-4) - 1]}{4} = \frac{-1 - (-17)}{4} = 4$

c) $\frac{f(2) - f(1)}{2 - 1} = \frac{(3 \cdot 2^3) - (3 \cdot 1^3)}{1} = 24 - 3 = 21$

d) $\frac{f(6) - f(-2)}{6 - (-2)} = \frac{\left(\frac{6}{2} + 7\right) - \left(\frac{-2}{2} + 7\right)}{8} = \frac{10 - 6}{8} = \frac{1}{2}$

15. $\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{ax_2 + b - ax_1 - b}{x_2 - x_1} = \frac{a(x_2 - x_1)}{x_2 - x_1} = a$

16. Como a taxa de variação é igual ao coeficiente a , podemos analisá-lo em cada item e verificar que, se $a < 0$, então a função é decrescente e, se $a > 0$, então a função é crescente. Assim, temos:

a) 5; crescente

b) -8; decrescente

c) -1; decrescente

d) $\frac{1}{3}$; crescente

17. a) Taxa de variação:

$a = \frac{f(5) - f(1)}{5 - 1} = \frac{-2 - 6}{4} = -2$

Como $a < 0$, a função é decrescente.

b) Taxa de variação:

$a = \frac{g(1) - g(-2)}{1 - (-2)} = \frac{-1 - (-13)}{3} = 4$

Como $a > 0$, a função é crescente.

c) Taxa de variação:

$a = \frac{h(-3) - h(-6)}{-3 - (-6)} = \frac{0 - 3}{3} = -1$

Como $a < 0$, a função é decrescente.

d) Taxa de variação:

$a = \frac{p(6) - p(-3)}{6 - (-3)} = \frac{4 - 1}{9} = \frac{1}{3}$

Como $a > 0$, a função é crescente.

18. a) Não, pois, por exemplo, ao quadruplicarmos o tempo do experimento, a temperatura interna da câmara fria não quadruplica, uma vez que, em 1 h do experimento, a temperatura era de 1°C e, em 4 h , era de 16°C .

b) Taxa de variação: $\frac{f(4) - f(1)}{4 - 1} = \frac{16 - 1}{3} = 5$

Indica que, a cada hora, a temperatura interna da câmara fria aumenta 5°C .

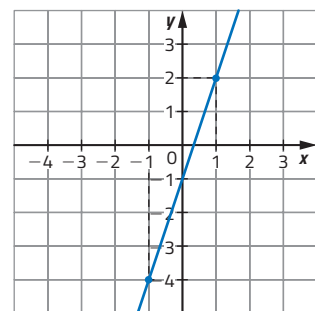
c) Considere que $f(t) = at + b$, com $a, b \in \mathbb{R}$. Pelo item b, temos $a = 5$ e, como a temperatura inicial era -4°C , temos:

$f(0) = -4 \Rightarrow 5 \cdot 0 + b = -4 \Rightarrow b = -4$
 Portanto, temos $f: [0, 4] \rightarrow \mathbb{R}$, definida por $f(t) = 5t - 4$.

d) $f(t) = 6 \Rightarrow 5t - 4 = 6 \Rightarrow 5t = 10 \Rightarrow t = 2 \rightarrow 2 \text{ h}$

19. a)

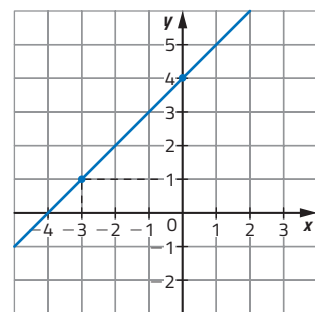
x	$f(x) = 3x - 1$	(x, y)
-1	$f(-1) = 3 \cdot (-1) - 1 = -4$	$(-1, -4)$
1	$f(1) = 3 \cdot 1 - 1 = 2$	$(1, 2)$



ILUSTRAÇÕES: CBOOK PRODUÇÕES

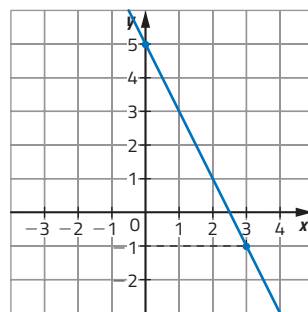
- b)

x	$f(x) = x + 4$	(x, y)
-3	$f(-3) = -3 + 4 = 1$	$(-3, 1)$
0	$f(0) = 0 + 4 = 4$	$(0, 4)$



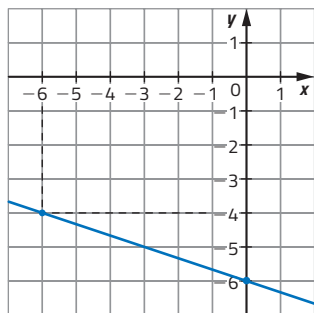
- c)

x	$f(x) = 5 - 2x$	(x, y)
0	$f(0) = 5 - 2 \cdot 0 = 5$	$(0, 5)$
3	$f(3) = 5 - 2 \cdot 3 = -1$	$(3, -1)$



d)

x	$f(x) = -\frac{x}{3} - 6$	(x, y)
-6	$f(-6) = -\frac{(-6)}{3} - 6 = -4$	$(-6, -4)$
0	$f(0) = -\frac{0}{3} - 6 = -6$	$(0, -6)$



ILUSTRAÇÕES: CBOOK PRODUÇÕES

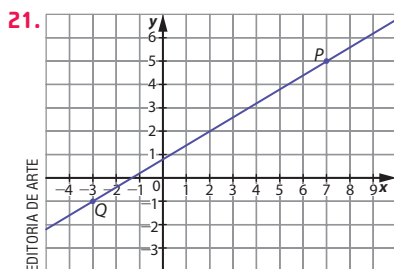
20. a) Decrescente, pois a taxa de variação é negativa ($a = -2 < 0$).

b) $f(x) = 0 \Rightarrow -2x + 5 = 0 \Rightarrow -2x = -5 \Rightarrow x = \frac{5}{2}$

c) Pelo item b, $\frac{5}{2}$ é o zero da função; logo, o gráfico cruza o eixo x no ponto $(\frac{5}{2}, 0)$.

Temos $f(0) = -2 \cdot 0 + 5 = 5$; logo, o gráfico cruza o eixo y no ponto $(0, 5)$.

Resposta pessoal. Os estudantes podem, por exemplo, construir uma tabela e determinar alguns pares ordenados correspondentes a pontos do gráfico. Além disso, podem utilizar os pontos conhecidos em que a função cruza os eixos ordenados, considerando também a informação de que a função é decrescente.



Observando o comportamento do gráfico, podemos concluir que f é uma função crescente. Também podemos chegar a essa conclusão pelo fato de que $7 > -3$ e $f(7) > f(-3)$.

22. a) Analisando o comportamento do gráfico de cada função, temos que os gráficos II e III são de funções crescentes e o gráfico I é de função decrescente.

b) Observando os gráficos, podemos determinar a taxa de variação e o termo independente de cada função.

■ I: taxa de variação: $a = \frac{3-7}{4-0} = \frac{-4}{4} = -1$; termo independente: $b = 7$.

Portanto, o gráfico I corresponde à lei de formação $n(x) = -x + 7$.

■ II: taxa de variação: $a = \frac{5-0}{1-0} = 5$; termo independente: $b = 0$.

Portanto, o gráfico II corresponde à lei de formação $h(x) = 5x$.

■ III: taxa de variação: $a = \frac{3-2}{4-0} = \frac{1}{4}$; termo independente: $b = 2$.

Portanto, o gráfico III corresponde à lei de formação $m(x) = \frac{x}{4} + 2$.

23. a) Resposta esperada: Sim, pois, se considerarmos, por exemplo, o dobro da área de plantio, a quantidade de soja produzida também será o dobro.

b) Considerando que a produtividade seja a mesma em qualquer área de plantio, a função q é linear e sua lei de formação é dada por $q(x) = 3,5x$.

c) A função q é crescente e passa pela origem $(0, 0)$, pois é linear e $a = 3,5 > 0$. Logo, o gráfico II é o que representa essa função.

d) $q(x) = 155 \cdot 10^6 \Rightarrow 3,5x = 155 \cdot 10^6 \Rightarrow x \approx 44,3 \cdot 10^6 \rightarrow$ aproximadamente 44 300 000 ha
Convertendo para km^2 , temos:
 $44\,300\,000 \text{ ha} = 44\,300\,000 \cdot 0,01 \text{ km}^2 = 443\,000 \text{ km}^2$
Portanto, aproximadamente 443 000 km^2 .

e) $\frac{443\,000}{8\,500\,000} \approx 0,052 \rightarrow$ aproximadamente 0,052

Resposta esperada: Representa que cerca de 5,2% da área territorial do Brasil foi utilizada no plantio de soja na safra 2022/2023.

24. a) Considerando os pontos dados, é possível observar que, à medida que x cresce, o valor de $f(x)$ decresce. Assim, f é decrescente.

b) $a = \frac{f(0) - f(6)}{0 - 6} = \frac{4 - 0}{-6} = -\frac{2}{3}$

c) Como a função passa por $(0, 4)$, temos que $b = 4$. Considerando $a = -\frac{2}{3}$, temos: $f(x) = -\frac{2}{3}x + 4$.

25. a) $0 = -\frac{9}{3} + m + 5 \Rightarrow m = -2$

b) $6 = -\frac{0}{3} + m + 5 \Rightarrow m = 1$

c) $0 = -\frac{0}{3} + m + 5 \Rightarrow m = -5$

26. a) Tanto $f(4)$ como $g(4)$ são iguais à ordenada de P ; logo:

$f(4) = g(4) \Rightarrow -4k + 6 = 8k + 3 \Rightarrow -12k = -3 \Rightarrow k = \frac{1}{4}$

Segue que:

■ $f(x) = -\frac{1}{4}x + 6 \Rightarrow f(x) = -\frac{x}{4} + 6$

■ $g(x) = 2 \cdot \frac{1}{4}x + 3 \Rightarrow g(x) = \frac{x}{2} + 3$

b) eixo das abscissas:

$f(x) = 0 \Rightarrow -\frac{x}{4} + 6 = 0 \Rightarrow \frac{x}{4} = 6 \Rightarrow x = 24$

$g(x) = 0 \Rightarrow \frac{x}{2} + 3 = 0 \Rightarrow \frac{x}{2} = -3 \Rightarrow x = -6$

Logo, f cruza o eixo das abscissas em $(24, 0)$ e g , em $(-6, 0)$.

eixo das ordenadas:

$f(0) = -\frac{0}{4} + 6 = 6$

$g(0) = \frac{0}{2} + 3 = 3$

Logo, f cruza o eixo das ordenadas em $(0, 6)$ e g , em $(0, 3)$.

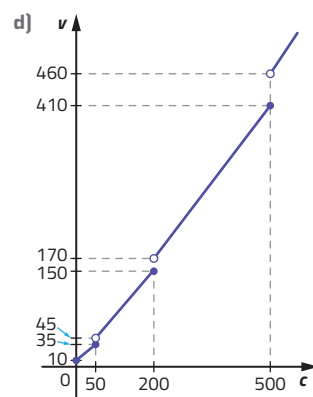
27. a) Analisando, no quadro, a tarifa por faixa de consumo, temos:

- $50 < c \leq 200$: $v(c) = 0,70c + 10$
- $200 < c \leq 500$: $v(c) = 0,80c + 10$
- $c > 500$: $v(c) = 0,90c + 10$

b) Com base nas respostas ao item a, para determinar a lei de formação da função, basta reunir as expressões determinadas para cada faixa de consumo, ou seja:

$$v(c) = \begin{cases} 0,50c + 10, & \text{para } 0 \leq c \leq 50 \\ 0,70c + 10, & \text{para } 50 < c \leq 200 \\ 0,80c + 10, & \text{para } 200 < c \leq 500 \\ 0,90c + 10, & \text{para } c > 500 \end{cases}$$

c) Resposta esperada: O consumo deve corresponder a um número não negativo, ou seja, $D(v) = [0, +\infty[$. Ao considerar $D(v)$ e a lei de formação da função v , tem-se que $\text{Im}(v) = [10, +\infty[$.



e) Resposta esperada: Sim, pois, ao escolhermos quaisquer valores $c_1, c_2 \in D(v)$, com $c_2 > c_1$, temos que $v(c_2) > v(c_1)$.

f) ■ $v(600) = 0,90 \cdot 600 + 10 = 550 \rightarrow \text{R\$ } 550,00$

■ $v(30) = 0,50 \cdot 30 + 10 = 25 \rightarrow \text{R\$ } 25,00$

■ $v(400) = 0,80 \cdot 400 + 10 = 330 \rightarrow \text{R\$ } 330,00$

■ $v(120) = 0,70 \cdot 120 + 10 = 94 \rightarrow \text{R\$ } 94,00$

28. alternativa b

A desvalorização por ano corresponde à taxa de variação de cada função.

▪ Veículo I: $\frac{25 - 75}{5 - 0} = -10 \rightarrow$ desvalorização de R\$ 10.000,00 por ano

▪ Veículo II: $\frac{10 - 60}{4 - 0} = -12,5 \rightarrow$ desvalorização de R\$ 12.500,00 por ano

▪ Veículo III: $\frac{14 - 50}{6 - 0} = -6 \rightarrow$ desvalorização de R\$ 6.000,00 por ano

▪ Veículo IV: $\frac{16 - 36}{4 - 0} = -5 \rightarrow$ desvalorização de R\$ 5.000,00 por ano
Logo, a maior desvalorização por ano é a do veículo II.

29. Veículo I:

taxa de variação: $a = -10$; termo independente: $b = 75$

Logo, a lei de formação é $h(x) = -10x + 75$.

▪ Veículo II:

taxa de variação: $a = -12,5$; termo independente: $b = 60$

Logo, a lei de formação é $n(x) = -12,5x + 60$.

▪ Veículo III:

taxa de variação: $a = -6$; termo independente: $b = 50$

Logo, a lei de formação é $m(x) = -6x + 50$.

▪ Veículo IV:

taxa de variação: $a = -5$; termo independente: $b = 36$

Logo, a lei de formação é $f(x) = -5x + 36$.

30. a) Como o valor do frete é o mesmo para 80 ou 200 unidades, então a diferença entre as cotações de 200 e 80 unidades corresponde ao preço de 120 unidades sem incluir o frete. Temos:

▪ preço de 120 unidades na loja A:

$$900 - 480 = 420 \rightarrow \text{R\$ } 420,00$$

▪ preço de 120 unidades na loja B:

$$980 - 440 = 540 \rightarrow \text{R\$ } 540,00$$

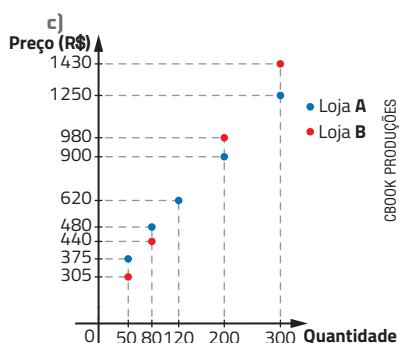
Logo, o preço do frete na loja A é $\frac{420}{120} = \text{R\$ } 3,50$ e, na loja B, $\frac{540}{120} = \text{R\$ } 4,50$.

b) Conforme a resolução do item a, 120 unidades do produto custam R\$ 420,00 na loja A e R\$ 540,00 na loja B. Então, o preço unitário em cada loja é:

▪ loja A: $\frac{420}{120} = 3,5 \rightarrow \text{R\$ } 3,50$

▪ loja B: $\frac{540}{120} = 4,5 \rightarrow \text{R\$ } 4,50$

Portanto, na loja B é mais caro, sendo R\$ 4,50 cada unidade.



d) Para cada loja, podemos representar o preço y em função da quantidade comprada x por uma função com lei de formação $y = ax + b$, em que a é o preço unitário do produto e b é o valor do frete. Pelas resoluções dos itens a e b, temos:

▪ loja A: $P_A(x) = 3,5x + 200$

▪ loja B: $P_B(x) = 4,50x + 80$

Ambas são funções afins.

e) É financeiramente mais vantajoso na loja A se a quantidade x é tal que $P_A(x) < P_B(x)$, ou seja:

$$3,5x + 200 < 4,5x + 80 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -x < -120 \Rightarrow x > 120$$

Portanto, é mais vantajoso para quantidades maiores que 120 unidades.

31. a) $33 - 18 = 15 \rightarrow 15 \text{ kg}$

b) ▪ janeiro: $|18 - f(1)| = |18 - (2,43 \cdot 1 + 16)| = 0,43 \rightarrow 0,43 \text{ kg}$

▪ fevereiro: $|22 - f(2)| = |22 - (2,43 \cdot 2 + 16)| = 1,14 \rightarrow 1,14 \text{ kg}$

▪ março: $|22 - f(3)| = |22 - (2,43 \cdot 3 + 16)| = 1,29 \rightarrow 1,29 \text{ kg}$

▪ abril: $|26 - f(4)| = |26 - (2,43 \cdot 4 + 16)| = 0,28 \rightarrow 0,28 \text{ kg}$

▪ maio: $|29 - f(5)| = |29 - (2,43 \cdot 5 + 16)| = 0,85 \rightarrow 0,85 \text{ kg}$

▪ junho: $|30 - f(6)| = |30 - (2,43 \cdot 6 + 16)| = 0,58 \rightarrow 0,58 \text{ kg}$

▪ julho: $|33 - f(7)| = |33 - (2,43 \cdot 7 + 16)| = 0,01 \rightarrow 0,01 \text{ kg}$

c) $f(7) - f(1) = (2,43 \cdot 7 + 16) - (2,43 \cdot 1 + 16) = 33,01 - 18,43 = 14,58 \rightarrow 14,58 \text{ kg}$

d) Resposta pessoal. Espera-se que os estudantes reconheçam que a função determina uma aproximação razoável para os dados aferidos pelo centro de recuperação (diferença quase sempre abaixo de 1 kg em cada mês).

32. a) Como o coeficiente a corresponde à taxa de variação da função, ao alterá-lo, a inclinação da reta correspondente ao gráfico da função f se altera.

b) Como o coeficiente b corresponde à ordenada do ponto onde a reta cruza o eixo y , ao alterá-lo, o gráfico da função f é transladado verticalmente.

33. a) Seja $y = ax + b$. Temos o seguinte.

▪ Para $x = -1$, tem-se $y = 1$.

Logo, $-a + b = 1$.

▪ Para $x = 1$, tem-se $y = 5$.

Logo, $a + b = 5$.

$$\begin{cases} -a + b = 1 \\ a + b = 5 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a - b = -1 \\ a + b = 5 \end{cases} \Rightarrow 2a + 0b = 4 \Rightarrow a = 2$$

Substituindo $a = 2$ na primeira equação, temos:

$$-2 + b = 1 \Rightarrow b = 3$$

Portanto, $y = 2x + 3$.

b) Seja $y = ax + b$. Temos que:

$$a = \frac{-1 - 2}{2 - 1} = -1 - 2 = -3$$

Segue que:

para $x = 1$, tem-se $y = 2$.

Logo, $-3 \cdot 1 + b = 2 \Rightarrow b = 5$

Portanto, $y = -3x + 5$.

c) Seja $y = ax + b$. Temos $b = -6$, pois o gráfico cruza o eixo y no ponto de ordenada -6 . Segue que:

para $x = 1$, tem-se $y = 0$.

Logo, $a \cdot 1 - 6 = 0 \Rightarrow a = 6$

Portanto, $y = 6x - 6$.

d) Seja $y = ax + b$, como a reta passa pelos pontos de coordenadas $(1, 3)$,

$$(2, 1), \text{ temos: } a = \frac{1 - 3}{2 - 1} = -2.$$

Segue que:

$$3 = -2 \cdot 1 + b \Rightarrow b = 5$$

Portanto, $y = -2x + 5$.

34. Inicialmente, vamos determinar a equação de cada reta.

▪ O coeficiente angular da reta s é

$$\frac{2 - (-8)}{0 - (-2)} = 5, \text{ e seu coeficiente linear é } 0 - (-2)$$

2, pois a reta cruza o eixo y no ponto de ordenada 2. Logo, $y = 5x + 2$.

▪ O coeficiente angular de r é

$$\frac{-5 - 1}{0 - (-3)} = -2, \text{ e seu coeficiente linear é } -5, \text{ pois a reta cruza o eixo } y \text{ no ponto de ordenada } -5.$$

Logo, $y = -2x - 5$.

Assim, segue que:

$$5x + 2 = -2x - 5 \Rightarrow 7x = -7 \Rightarrow x = -1$$

Para $x = -1$, temos:

$$y = 5 \cdot (-1) + 2 = -3$$

Portanto, $P(-1, -3)$.

35. Para resolver os itens a, b e c, vamos determinar a lei de formação da função p . Temos:

$$a = \frac{p(21) - p(3)}{21 - 3} = \frac{35 - 15}{18} =$$

$$= \frac{20}{18} = \frac{10}{9}$$

$$p(3) = 15 \Rightarrow \frac{10}{9} \cdot 3 + b = 15 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow b = 15 - \frac{10}{3} = \frac{35}{3}$$

Assim, $p(x) = \frac{10}{9}x + \frac{35}{3}$.

a) $p(25,5) = \frac{10}{9} \cdot 25,5 + \frac{35}{3} = \frac{85}{3} + \frac{35}{3} = \frac{120}{3} = 40 \rightarrow \text{R\$ } 40,00$

b) $p(x) = 50 \Rightarrow \frac{10}{9}x + \frac{35}{3} = 50 \Rightarrow \frac{10}{9}x = \frac{115}{3} \Rightarrow x = 34,5 \rightarrow 34,5 \text{ km}$

c) Para obter a equação reduzida da reta correspondente ao gráfico da função p , podemos tomar $p(x) = y$:

$y = \frac{10}{9}x + \frac{35}{3}$

Para obter a equação geral da reta, inicialmente multiplicamos cada membro da equação reduzida por 9:

$9 \cdot y = 9 \cdot \frac{10}{9}x + 9 \cdot \frac{35}{3} \Rightarrow 9y = 10x + 105 \Rightarrow 9y - 10x - 105 = 0$

36. a) Considerando que a reta r passa pelos pontos de coordenadas $(6, 5)$, $(-2, -1)$, temos que o coeficiente angular da equação de r é dado por:

$a_r = \frac{-1 - 5}{-2 - 6} = \frac{-6}{-8} = \frac{3}{4}$

Assim, a equação de r é dada por:

$y = y_0 + a(x - x_0) \Rightarrow y = 5 + \frac{3}{4}(x - 6) \Rightarrow y = 5 - \frac{18}{4} + \frac{3}{4}x \Rightarrow 3x - 4y = -2$

- Considerando que a reta s passa pelos pontos de coordenadas $(-1, 6)$, $(5, -2)$, temos que o coeficiente angular da equação de s é dado por:

$a_s = \frac{-2 - 6}{5 - (-1)} = \frac{-8}{6} = -\frac{4}{3}$

Assim, a equação de s é dada por:

$y = y_0 + a(x - x_0) \Rightarrow y = 6 - \frac{4}{3}[x - (-1)] \Rightarrow y = 6 - \frac{4}{3}x - \frac{4}{3} \Rightarrow 4x + 3y = 14$

b) Isolando y em cada equação e igualando os resultados obtidos, temos:

$\frac{1}{2} + \frac{3}{4}x = \frac{14}{3} - \frac{4}{3}x \Rightarrow x = 2$

Segue que:

$y = \frac{1}{2} + \frac{3}{4} \cdot 2 = 2$

Portanto, o ponto em que as retas r e s se cruzam tem coordenadas $(2, 2)$.

37. a) $y = y_0 + a(x - x_0) \Rightarrow y = 4 + 3(x - 1) \Rightarrow y = 3x + 1$
b) $y = y_0 + a(x - x_0) \Rightarrow y = 1 + \left(-\frac{1}{2}\right)(x - 2) \Rightarrow y = 2 - \frac{x}{2}$

38. a) coeficiente angular:

$a = \frac{3 - 0}{1 - (-2)} = \frac{3}{3} = 1$

$y = y_0 + a(x - x_0) \Rightarrow y = 3 + 1(x - 1) \Rightarrow y = x + 2$

b) coeficiente angular:

$a = \frac{-5 - 7}{2 - (-1)} = \frac{-12}{3} = -4$

$y = y_0 + a(x - x_0) \Rightarrow y = -5 + (-4)(x - 2) \Rightarrow y = -4x + 3$

c) coeficiente angular:

$a = \frac{7 - 5}{3 - (-3)} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

$y = y_0 + a(x - x_0) \Rightarrow y = 7 + \frac{1}{3}(x - 3) \Rightarrow y = \frac{x}{3} + 6$

d) coeficiente angular:

$a = \frac{2 - (-2)}{3 - (-1)} = \frac{4}{4} = 1$

$y = y_0 + a(x - x_0) \Rightarrow y = 2 + 1(x - 3) \Rightarrow y = x - 1$

39. a) coeficiente angular:

$a = \frac{2 - 2}{7 - 5} = \frac{0}{2} = 0$

$y = y_0 + a(x - x_0) \Rightarrow y = 2 + 0(x - 5) \Rightarrow y = 2$

b) coeficiente angular:

$a = \frac{5 - 5}{0 - (-3)} = \frac{0}{3} = 0$

$y = y_0 + a(x - x_0) \Rightarrow y = 5 + 0(x - 0) \Rightarrow y = 5$

c) coeficiente angular:

$a = \frac{-3 - (-3)}{6 - 1} = \frac{0}{5} = 0$

$y = y_0 + a(x - x_0) \Rightarrow y = -3 + 0(x - 1) \Rightarrow y = -3$

d) coeficiente angular:

$a = \frac{-1 - (-1)}{4 - (-7)} = \frac{0}{11} = 0$

$y = y_0 + a(x - x_0) \Rightarrow y = -1 + 0(x - 4) \Rightarrow y = -1$

Resposta esperada: Em cada item, a ordenada dos dois pontos indicados são iguais. Em cada item, a equação obtida tem o coeficiente angular igual a zero, o que implica que a reta é paralela ao eixo das abscissas e pode ser expressa na forma $y = c$, sendo c a ordenada dos dois pontos indicados.

Integrando com...

- Alternativas **a** e **d**, pois, como a velocidade é constante, não varia com o tempo e, em um mesmo intervalo de tempo, o móvel percorre a mesma distância.
- a) O ponto de coordenadas $(2, 50)$ representa que, no tempo correspondente a 2 s, a posição do automóvel era de 50 m.
b) $S(12) = 30 + 10 \cdot 12 = 150 \rightarrow 150 \text{ m}$
c) $200 = 30 + 10t \Rightarrow t = 17 \rightarrow 17 \text{ s}$
- a) Posição inicial: $S(0) = 0 \rightarrow 0 \text{ m}$
Posição no instante 4 s: $S(4) = 200 \rightarrow 200 \text{ m}$
b) A velocidade do móvel corresponde à taxa de variação de S :
 $\frac{S(4) - S(0)}{4 - 0} = \frac{200 - 0}{4} = 50 \rightarrow 50 \text{ m/s}$
c) $S(2) - S(0) = 100 - 0 = 100 \rightarrow 100 \text{ m}$

d) Como a velocidade desse móvel é 50 m/s e sua posição inicial é 0 m, temos:

$S(t) = 0 + 50t \Rightarrow S(t) = 50t$

4. $a = \frac{60 - 10}{1 - 0} = \frac{50}{1} = 50$

Como o automóvel percorre 50 km a cada hora e parte da posição 10 km, temos: $S(t) = 10 + 50t$

5. a) Analisando o valor da ordenada do ponto cuja abscissa é zero em cada caso, temos: móvel **A**: 0 m; móvel **B**: 200 m.

b) O ponto em que as duas retas se cruzam no gráfico tem abscissa igual a 40. Logo, os móveis se encontram no instante $t = 40 \text{ s}$.

c) Móvel **A**:

Taxa de variação:

$a = \frac{500 - 0}{40 - 0} = \frac{500}{40} = 12,5$

Como $b = 0$, temos $S_A(t) = 12,5t$

Móvel **B**:

Taxa de variação:

$a = \frac{500 - 200}{40 - 0} = \frac{300}{40} = 7,5$

Como $b = 200$, temos $S_B(t) = 200 + 7,5t$

Móvel **A**: $S_A(80) = 12,5 \cdot 80 = 1000 \rightarrow 1000 \text{ m}$

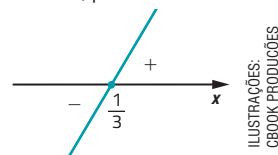
Móvel **B**: $S_B(80) = 200 + 7,5 \cdot 80 = 800 \rightarrow 800 \text{ m}$

d) Móvel **A**: $S_A(t) = 12,5t$

Móvel **B**: $S_B(t) = 200 + 7,5t$

6. Resposta pessoal. Espera-se que os estudantes consigam estabelecer a taxa de variação em cada experimento e considerem possíveis erros de medição. A partir da taxa de variação, eles podem comparar, por exemplo, a velocidade da bolha no experimento realizado pelos grupos.

40. a) zero de f : $6x - 2 = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{3}$
f é crescente, pois $a = 6 > 0$

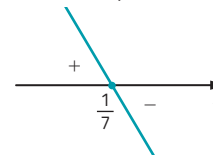


$f(x) > 0$ para $x > \frac{1}{3}$, $f(x) = 0$ para $x = \frac{1}{3}$

e $f(x) < 0$ para $x < \frac{1}{3}$

- b) zero de g : $-7x + 1 = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{7}$

g é decrescente, pois $a = -7 < 0$



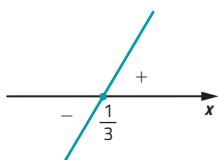
$g(x) < 0$ para $x > \frac{1}{7}$, $g(x) = 0$ para $x = \frac{1}{7}$

e $g(x) > 0$ para $x < \frac{1}{7}$

ILUSTRAÇÕES:
CBOOK PRODUÇÕES

c) zero de h : $9x - 3 = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{3}$

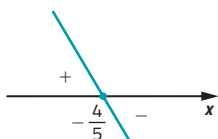
▪ h é crescente, pois $a = 9 > 0$



$h(x) > 0$ para $x > \frac{1}{3}$, $h(x) = 0$ para $x = \frac{1}{3}$ e $h(x) < 0$ para $x < \frac{1}{3}$

d) zero de m : $-5x - 4 = 0 \Rightarrow x = -\frac{4}{5}$

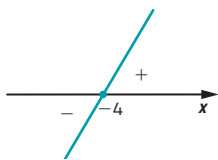
▪ m é decrescente, pois $a = -5 < 0$



$m(x) < 0$ para $x > -\frac{4}{5}$, $m(x) = 0$ para $x = -\frac{4}{5}$ e $m(x) > 0$ para $x < -\frac{4}{5}$

e) zero de n : $3x + 12 = 0 \Rightarrow x = -4$

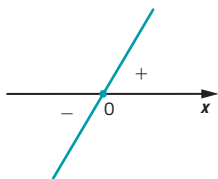
▪ n é crescente, pois $a = 3 > 0$



$n(x) > 0$ para $x > -4$, $n(x) = 0$ para $x = -4$ e $n(x) < 0$ para $x < -4$

f) zero de p : $10x = 0 \Rightarrow x = 0$

▪ p é crescente, pois $a = 10 > 0$



$p(x) > 0$ para $x > 0$, $p(x) = 0$ para $x = 0$ e $p(x) < 0$ para $x < 0$

41. a) Como os pontos de coordenadas (1, 4) e (3, -4) pertencem ao gráfico da função f , podemos determinar que a lei de formação de f é $f(x) = -4x + 8$.

Assim, o zero de f é dado por:

$$f(x) = 0 \Rightarrow -4x + 8 = 0 \Rightarrow x = 2$$

Portanto, como f é decrescente ($a = -4 < 0$), temos $f(x) > 0$ para $x < 2$.

b) Como os pontos de coordenadas (2, -3) e (4, 4) pertencem ao gráfico da função f , podemos determinar que a lei de formação de f é $f(x) = \frac{7}{2}x - 10$. Assim, o zero de f é dado por:

$$f(x) = 0 \Rightarrow \frac{7}{2}x - 10 = 0 \Rightarrow x = \frac{20}{7}$$

Portanto, como f é crescente

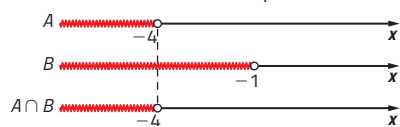
($a = \frac{7}{2} > 0$), temos $f(x) > 0$ para $x > \frac{20}{7}$.

42. $f(x) > 0 \Rightarrow -3x - 12 > 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow -3x > 12 \Rightarrow x < \frac{12}{-3} \Rightarrow x < -4 \quad (A)$$

▪ $g(x) > 0 \Rightarrow -4x - 4 > 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow -4x > 4 \Rightarrow x < \frac{4}{-4} \Rightarrow x < -1 \quad (B)$$



Portanto, ambas as funções são positivas para $x \in]-\infty, -4[$.

43. Seja $f: [0, 10] \rightarrow \mathbb{R}$, dada por $f(t) = at + b$, a função afim que representa a temperatura em função do tempo t de resfriamento. Temos $f(2) = 8$ e $f(8) = -4$. Assim:

$$\begin{cases} 2a + b = 8 \\ 8a + b = -4 \end{cases} \cdot (-1) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2a + b = 8 \\ -8a - b = 4 \end{cases} \Rightarrow -6a = 12 \Rightarrow a = -2$$

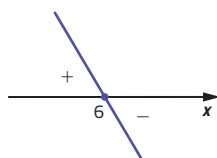
Substituindo $a = -2$ na primeira equação, temos:

$$2 \cdot (-2) + b = 8 \Rightarrow -4 + b = 8 \Rightarrow b = 12$$

Assim, $f(t) = -2t + 12$.

▪ zero de f : $-2t + 12 = 0 \Rightarrow t = 6$

▪ f é decrescente, pois $a = -2 < 0$



positiva: $0 \leq t < 6$; igual a zero: $t = 6$; negativa: $6 < t \leq 10$

44. Para $f(x) > 0$, temos $ax + b > 0 \Rightarrow ax > -b$. Como f é decrescente, temos $a < 0$. Assim, dividimos a desigualdade $ax > -b$ por a e invertemos o sentido da desigualdade:

$$x < \frac{-b}{a}$$

45. a) Como, por 2 horas, no estacionamento A, o motorista pagará R\$ 24,00 ($2 \cdot 12 = 24$) e, no estacionamento B, pagará R\$ 32,00 ($20 + 2 \cdot 6 = 32$), é mais vantajoso o estacionamento A para esse período.

b) Considerando que, no estacionamento A, paga-se R\$ 12,00 por hora (sem valor fixo) e que, no estacionamento B, paga-se R\$ 6,00 por hora mais R\$ 20,00 fixos, temos:

▪ Estacionamento A: $V(t) = 12t$

▪ Estacionamento B: $V(t) = 6t + 20$

c) Para determinar o tempo t em que o estacionamento B é mais vantajoso que o A, fazemos:

$$12t > 6t + 20 \Rightarrow 6t > 20 \Rightarrow t > \frac{20}{6}$$

Como as frações de hora representam uma hora completa na cobrança, temos $t > 3$.

Portanto, para períodos de até 3 horas de uso, o estacionamento A é mais vantajoso financeiramente para o motorista. Para períodos a partir de 3 horas, o estacionamento B é mais vantajoso.

46. alternativa a

Ana alcança Beatriz quando $P_A = P_B$. Logo:

$$200 + 25t = 500 + 20t \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 5t = 300 \Rightarrow t = 60 \rightarrow 60 \text{ minutos.}$$

47. a) Como a figura representa um polígono regular de 7 lados, nomeamos esse polígono heptágono regular.

b) $f:]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$, definida por $f(x) = 7x$

c) $f(4) = 7 \cdot 4 = 28$

Resposta esperada: Esse cálculo indica que um heptágono regular tem perímetro com 28 unidades de comprimento quando cada um de seus lados mede 4 unidades de comprimento.

48. O polígono regular em que cada lado mede 2,5 unidades de comprimento tem perímetro de 15 unidades de comprimento; logo, se n é a quantidade de lados do polígono, então:

$$n \cdot 2,5 = 15 \Rightarrow n = \frac{15}{2,5} = 6$$

Portanto, o polígono é um hexágono regular.

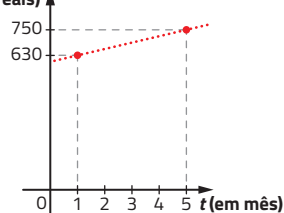
49. a) 1 mês: $M = 600(1 + 0,05 \cdot 1) = 630 \rightarrow \text{R\$ } 630,00$

▪ 5 meses: $M = 600(1 + 0,05 \cdot 5) = 750 \rightarrow \text{R\$ } 750,00$

b) $M = \frac{600}{c}(1 + \frac{0,05}{i}t) = 30t + 600$

Assim, temos $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$, definida por $f(t) = 30t + 600$.

c) M (em reais)



50. a) O perímetro do quadrado corresponde ao quádruplo da medida dos seus lados, e a área, ao quadrado dessas medidas. Assim, os números indicados na coluna correspondente ao perímetro equivalem ao quádruplo dos números indicados na coluna correspondente à medida do lado, e os números indicados na coluna correspondente à área equivalem ao quadrado dos números indicados na coluna correspondente à medida do lado.

b) Perímetro: $4x$; área: x^2 .

c) Não. Por exemplo, um quadrado com 3 cm de lado tem 9 cm² de área, já um quadrado com 6 cm de lado (o dobro de 3 cm) tem 36 cm² de área, e o dobro de 9 cm² é 18 cm².

d) Resposta esperada: Sim, pois, considerando um quadrado cujo lado mede x , temos que seu perímetro é $4x$. Então, ao dobrarmos a medida do lado dele, obtemos $2x$, e seu perímetro será de $4 \cdot 2x = 8x = 2 \cdot 4x$, ou seja, o dobro do perímetro do quadrado de lado x .

e) $p(x) = 4x$; $s(x) = x^2$. Apenas p é uma função afim, já que s tem a variável independente com expoente 2.

51. a) O capital é o montante correspondente ao tempo de aplicação $t = 0$. Temos:

A: R\$ 1.200,00; B: R\$ 800,00

- b) ■ instituição A: para $t = 20$, temos:

$$j = 2400 - 1200 = 1200$$

$$j = c \cdot i \cdot t \Rightarrow 1200 = 1200 \cdot i \cdot 20 \Rightarrow i = 0,05 = 5\%$$

- instituição B: para $t = 20$, temos:

$$j = 2400 - 800 = 1600$$

$$j = c \cdot i \cdot t \Rightarrow 1600 = 800 \cdot i \cdot 20 \Rightarrow i = 0,1 = 10\%$$

- c) ■ instituição A:

$$M = \underbrace{1200}_c (1 + \underbrace{0,05}_i t) = 60t + 1200$$

Assim, temos $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$, definida por $f(t) = 60t + 1200$.

- instituição B:

$$M = \underbrace{800}_c (1 + \underbrace{0,1}_i t) = 80t + 800$$

Assim, temos $g: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$, definida por $g(t) = 80t + 800$.

- d) Utilizando as funções determinadas no item c, temos:

- 1 ano (12 meses):

$$f(12) = 60 \cdot 12 + 1200 = 1920$$

$$g(12) = 80 \cdot 12 + 800 = 1760$$

Temos $f(12) > g(12)$; ou seja, o montante na instituição A é maior.

- 2 anos (24 meses):

$$f(24) = 60 \cdot 24 + 1200 = 2640$$

$$g(24) = 80 \cdot 24 + 800 = 2720$$

Temos $g(24) > f(24)$; ou seja, o montante na instituição B é maior.

52. a) Para vendas até R\$ 5.000,00, o salário é R\$ 2.000,00.

Para vendas maiores que R\$ 5.000,00 e menores ou iguais a R\$ 10.000,00, temos:

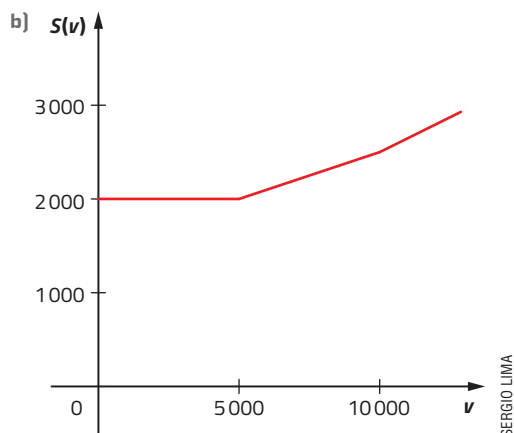
$$S(v) = 2000 + 0,10 \cdot (v - 5000) = 2000 + 0,10v - 500 = 0,10v + 1500$$

Para vendas maiores que R\$ 10.000,00, temos:

$$S(v) = 2500 + 0,15 \cdot (v - 10000) = 2500 + 0,15v - 1500 = 0,15v + 1000$$

Logo, a lei de formação de S é:

$$S(v) = \begin{cases} 2000, & \text{se } v \leq 5000 \\ 0,10v + 1500, & \text{se } 5000 < v \leq 10000 \\ 0,15v + 1000, & \text{se } v > 10000 \end{cases}$$



53. a) Para $x \leq 3$, temos $y = 25$.

Para $3 < x \leq 5$, temos um trecho da reta que passa pelos pontos de coordenadas (3, 25) e (5, 35). Assim, a taxa de variação é dada por:

$$a = \frac{35-25}{5-3} = \frac{10}{2} = 5$$

$$y = y_0 + a(x - x_0) \Rightarrow y = 25 + 5(x - 3) \Rightarrow y = 5x + 10$$

Para $x > 5$, temos o trecho da reta que passa pelos pontos de coordenadas (5, 35) e (6, 45). Assim, a taxa de variação é dada por:

$$a = \frac{45-35}{6-5} = \frac{10}{1} = 10$$

$$y = y_0 + a(x - x_0) \Rightarrow y = 35 + 10(x - 5) \Rightarrow y = 10x - 15$$

Logo, a lei de formação da função V é dada por:

$$V(x) = \begin{cases} 25, & \text{se } 0 < x \leq 3 \\ 5x + 10, & \text{se } 3 < x \leq 5 \\ 10x - 15, & \text{se } x > 5 \end{cases}$$

b) Atividade de elaboração do estudante. Espera-se que os estudantes abordem em suas questões os conceitos estudados, como taxa de variação, coeficiente angular e linear de uma função afim, função linear, função constante e representação gráfica. Eles podem, ainda, por exemplo, estimar resultados a partir de determinado consumo fictício de metros cúbicos de gás.

54. a) ■ $f(0) = 5 \cdot 0 - 20 = -20$

$$\blacksquare f(1) = 5 \cdot 1 - 20 = -15$$

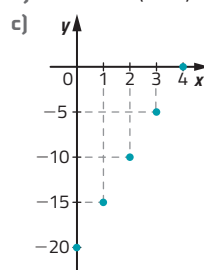
$$\blacksquare f(2) = 5 \cdot 2 - 20 = -10$$

$$\blacksquare f(3) = 5 \cdot 3 - 20 = -5$$

$$\blacksquare f(4) = 5 \cdot 4 - 20 = 0$$

$$-20, -15, -10, -5 \text{ e } 0$$

$$\text{b) } r = -15 - (-20) = 5$$



55. a) Sejam a e b números reais tais que $f(x) = ax + b$. Então:

$$f(0) = 10 \Rightarrow a \cdot 0 + b = 10 \Rightarrow b = 10$$

$$f(1) = 8 \Rightarrow a \cdot 1 + \frac{b}{10} = 8 \Rightarrow a = -2$$

$$\text{Portanto, } f(x) = -2x + 10.$$

$$\text{b) } \blacksquare f(9) = -2 \cdot 9 + 10 = -8$$

$$\blacksquare f(19) = -2 \cdot 19 + 10 = -28$$

$$\blacksquare f(99) = -2 \cdot 99 + 10 = -188$$

56. $j = c \cdot i \cdot t \Rightarrow 252 = 900 \cdot 0,07 \cdot t \Rightarrow t = 4 \rightarrow 4$ meses

57. a) Resposta pessoal. Espera-se que os estudantes respondam, por exemplo, que a quantidade de circunferências corresponde ao dobro do número da figura e que a quantidade de quadrados corresponde ao quadrado do número da figura.

b) Resposta pessoal. Espera-se que os estudantes desenhem uma figura composta de 25 quadrados e 10 circunferências, dispostas de modo que os quadrados fiquem organizados em 5 fileiras com 5 quadrados cada e que as circunferências fiquem organizadas em duas fileiras com 5 em cada, sendo uma fileira acima e outra abaixo dos quadrados.

- c) ■ Resposta esperada: (1, 4, 9, 25, ..., n^2 , ...).

$$\blacksquare \text{Resposta esperada: } (2, 4, 6, 8, 10, \dots, 2n, \dots).$$

- d) ■ $4 - 1 = 3$; $9 - 4 = 5$

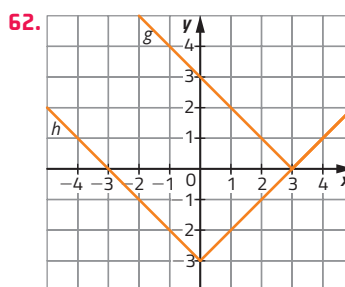
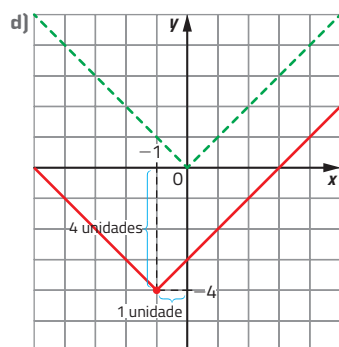
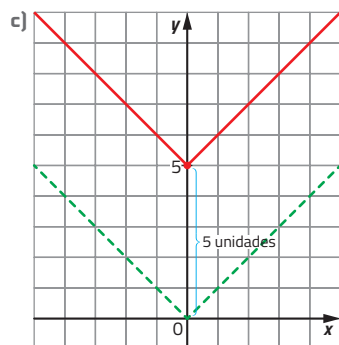
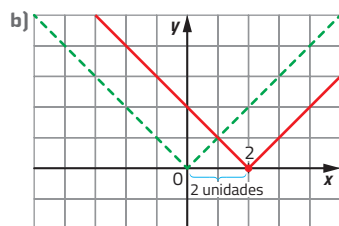
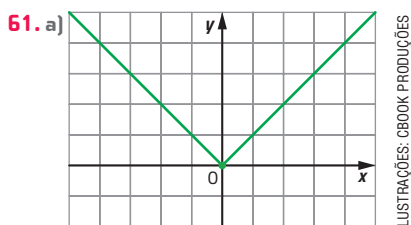
$$\blacksquare 4 - 2 = 2$$
; $6 - 4 = 2$; $8 - 6 = 2$

Resposta esperada: A sequência numérica (2, 4, 6, 8, 10, ..., $2n$, ...) é uma PA, pois, a partir do 2º termo, a diferença entre cada termo e o anterior é igual a 2, que corresponde à razão da PA.

58. Resposta pessoal. Espera-se que os estudantes reconheçam, em situações do cotidiano deles, uma sequência em que cada termo, a partir do segundo, seja igual ao anterior adicionado de um valor constante. Observar se eles definem a função relacionada à PA e se determinam elementos dessa sequência, como o primeiro termo e a razão.

59. Resposta pessoal. Espera-se que os estudantes tenham compreendido a PA como uma aplicação particular da função com domínio natural e que consigam relacionar elementos dessa função com a razão da PA às posições dos termos dela.

- 60.** a) $f(-3) = |-3 + 5| - 6 = |2| - 6 = 2 - 6 = -4$
 b) $f(4) = |4 + 5| - 6 = |9| - 6 = 9 - 6 = 3$
 c) $g(6) = |6 - 1| + 4 = |5| + 4 = 5 + 4 = 9$
 d) $g(-1) = |-1 - 1| + 4 = |-2| + 4 = 2 + 4 = 6$
 e) $f(0) + g(3) = |0 + 5| - 6 + |3 - 1| + 4 = |5| + |2| - 2 = 5 + 2 - 2 = 5$
 f) $g(-2) - f(2) = |-2 - 1| + 4 - (|2 + 5| - 6) = |-3| - |7| + 10 = 3 - 7 + 10 = 6$



Resposta esperada: O gráfico de h corresponde ao mesmo gráfico de g , deslocado três unidades para a esquerda e três unidades para baixo.

- 63. a)** O gráfico está transladado 4 unidades para a direita; logo, $g(x) = |x - 4|$.
b) O gráfico está transladado 3 unidades para cima; logo, $h(x) = |x| + 3$.
c) O gráfico está transladado 2 unidades para a esquerda e 1 unidade para cima; logo, $m(x) = |x + 2| + 1$.
 ■ Resposta pessoal. Espera-se que os estudantes demonstrem, nessa atividade, compreensão a respeito das translações com o gráfico da função modular.

- 64. a)** Como Felipe deslocou o gráfico de f 2 unidades para a direita e 5 unidades para cima, temos que $g(x) = |x - 2| + 5$.

b) Temos que:
 $g(0) = |0 - 2| + 5 = |-2| + 5 = 2 + 5 = 7$
 Logo, o gráfico cruza o eixo das ordenadas em $(0, 7)$.

- 65. a)** O gráfico de g corresponde ao gráfico de $f(x) = |x|$ transladado 7 unidades para a direita; logo, $g(x) = |x - 7|$.

- b)** ■ $g(11) = |11 - 7| = |4| = 4$
 ■ $g(12) = |12 - 7| = |5| = 5$

Logo, os pontos com abscissas 11 ou 12, que pertencem ao gráfico de g , são $(11, 4)$ e $(12, 5)$. Portanto, o alvo C é o único cujo ponto correspondente pertence ao gráfico da função g .

c) Resposta esperada: 7 pontos, pois $x - y = 12 - 5 = 7$.

- 66. alternativa d**

Para $x = 2$, de acordo com o fluxograma, temos:

$$f(2) = 2 + 2 = 4$$

Para $x = -2$, de acordo com o fluxograma, temos:

$$f(-2) = -(-2) + 4 = 2 + 4 = 6$$

A alternativa **d** é a única que apresenta uma função em que $f(2) = 4$ e $f(-2) = 6$.

O que estudei

1. Respostas pessoais.

2. Resposta pessoal.

3. Respostas pessoais.

4. a) Considerando que o valor pago será R\$ 0,50 por minuto mais R\$ 2,50 pela ativação do serviço, temos: $f(x) = 0,5x + 2,50$.

b) ■ $f(5) = 0,5 \cdot 5 + 2,50 = 5$

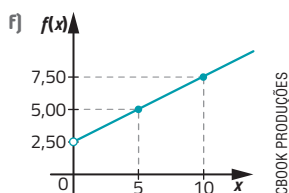
■ $f(10) = 0,5 \cdot 10 + 2,50 = 7,50$

Esses resultados indicam que o aluguel da bicicleta por 5 min e por 10 min custam, respectivamente, R\$ 5,00 e R\$ 7,50.

c) Como a função é do tipo $f(x) = ax + b$, com $a = 0,5$ e $b = 2,50$, temos que se trata de uma função afim.

d) Função crescente. Indica que, ao aumentarmos o tempo de locação da bicicleta, o valor a pagar por esse serviço também aumenta.

$$\begin{aligned} \text{e)} \quad \frac{f(20) - f(2)}{20 - 2} &= \frac{(0,5 \cdot 20 + 2,50) - (0,5 \cdot 2 + 2,50)}{18} = \\ &= \frac{12,5 - 3,5}{18} = 0,5 \end{aligned}$$



g) Todas as funções têm a taxa de variação igual à da função f , ou seja, $a = 0,5$, e termo independente b igual à ordenada do ponto cuja reta que contém o respectivo gráfico intercepta o eixo y . Assim:

- $g(x) = 0,5x + 3,5$;
- $h(x) = 0,5x + 4$;
- $j(x) = 0,5x + 1,5$;
- $m(x) = 0,5x$.

h) Resposta pessoal. Espera-se que os estudantes apliquem os conceitos estudados descrevendo uma função afim a partir de valores reais de aluguéis de patinete elétrica, bicicleta ou outro meio de locomoção. Eles ainda podem descrever funções lineares caso não haja custo de ativação do serviço.

i) Resposta pessoal. Espera-se que os estudantes reflitam a respeito dos meios de transporte utilizados pela população na região em que moram e sintetizem as informações utilizando, preferencialmente, os conceitos estudados na Unidade. Uma das conclusões possíveis é que a utilização de transporte coletivo e de meios alternativos menos poluentes pode ser uma alternativa para um futuro mais sustentável.

Praticando: Enem e vestibulares

1. alternativa b

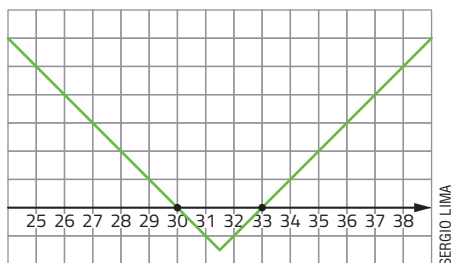
Seja x a quantidade de calçados produzidos e R\$ 28,00 o valor faturado com cada um deles, tem-se que o lucro mensal pode ser expresso por: $28x - 20000$.

2. alternativa a

90% de q é dado por: $\frac{90}{100} \cdot q = 0,9q$.
Assim, $C = 0,9q$.

3. alternativa c

$|2 \cdot 16 + b - 63,5| \leq 1,5 \Rightarrow$
 $\Rightarrow |b - 31,5| \leq 1,5 \Rightarrow |b - 31,5| - 1,5 \leq 0$
Analisando a função dada por $g(b) = |b - 31,5| - 1,5$, identificamos que o gráfico de g corresponde ao gráfico de $f(b) = |b|$ transladado 31,5 unidades para a direita e 1,5 unidade para baixo. Observe o gráfico de g .



Portanto, $g(b) \leq 0$ para $30 \leq b \leq 33$.

4. alternativa c

A trajetória do projétil **B** passa pelos pontos de coordenadas $(0, 0)$ e $(4, 2)$. Calculando o coeficiente angular da função que descreve essa trajetória, temos:

$$\frac{4 - 0}{2 - 0} = \frac{4}{2} = 2$$

Para alcançar o objetivo descrito, a nova trajetória do projétil **B** deve passar pelos pontos de coordenadas $(0, 0)$ e $(4, 16)$. Assim, o coeficiente angular da função que descreve essa trajetória deve ser:

$$\frac{16 - 0}{4 - 0} = \frac{16}{4} = 4$$

Portanto, o coeficiente angular da função que descreve a trajetória do projétil **B** deverá aumentar em 2 unidades, pois $4 - 2 = 2$.

5. alternativa a

De acordo com a equação apresentada, temos as seguintes possibilidades:

- $x \geq 0$ e $y < 0 \rightarrow x - (-y) = 1 \Rightarrow y = -x + 1$
- $x \geq 0$ e $y \geq 0 \rightarrow x - y = 1 \Rightarrow y = x - 1$
- $x < 0$ e $y < 0 \rightarrow -x - (-y) = 1 \Rightarrow y = x + 1$
- $x < 0$ e $y \geq 0 \rightarrow -x - y = 1 \Rightarrow y = -x - 1$

Portanto, ao representar a equação dada no plano cartesiano, teremos quatro semirretas.

6. alternativa d

$$Y = 160 \cdot (X - 1) + 1000 \Rightarrow Y = 160X - 160 + 1000 \Rightarrow Y = 160X + 840$$

7. alternativa d

De acordo com os gráficos, temos que, nessa empresa, a cada hora, são produzidas 20 000 peças e são faturados R\$ 4.000,00. Assim, o faturamento correspondente a cada peça é dado por: $4000 : 20000 = 0,2 \rightarrow \text{R\$ } 0,20$

Desse modo, a quantidade de peças que devem ser produzidas para se obter um faturamento de R\$ 10.000,00 é dada por:

$$10000 : 0,2 = 50000 \rightarrow 50000 \text{ peças}$$

8. alternativa c

$$C(48) = 6,00 + 0,50 \cdot 48 = 6,00 + 24,00 = 30,00 \rightarrow \text{R\$ } 30,00$$

9. alternativa c

Considerando que a função f passa pelos pontos de coordenadas $(0, 15)$ e $(5, 0)$, temos que a taxa de variação de f é dada por:

$$a_f = \frac{0 - 15}{5 - 0} = \frac{-15}{5} = -3$$

De $f(5) = 0$, segue que:

$$0 = -3 \cdot 5 + b_f \Rightarrow b_f = 15$$

Desse modo, $f(x) = -3x + 15$

Considerando que a função g passa pelos pontos de coordenadas $(0, 1)$ e $(-1, 0)$, temos que a taxa de variação de g é dada por:

$$a_g = \frac{0 - 1}{-1 - 0} = \frac{-1}{-1} = 1$$

De $g(-1) = 0$, segue que:

$$0 = 1 \cdot (-1) + b_g \Rightarrow b_g = 1$$

Desse modo, $g(x) = x + 1$.

Como w é abscissa do ponto de interseção das funções f e g , temos:

$$-3w + 15 = w + 1 \Rightarrow -4w = 1 - 15 \Rightarrow w = \frac{-14}{-4} \Rightarrow w = \frac{7}{2}$$

10. alternativa e

Temos que o gráfico da função $m(t) = at + b$ passa pelos dois pontos em que houve correlação perfeita, cujas coordenadas são $(1, 1)$ e $(3, 2)$. Assim, a taxa de variação dessa função é dada por:

$$a = \frac{2 - 1}{3 - 1} = \frac{1}{2}$$

De $m(1) = 1$, segue que:

$$1 = \frac{1}{2} \cdot 1 + b \Rightarrow b = 1 - \frac{1}{2} \Rightarrow b = \frac{1}{2}$$

$$\text{Desse modo, } m(t) = \frac{1}{2}t + \frac{1}{2}.$$

Fazendo $t = 6$, temos:

$$m(6) = \frac{1}{2} \cdot 6 + \frac{1}{2} = \frac{6}{2} + \frac{1}{2} = \frac{7}{2} = 3,5$$

Como $210 \text{ g} = 0,21 \text{ kg}$, segue que:

$$3,5 - 0,21 = 3,29 \rightarrow 3,29 \text{ kg}$$

Unidade 4 • Função quadrática

1. São exemplos de leis de formação de funções quadráticas aquelas na forma $f(x) = ax^2 + bx + c$, com $a \neq 0$. Assim, temos: **a, b, d e e.**

2. Considerando que o coeficiente a multiplica o x^2 , o coeficiente b multiplica o x e c é o termo independente, temos:

a) $a = -5$; $b = 3$; $c = -9$

b) $a = 1$; $b = 0$; $c = -0,4$

c) $a = -\frac{1}{3}$; $b = \frac{1}{7}$; $c = 4$

d) $a = 3,5$; $b = 0$; $c = 0$

e) $a = \sqrt{3}$; $b = 0$; $c = 4$

f) $a = 4$; $b = 56$; $c = 196$

3. a) $f(2) = 2^2 + 5 \cdot 2 - 7 = 7$

b) $f(-3) = (-3)^2 + 5 \cdot (-3) - 7 = -13$

c) $g(5) = -2 \cdot 5^2 + 4 \cdot 5 + 3 = -27$

d) $g(-0,3) = -2 \cdot (-0,3)^2 +$

$+ 4 \cdot (-0,3) + 3 = 1,62$

e) $f(-1) = (-1)^2 + 5 \cdot (-1) - 7 = -11$

$g(9) = -2 \cdot 9^2 + 4 \cdot 9 + 3 = -123$

$f(-1) + g(9) = -11 - 123 = -134$

f) $f(3) = 3^2 + 5 \cdot 3 - 7 = 17$

$g(-1) = -2 \cdot (-1)^2 + 4 \cdot (-1) + 3 = -3$

$3 \cdot f(3) - 2 \cdot g(-1) =$

$= 3 \cdot 17 - 2 \cdot (-3) = 57$

4. a) figura 1: 5 quadrados; figura 2: 8 quadrados; figura 3: 13 quadrados

b) Substituindo $x = 1$ em cada lei de formação apresentada, temos:

$f(x) = x^2 + 3x + 5$

$f(1) = 1^2 + 3 \cdot 1 + 5 = 9$

$f(x) = x^2 + 4$

$f(1) = 1^2 + 4 = 5$

$f(x) = -3x^2$

$f(1) = -3 \cdot 1^2 = -3$

$f(x) = x^2 + 3$

$f(1) = 1^2 + 3 = 4$

Como há uma única lei de formação em que $f(1) = 5$, temos que a lei de formação que indica a quantidade de quadrados que compõe a figura x é dada por $f(x) = x^2 + 4$.

c) $f(8) = 8^2 + 4 = 68$

Portanto, 68 quadrados compõem a figura 8 dessa sequência. Resposta pessoal.

5. a) Como a área de um quadrado é dada pelo quadrado da medida do lado, temos: $f(x) = x^2$

b) $f(5) = 5^2 = 25$

$f(3) = 3^2 = 9$

Resposta esperada: Esses cálculos indicam que quadrados cujos lados medem 5 u.c. e 3 u.c. têm área com medidas de 25 u.a. e 9 u.a., respectivamente.

c) I: incorreta, pois, se a medida do lado dobra, a medida da área quadruplica.

II: incorreta, pois, pela lei de formação da função, temos a medida do lado elevada ao quadrado, e não multiplicada por dois.

III: correta.

6. a) $d(7) = \frac{7 \cdot (7 - 3)}{2} = 14 \rightarrow$

$\rightarrow 14$ diagonais

$d(14) = \frac{14 \cdot (14 - 3)}{2} = 77 \rightarrow$

$\rightarrow 77$ diagonais

$d(18) = \frac{18 \cdot (18 - 3)}{2} = 135 \rightarrow$

$\rightarrow 135$ diagonais

b) $d(n) = \frac{n \cdot (n - 3)}{2} \Rightarrow d(n) = \frac{n^2}{2} - \frac{3n}{2}$

$a = \frac{1}{2}$; $b = -\frac{3}{2}$; $c = 0$

c) Uma diagonal é um segmento de reta com extremidades em dois vértices não consecutivos de um polígono e, ainda, cada vértice de um polígono convexo tem dois vértices consecutivos a ele. Assim, em um polígono convexo de n lados, temos que, de cada vértice, partem $n - 3$ diagonais. Dessa maneira, o total de diagonais é dado pelo produto da quantidade de vértices pela quantidade de diagonais de cada vértice, ou seja, $n \cdot (n - 3)$. Porém, nesse caso, estamos considerando duas vezes cada diagonal. Assim, o total de diagonais d , de um polígono convexo de n lados, é dado por

$d(n) = \frac{n(n - 3)}{2}$

7. Resposta pessoal. Espera-se que os estudantes definam uma função quadrática identificando cada um de seus elementos e coeficientes. Eles podem utilizar ou não contextos para a definição da função. Caso utilizem, chamar a atenção para o domínio da função de acordo com o contexto escolhido.

8. a) $f(15) = 0,2 \cdot 15^2 + 5 \cdot 15 + 200 = 320$
 $f(40) = 0,2 \cdot 40^2 + 5 \cdot 40 + 200 = 720$
 Portanto, o custo de produção diário dessa cooperativa é R\$ 320,00, quando produzem 15 bolsas, e R\$ 720,00, quando produzem 40 bolsas.

b) $f(35) = 0,2 \cdot 35^2 + 5 \cdot 35 + 200 = 620$
 lucro: $1400 - 620 = 780 \rightarrow$ R\$ 780,00

9. a) $f(x) = (x - 4) \cdot (x - 5) \Rightarrow$

$\Rightarrow f(x) = x^2 - 9x + 20$

b) $g(x) = 2 \cdot (x - 4) \cdot (x - 5) +$

$+ 2 \cdot (x - 4) \cdot (x - 2) +$

$+ 2 \cdot (x - 5) \cdot (x - 2) \Rightarrow$

$\Rightarrow g(x) = 6x^2 - 44x + 76$

c) $f(10) = 10^2 - 9 \cdot 10 + 20 = 30 \rightarrow$

$\rightarrow 30 \text{ m}^2$

$g(10) = 6 \cdot 10^2 - 44 \cdot 10 + 76 =$

$= 236 \rightarrow 236 \text{ m}^2$

10. a) $1^2 \cdot 4,9 = 4,9$ $3^2 \cdot 4,9 = 44,1$
 $2^2 \cdot 4,9 = 19,6$ $4^2 \cdot 4,9 = 78,4$

Resposta esperada: Cada número da segunda linha corresponde ao quadrado do respectivo número da primeira linha, multiplicado por 4,9.

b) Considerando a regularidade identificada no item a, temos: $4,9t^2$.

c) $f(t) = 4,9t^2$. Sim, pois a lei de formação da função é da forma $f(t) = at^2 + bt + c$, com $a = 4,9$, $b = c = 0$.

d) $f(t) = 4,9 \cdot 10^2 = 490 \rightarrow 490 \text{ m}$

e) Resposta esperada: Não, após determinado tempo, o objeto deixa de estar em queda livre, pois atingirá uma superfície.

11. a) $9 \cdot 0,90 = 8,1 \rightarrow 8,1 \text{ m}^2$

b) $0,9 + 0,5 = 1,4$; $1,2 < 1,4 < 1,5$

Resposta esperada: Com esse aumento, a rampa passa a ter 1,40 m de largura, o que a deixa admissível em relação à norma, mas abaixo do recomendado.

c) $g(x) = (x + 9) \cdot (x + 0,90) \Rightarrow$
 $\Rightarrow g(x) = x^2 + 9,9x + 8,1$

d) $g(0,6) = (0,6)^2 + 9,9 \cdot 0,6 + 8,1 = 14,4$
 Resposta esperada: Esse resultado indica que, aumentando 0,6 m no comprimento e na largura dessa rampa, sua área será de 14,4 m².

e) Resposta pessoal. Espera-se que os estudantes analisem rampas de acesso a algum prédio público do município em que moram e verifiquem a adequação ou não às normas. A pesquisa pode ser realizada na própria escola. A atividade pode ser utilizada para proporcionar uma discussão sobre a importância do respeito às normas de inclusão.

12. a) Resposta esperada: Porque, ao adicionar os termos extremos dessa sequência, obtêm-se 100 adições, e cada adição foi contada duas vezes. Assim, é preciso dividir por 2 para obter a soma correta.

b) $\frac{(1 + 20) \cdot 20}{2} = \frac{21 \cdot 20}{2} = 210$

c) $s(n) = \frac{n(1 + n)}{2}$ ou $s(n) = \frac{n^2}{2} + \frac{n}{2}$

d) $s(130) = \frac{130 \cdot (1 + 130)}{2} = 8515$ e

$s(801) = \frac{801 \cdot (1 + 801)}{2} = 321201$

13. a) $f(x) = 5x^2 + 3$

$\Delta = 0^2 - 4 \cdot 5 \cdot 3 = -60 < 0$

Para f , não existem zeros reais.

b) $f(x) = 8x - 2x^2$

$\Delta = 8^2 - 4 \cdot (-2) \cdot 0 = 64$

$x = \frac{-8 \pm \sqrt{64}}{2 \cdot (-2)} = \frac{-8 \pm 8}{-4} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ \text{ou} \\ x = 4 \end{cases}$

c) $f(x) = x^2 - 10x + 25$

$\Delta = (-10)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 25 = 0$

$x = \frac{-(-10) \pm \sqrt{0}}{2 \cdot 1} = \frac{10 \pm 0}{2} = 5$

d) $f(x) = -2x^2 + 3x - 5$

$\Delta = 3^2 - 4 \cdot (-2) \cdot (-5) = -31 < 0$

Para f , não existem zeros reais.

e) $f(x) = 3x^2 + 8x + 4$

$\Delta = 8^2 - 4 \cdot 3 \cdot 4 = 16$

$x = \frac{-8 \pm \sqrt{16}}{2 \cdot 3} = \frac{-8 \pm 4}{6} \Rightarrow \begin{cases} x = -2 \\ \text{ou} \\ x = -\frac{2}{3} \end{cases}$

f) $f(x) = -2x^2 + 2x + 24$

$\Delta = 2^2 - 4 \cdot (-2) \cdot 24 = 196$

$x = \frac{-2 \pm \sqrt{196}}{2 \cdot (-2)} = \frac{-2 \pm 14}{-4} \Rightarrow \begin{cases} x = -3 \\ \text{ou} \\ x = 4 \end{cases}$

14. Resposta pessoal. Espera-se que os estudantes possam resolver as equações da atividade 13 de outra maneira e obter os mesmos resultados.

15. $g(x) = (2m - 3)x^2 + 2x + 2$

$\Delta = 2^2 - 4 \cdot (2m - 3) \cdot 2 = 28 - 16m$

a) $\Delta > 0 \Rightarrow 28 - 16m > 0 \Rightarrow m < \frac{7}{4}$

b) $\Delta = 0 \Rightarrow 28 - 16m = 0 \Rightarrow m = \frac{7}{4}$

c) $\Delta < 0 \Rightarrow 28 - 16m < 0 \Rightarrow m > \frac{7}{4}$

16. a) $s(20) = -0,01 \cdot 20^2 + 1,2 \cdot 20 - 11 = 9$

Representa que, se forem vendidas 20 cadeiras na semana, a microempresa terá um lucro de R\$ 9,00 por cadeira.

b) $s(80) = -0,01 \cdot 80^2 + 1,2 \cdot 80 - 11 = 21$

$21 \cdot 80 = 1680 \rightarrow \text{R\$ } 1.680,00$

c) $0 = -0,01x^2 + 1,2x - 11$

$\Delta = 1,2^2 - 4 \cdot (-0,01) \cdot (-11) = 1$

$x = \frac{-1,2 \pm \sqrt{1}}{2 \cdot (-0,01)} = \frac{-1,2 \pm 1}{-0,02} \Rightarrow \begin{cases} x = 10 \\ \text{ou} \\ x = 110 \end{cases}$

10 cadeiras ou 110 cadeiras

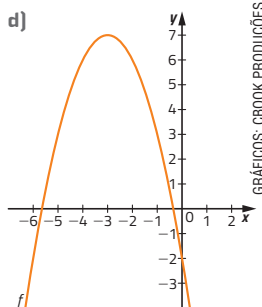
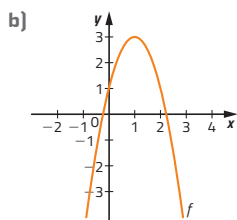
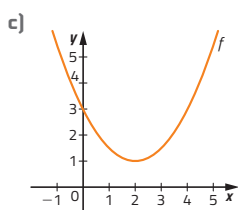
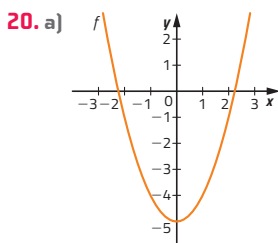
17. a) $v(0) = -\frac{1}{12} \cdot 0^2 + 48 = 48 \rightarrow 48$ metros cúbicos

b) $v(6) = -\frac{1}{12} \cdot 6^2 + 48 = 45 \rightarrow 45$ metros cúbicos

c) $0 = -\frac{1}{12}t^2 + 48 \Rightarrow \frac{1}{12}t^2 = 48 \Rightarrow t^2 = 576 \Rightarrow t = 24 \rightarrow 24$ horas

18. Ao resolvermos uma equação do 2º grau, analisamos o discriminante Δ para avaliar suas raízes reais: se $\Delta > 0$, a equação tem duas raízes reais e distintas; se $\Delta = 0$, a equação tem duas raízes reais e iguais; se $\Delta < 0$, a equação não tem raiz real. Assim, temos: A: $\Delta > 0$? e B: $\Delta < 0$?

19. $x_1 + x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} + \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-b + \sqrt{\Delta} - b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-2b}{2a} = -\frac{b}{a}$
 $x_1 \cdot x_2 = \left(\frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}\right) \cdot \left(\frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}\right) = \frac{b^2 + b\sqrt{\Delta} - b\sqrt{\Delta} - \Delta}{4a^2} = \frac{b^2 - \Delta}{4a^2} = \frac{b^2 - (b^2 - 4ac)}{4a^2} = \frac{4ac}{4a^2} = \frac{c}{a}$



GRÁFICOS: CBOOK PRODUÇÕES

21. a) ■ Interseção com o eixo x

$f(x) = 0 \Rightarrow 4x^2 - 2x - 12 = 0$

$\Delta = (-2)^2 - 4 \cdot 4 \cdot (-12) = 196$

$x = \frac{-(-2) \pm \sqrt{196}}{2 \cdot 4} = \frac{2 \pm 14}{8} \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ \text{ou} \\ x = -\frac{3}{2} \end{cases}$

■ Interseção com o eixo y

$f(0) = 4 \cdot 0^2 - 2 \cdot 0 - 12 = -12$

Portanto, o gráfico de f intersecta o eixo x nos pontos de coordenadas $(-\frac{3}{2}, 0)$ e $(2, 0)$ e o eixo y no ponto de coordenadas $(0, -12)$.

b) ■ Interseção com o eixo x

$f(x) = 0 \Rightarrow -3x^2 + 4x + 7 = 0$

$\Delta = 4^2 - 4 \cdot (-3) \cdot 7 = 100$

$x = \frac{-4 \pm \sqrt{100}}{2 \cdot (-3)} = \frac{-4 \pm 10}{-6} \Rightarrow \begin{cases} x = -1 \\ \text{ou} \\ x = \frac{7}{3} \end{cases}$

■ Interseção com o eixo y

$f(0) = -3 \cdot 0^2 + 4 \cdot 0 + 7 = 7$

Portanto, o gráfico de f intersecta o eixo x nos pontos de coordenadas $(-1, 0)$ e $(\frac{7}{3}, 0)$ e o eixo y no ponto de coordenadas $(0, 7)$.

c) ■ Interseção com o eixo x

$f(x) = 0 \Rightarrow \frac{x^2}{5} - 3x + 10 = 0$

$\Delta = (-3)^2 - 4 \cdot \frac{1}{5} \cdot 10 = 1$

$x = \frac{-(-3) \pm \sqrt{1}}{2 \cdot \frac{1}{5}} = \frac{3 \pm 1}{\frac{2}{5}} \Rightarrow \begin{cases} x = 5 \\ \text{ou} \\ x = 10 \end{cases}$

■ Interseção com o eixo y

$f(0) = \frac{0^2}{5} - 3 \cdot 0 + 10 = 10$

Portanto, o gráfico de f intersecta o eixo x nos pontos de coordenadas $(5, 0)$ e $(10, 0)$ e o eixo y no ponto de coordenadas $(0, 10)$.

d) ■ Interseção com o eixo x

$f(x) = 0 \Rightarrow -2x^2 + 8x - 8 = 0$

$\Delta = 8^2 - 4 \cdot (-2) \cdot (-8) = 0$

$x = \frac{-8 \pm \sqrt{0}}{2 \cdot (-2)} = \frac{-8}{-4} = 2$

■ Interseção com o eixo y

$f(0) = -2 \cdot 0^2 + 8 \cdot 0 - 8 = -8$

Portanto, o gráfico de f intersecta o eixo x no ponto de coordenadas $(2, 0)$ e o eixo y no ponto de coordenadas $(0, -8)$.

22. a) Resposta esperada: Temos que $a < 0$, pois a parábola tem concavidade voltada para baixo; $b < 0$, pois a parábola intersecta o eixo y no ramo decrescente; $c < 0$, pois a parábola intersecta o eixo y abaixo da origem dos eixos.

b) Resposta esperada: Temos que $a > 0$, pois a parábola tem concavidade voltada para cima; $b > 0$, pois a parábola intersecta o eixo y no ramo crescente; $c = 0$, pois a parábola intersecta o eixo y na origem dos eixos.

c) Resposta esperada: Temos que $a > 0$, pois a parábola tem concavidade voltada para cima; $b < 0$, pois a parábola intersecta o eixo y no ramo decrescente; $c > 0$, pois a parábola intersecta o eixo y acima da origem dos eixos.

d) Resposta esperada: Temos que $a < 0$, pois a parábola tem concavidade voltada para baixo; $b = 0$, pois a parábola intersecta o eixo y em seu vértice; $c > 0$, pois a parábola intersecta o eixo y acima da origem dos eixos.

23. Temos que a função f é definida por $f(x) = ax^2 + bx + c$.

Como o gráfico intersecta o eixo y no ponto de coordenadas $(0, -3)$, temos $c = -3$.

Já o eixo x é intersectado pelo gráfico nos pontos de coordenadas $(-6, 0)$ e $(2, 0)$, ou seja, -6 e 2 são os zeros de f . Assim:

$f(-6) = 0 \Rightarrow a \cdot (-6)^2 + b \cdot (-6) + (-3) = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow 36a - 6b - 3 = 0$

$f(2) = 0 \Rightarrow a \cdot 2^2 + b \cdot 2 + (-3) = 0 \Rightarrow 4a + 2b - 3 = 0$

Para obter os valores de a e b , resolvemos o seguinte sistema de equações:

$\begin{cases} 36a - 6b - 3 = 0 \\ 4a + 2b - 3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = \frac{1}{4} \\ \text{e} \\ b = 1 \end{cases}$

Logo, $f(x) = \frac{x^2}{4} + x - 3$.

24. a) Como o vértice corresponde ao ponto de interseção da parábola com o eixo de simetria dela, temos que as coordenadas do vértice dessa parábola são $V(2, 5)$. Analisando o gráfico, algumas respostas de pontos simétricos possíveis são os de coordenadas: $(0, 4)$ e $(4, 4)$; $(-2, 1)$ e $(6, 1)$.

b) Em relação aos pontos simétricos de coordenadas $(0, 4)$ e $(4, 4)$, temos:

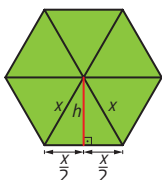
$$\frac{0+4}{2} = 2$$

Em relação aos pontos simétricos de coordenadas $(-2, 1)$ e $(6, 1)$, temos:

$$\frac{-2+6}{2} = 2$$

Resposta esperada: Quando dois pontos quaisquer do gráfico de uma função quadrática são simétricos em relação ao eixo de simetria, a média aritmética das abscissas desses pontos corresponde à abscissa do vértice da parábola.

25. Considere este hexágono regular.



a) Resposta esperada: O hexágono regular de lado medindo x pode ser decomposto em seis triângulos equiláteros de lado também medindo x . Assim, inicialmente, determinou-se a altura de cada um desses triângulos. Depois, multiplicou-se por 6 a área de cada triângulo desses, calculada de acordo com a medida do lado e da altura.

b) Como os seis lados têm mesma medida e o perímetro é a soma das medidas de todos os lados, temos: $f(x) = 6x$

$$c) x^2 = h^2 + \left(\frac{x}{2}\right)^2 \Rightarrow h = \frac{\sqrt{3}}{2}x$$

$$g(x) = 6 \cdot \frac{xh}{2} \Rightarrow g(x) = \frac{3\sqrt{3}}{2}x^2$$

d) f : função afim e função linear; g : função quadrática

e) perímetro: $f(4) = 6 \cdot 4 = 24 \rightarrow 24$ cm

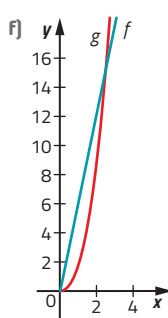
$$\text{área: } g(4) = \frac{3\sqrt{3}}{2} \cdot 4^2 = 24\sqrt{3} \rightarrow$$

$$\rightarrow 24\sqrt{3} \text{ cm}^2$$

$$\text{perímetro: } f(8) = 6 \cdot 8 = 48 \rightarrow 48 \text{ cm}$$

$$\text{área: } g(8) = \frac{3\sqrt{3}}{2} \cdot 8^2 = 96\sqrt{3} \rightarrow$$

$$\rightarrow 96\sqrt{3} \text{ cm}^2$$



g) I) Resposta esperada: Temos que o perímetro de um hexágono regular de lado x é dado por $6x$. Ao multiplicarmos x por uma constante real $k > 0$, o perímetro do hexágono será igual a $6 \cdot (kx) = k \cdot (6x)$.

II) Resposta esperada: Temos que a área de um hexágono regular de lado x é dada por $\frac{3\sqrt{3}}{2}x^2$. Ao multiplicarmos x por uma constante real $k > 0$, a área do hexágono será igual a $\frac{3\sqrt{3}}{2} \cdot (kx)^2 = \frac{3\sqrt{3}}{2}k^2x^2 = k^2 \cdot \left(\frac{3\sqrt{3}}{2} \cdot x^2\right)$.

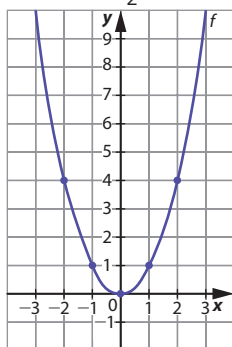
26. a) Como todas as funções são simétricas em relação ao eixo y , temos:

$$f(-2) = f(2) \Rightarrow A = 4$$

$$g(1) = g(-1) \Rightarrow B = -2$$

$$h(-1) = h(1) \Rightarrow C = \frac{1}{2}$$

b)



EDITORIA DE ARTE

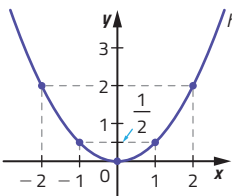
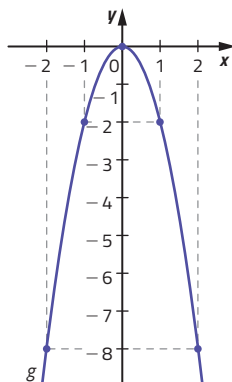


ILUSTRAÇÃO E GRÁFICOS: CBOOK PRODUÇÕES

c) f : $a > 0$, $b = 0$ e $c = 0$, pois a parábola tem concavidade voltada para cima, intersecta o eixo das ordenadas no vértice, que corresponde ao ponto de abscissa igual a 0.

g : $a < 0$, $b = 0$ e $c = 0$, pois a parábola tem concavidade voltada para baixo, intersecta o eixo das ordenadas no vértice, que corresponde ao ponto de abscissa igual a 0.

h : $a > 0$, $b = 0$ e $c = 0$, pois a parábola tem concavidade voltada para cima, intersecta o eixo das ordenadas no vértice, que corresponde ao ponto de abscissa igual a 0.

d) Todas as funções são do tipo $f(x) = ax^2$, pois, em todos os casos, os coeficientes b e c são nulos. Assim, conhecendo um ponto da função, é possível determinar o coeficiente a .

$$\bullet f(1) = 1 \Rightarrow a \cdot 1^2 = 1 \Rightarrow a = 1$$

$$\text{Logo, } f(x) = x^2.$$

$$\bullet g(1) = -2 \Rightarrow a \cdot 1^2 = -2 \Rightarrow a = -2$$

$$\text{Logo, } g(x) = -2x^2.$$

$$\bullet h(1) = \frac{1}{2} \Rightarrow a \cdot 1^2 = \frac{1}{2} \Rightarrow a = \frac{1}{2}$$

$$\text{Logo, } h(x) = \frac{x^2}{2}.$$

Resposta esperada: As três funções quadráticas são definidas por uma lei de formação do tipo $y = ax^2$, com $a \neq 0$, e o vértice da parábola correspondente ao gráfico de cada uma delas coincide com a origem O dos eixos cartesianos.

27. Espera-se que os estudantes escrevam a lei de formação $f(x) = ax^2 + bx + c$, com $a < 0$ e $b < 0$, e c um número real qualquer. Alguns exemplos de resposta são: $f(x) = -2x^2 - 3x$; $f(x) = -x^2 - x + 3$.

$$28. \frac{f(3) - f(0)}{3 - 0} = \frac{15 - 0}{3} = 5$$

Resposta esperada: Esse resultado indica que, no intervalo de tempo de 0 s até 3 s após o momento em que a bola foi lançada, sua altura variou, em média, 5 m a cada segundo.

29. a) $f(-4) = 3 \cdot (-4)^2 + 2 \cdot (-4) = 40$

$$f(1) = 3 \cdot 1^2 + 2 \cdot 1 = 5$$

$$\frac{f(1) - f(-4)}{1 - (-4)} = \frac{5 - 40}{5} = -7$$

$$b) f(-3) = -1 \cdot (-3)^2 - 8 \cdot (-3) + 5 = 20$$

$$f(4) = -1 \cdot 4^2 - 8 \cdot 4 + 5 = -43$$

$$\frac{f(4) - f(-3)}{4 - (-3)} = \frac{-43 - 20}{7} = -9$$

$$c) f(-6) = -5 \cdot (-6)^2 + (-6) - 4 = -190$$

$$f(0) = -5 \cdot 0^2 + 0 - 4 = -4$$

$$\frac{f(0) - f(-6)}{0 - (-6)} = \frac{-4 + 190}{6} = 31$$

$$d) f(2) = \frac{2^2}{6} + 3 \cdot 2 + 1 = \frac{46}{6}$$

$$f(10) = \frac{10^2}{6} + 3 \cdot 10 + 1 = \frac{286}{6}$$

$$\frac{f(10) - f(2)}{10 - 2} = \frac{\frac{286}{6} - \frac{46}{6}}{8} = 5$$

30. a) Resposta esperada: Maior chance, pois o uso do celular é uma distração para o condutor.

Resposta esperada: Redução do tempo de reação (para realizar uma frenagem ou mesmo para perceber e respeitar os sinais de trânsito), dificuldade de manter corretamente o carro na pista e de manter uma distância segura do veículo da frente.

b) Resposta esperada: Indica que, ao pisar no freio desse automóvel, quando ele está a uma velocidade de 40 km/h, o veículo percorre uma distância de 7,6 m antes de parar.

c) Analisando o ponto de abscissa 60 do gráfico, temos 17,1 m.

d) Analisando a abscissa correspondente ao ponto de ordenada 48,1 do gráfico, temos 100 km/h.

e) Temos que a função d é definida por $d(v) = av^2 + bv + c$.

Como o gráfico intersecta o eixo y no ponto de coordenadas $(0; 0,6)$, segue que $c = 0,6 = \frac{3}{5}$.

Como os pontos $(40; 7,6)$ e $(60; 17,1)$ pertencem ao gráfico da função, temos:
 $d(40) = 7,6 \Rightarrow a \cdot (40)^2 + b \cdot 40 + 0,6 = 7,6 \Rightarrow 1600a + 40b + 0,6 = 7,6$
 $d(60) = 17,1 \Rightarrow a \cdot (60)^2 + b \cdot 60 + 0,6 = 17,1 \Rightarrow 3600a + 60b + 0,6 = 17,1$

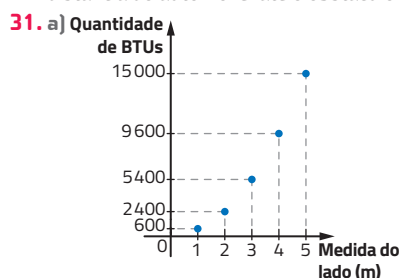
Para obter os valores de a e b , resolvemos o seguinte sistema de equações:

$$\begin{cases} 1600a + 40b + 0,6 = 7,6 \\ 3600a + 60b + 0,6 = 17,1 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a = \frac{1}{200} \\ b = -\frac{1}{40} \end{cases}$$

$$\text{Logo, } d(v) = \frac{v^2}{200} - \frac{v}{40} + \frac{3}{5}.$$

f) Resposta esperada: Não, pois, de acordo com o modelo matemático, calculando $d(50)$ obtemos 11,85, o que significa que a distância de frenagem será de 11,85 m, ou seja, maior que a distância do automóvel até o obstáculo.



- b) $600 : 600 = 1$ e $1 = 1^2$
 $2400 : 600 = 4$ e $4 = 2^2$
 $5400 : 600 = 9$ e $9 = 3^2$
 $9600 : 600 = 16$ e $16 = 4^2$
 $15000 : 600 = 25$ e $25 = 5^2$

Resposta esperada: Cada número da segunda linha corresponde ao quadrado do respectivo número da primeira linha, multiplicado por 600.

c) $600\ell^2$

d) De acordo com a expressão obtida no item c, temos $q(\ell) = 600\ell^2$. Sim, pois a lei de formação da função é da forma $q(\ell) = a\ell^2 + b\ell + c$, com $a = 600$ e $b = c = 0$.

e) $f(2,5) = 600 \cdot 2,5^2 = 3750 \rightarrow 3750 \text{ BTUs}$

$$f(6) = 600 \cdot 6^2 = 21600 \rightarrow$$

$$\rightarrow 21600 \text{ BTUs}$$

$$f(10) = 600 \cdot 10^2 = 60000 \rightarrow 60000 \text{ BTUs}$$

$$f) 48600 = 600 \cdot \ell^2 \Rightarrow \ell = 9 \rightarrow 9 \text{ m}$$

$$32. a) x_v = -\frac{b}{2a} = -\frac{(-4)}{2 \cdot \frac{1}{10}} = 20$$

$$y_v = -\frac{\Delta}{4a} = -\frac{(-4)^2 - 4 \cdot \frac{1}{10} \cdot 2}{4 \cdot \frac{1}{10}} = -38$$

Portanto, $V(20, -38)$.

$$b) x_v = -\frac{b}{2a} = -\frac{6}{2 \cdot (-3)} = 1$$

$$y_v = -\frac{\Delta}{4a} = -\frac{6^2 - 4 \cdot (-3) \cdot 8}{4 \cdot (-3)} = 11$$

Portanto, $V(1, 11)$.

$$c) x_v = -\frac{b}{2a} = -\frac{(-2)}{2 \cdot (-0,5)} = -2$$

$$y_v = -\frac{\Delta}{4a} = -\frac{(-2)^2 - 4 \cdot (-0,5) \cdot (-10)}{4 \cdot (-0,5)} = -8$$

Portanto, $V(-2, -8)$.

$$d) x_v = -\frac{b}{2a} = -\frac{8}{2 \cdot 4} = -1$$

$$y_v = -\frac{\Delta}{4a} = -\frac{8^2 - 4 \cdot 4 \cdot 6}{4 \cdot 4} = 2$$

Portanto, $V(-1, 2)$.

$$33. a) \text{ Como } y_v = -\frac{\Delta}{4a} =$$

$$= -\frac{(-4)^2 - 4 \cdot \frac{2}{3} \cdot 1}{4 \cdot \frac{2}{3}} = -5 \text{ e}$$

$a > 0$, então $\text{Im}(f) = \{y \in \mathbb{R} \mid y \geq -5\}$.

$$b) \text{ Como } y_v = -\frac{\Delta}{4a} =$$

$$= -\frac{5^2 - 4 \cdot (-2) \cdot (-7)}{4 \cdot (-2)} = -\frac{31}{8} \text{ e}$$

$a < 0$, então $\text{Im}(f) = \{y \in \mathbb{R} \mid y \leq -\frac{31}{8}\}$.

$$c) \text{ Como } y_v = -\frac{\Delta}{4a} =$$

$$= -\frac{(-2)^2 - 4 \cdot (-1) \cdot 9}{4 \cdot (-1)} = 10 \text{ e}$$

$a < 0$, então $\text{Im}(f) = \{y \in \mathbb{R} \mid y \leq 10\}$.

$$d) \text{ Como } y_v = -\frac{\Delta}{4a} =$$

$$= -\frac{3^2 - 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot 7}{4 \cdot \frac{1}{2}} = \frac{5}{2} \text{ e } a > 0, \text{ então}$$

$$\text{Im}(f) = \{y \in \mathbb{R} \mid y \geq \frac{5}{2}\}$$

$$34. a) x_v = \frac{-4 + (-2)}{2} = -3$$

Como $x_v = -3$ e $a > 0$, então f é decrescente para $x < -3$ e crescente para $x > -3$.

$$b) x_v = \frac{-3 + 1}{2} = -1$$

Como $x_v = -1$ e $a > 0$, então f é decrescente para $x < -1$ e crescente para $x > -1$.

$$c) x_v = \frac{1 + 5}{2} = 3$$

Como $x_v = 3$ e $a < 0$, então f é crescente para $x < 3$ e decrescente para $x > 3$.

$$35. a) x_v = \frac{-5 + 2}{2} = -1,5$$

$$\bullet x < -1,5$$

$$\bullet x > -1,5$$

b) Temos a função f definida por

$$f(x) = ax^2 + bx + c.$$

Como o gráfico intersecta o eixo y no ponto de coordenadas $(0, 10)$, temos $c = 10$.

Já o eixo x é intersectado pelo gráfico nos pontos de coordenadas $(-5, 0)$ e $(2, 0)$, ou seja, -5 e 2 são os zeros de f . Assim:

$$f(-5) = 0 \Rightarrow a \cdot (-5)^2 + b \cdot (-5) + 10 = 0 \Rightarrow 25a - 5b + 10 = 0$$

$$f(2) = 0 \Rightarrow a \cdot (2)^2 + b \cdot (2) + 10 = 0 \Rightarrow 4a + 2b + 10 = 0$$

Para obter os valores de a e b , resolvemos o seguinte sistema de equações:

$$\begin{cases} 25a - 5b + 10 = 0 \\ 4a + 2b + 10 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = -3 \end{cases}$$

Logo, $f(x) = -x^2 - 3x + 10$.

$$c) x_v = -\frac{b}{2a} = -\frac{(-3)}{2 \cdot (-1)} = -1,5$$

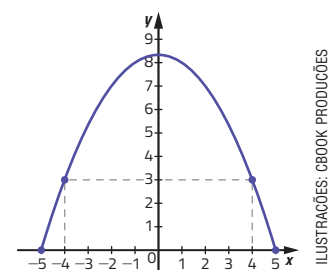
$$y_v = -\frac{\Delta}{4a} = -\frac{(-3)^2 - 4 \cdot (-1) \cdot 10}{4 \cdot (-1)} = 12,25$$

Portanto, $V(-1,5; 12,25)$.

d) Como $y_v = 12,25$ e $a < 0$, então $\text{Im}(f) = \{y \in \mathbb{R} \mid y \leq 12,25\}$.

36. alternativa d

Representando o gráfico da parábola correspondente à abóbada, temos:



Uma parábola é expressa pela equação $y = a \cdot (x - x_1) \cdot (x - x_2)$, em que x_1 e x_2 são as raízes da equação. Pelo gráfico, temos $x_1 = -5$ e $x_2 = 5$. Assim:

$$y = a \cdot (x - 5) \cdot (x + 5) \Rightarrow y = a \cdot (x^2 - 25)$$

Como o ponto $(4, 3)$ pertence ao gráfico dessa função, temos:

$$3 = a \cdot (4^2 - 25) \Rightarrow a = -\frac{1}{3}$$

$$\text{Assim, } y = -\frac{1}{3} \cdot (x^2 - 25).$$

A altura H corresponde ao y_v logo:

$$y_v = -\frac{\Delta}{4a} =$$

$$= -\frac{0^2 - 4 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) \cdot \frac{25}{3}}{4 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right)} = \frac{25}{3}$$

Portanto, $H = \frac{25}{3}$.

37. a) Valor máximo, pois $a < 0$.

$$y_v = -\frac{\Delta}{4a} =$$

$$= -\frac{3^2 - 4 \cdot (-2) \cdot (-8)}{4 \cdot (-2)} = -6,875$$

- b) Valor mínimo, pois $a > 0$.

$$y_v = -\frac{\Delta}{4a} =$$

$$= -\frac{(-2)^2 - 4 \cdot 7 \cdot 0}{4 \cdot 7} \approx -0,14$$

- c) Valor mínimo, pois $a > 0$.

$$y_v = -\frac{\Delta}{4a} = -\frac{0^2 - 4 \cdot 0,1 \cdot 0}{4 \cdot 0,1} = 0$$

- d) Valor máximo, pois $a < 0$.

$$y_v = -\frac{\Delta}{4a} =$$

$$= -\frac{(-18)^2 - 4 \cdot (-9) \cdot 27}{4 \cdot (-9)} = 36$$

38. alternativa d

$$x_v = -\frac{b}{2a} = -\frac{(-5)}{2 \cdot 1} = \frac{5}{2} \rightarrow 2,5 \text{ meses}$$

ou 2 meses e 15 dias

39. a) $h(0) = -0,8 \cdot 0^2 + 2 \cdot 0 + 1,9 = 1,9 \rightarrow 1,9 \text{ m}$
 $h(2) = -0,8 \cdot 2^2 + 2 \cdot 2 + 1,9 = 2,7 \rightarrow 2,7 \text{ m}$

b) $y_v = -\frac{\Delta}{4a} =$
 $= -\frac{2^2 - 4 \cdot (-0,8) \cdot 1,9}{4 \cdot (-0,8)} = 3,15 \rightarrow$
 $\rightarrow 3,15 \text{ m}$

$$x_v = -\frac{b}{2a} = -\frac{2}{2 \cdot (-0,8)} = 1,25 \rightarrow$$

 $\rightarrow 1,25 \text{ s}$

c) $\frac{h(2) - h(0)}{2 - 0} = \frac{2,7 - 1,9}{2} = 0,4$

Resposta esperada: Indica que, em média, a altura da bola variou 0,4 m a cada segundo nesse toque.

40. Sendo x e y as medidas dos lados e A e P a área e o perímetro da região retangular, temos:

$$A = x \cdot y$$

$$P = 2x + 2y \Rightarrow 112 = 2x + 2y \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y = 56 - x$$

Substituindo y na expressão da área temos $A = -x^2 + 56x$. Para determinar as medidas x e y para que a área seja máxima, calculamos:

$$x_v = -\frac{b}{2a} = -\frac{56}{2 \cdot (-1)} = 28 \rightarrow 28 \text{ m}$$

$$y = 56 - x \Rightarrow y = 56 - 28 \Rightarrow y = 28$$

Portanto, as dimensões da horta devem ser 28 m de comprimento e 28 m de largura.

41. $y_v = -\frac{(-6)^2 - 4 \cdot 1,2 \cdot 8}{4 \cdot 1,2} = 0,5 \rightarrow$
 $\rightarrow 0,5 \text{ m}$

$$x_v = -\frac{(-6)}{2 \cdot 1,2} = 2,5 \rightarrow 2,5 \text{ s}$$

42. a) $f(0) = -0,32 \cdot 0^2 + 12,8 \cdot 0 + 70 = 70 \rightarrow 70 \text{ BPM}$
 $f(5) = -0,32 \cdot 5^2 + 12,8 \cdot 5 + 70 = 126 \rightarrow 126 \text{ BPM}$

b) $y_v = -\frac{\Delta}{4a} =$
 $= -\frac{12,8^2 - 4 \cdot (-0,32) \cdot 70}{4 \cdot (-0,32)} =$

$$= 198 \rightarrow 198 \text{ BPM}$$

$$x_v = -\frac{b}{2a} = -\frac{12,8}{2 \cdot (-0,32)} = 20 \rightarrow$$

 $\rightarrow 20 \text{ min}$

c) 70% de 180 $\rightarrow \frac{70}{100} \cdot 180 = 126$
 $-0,32t^2 + 12,8t + 70 > 126 \Rightarrow$
 $\Rightarrow -0,32t^2 + 12,8t - 56 > 0$
 $\Delta = 12,8^2 - 4 \cdot (-0,32) \cdot (-56) = 92,16$
 $x = \frac{-12,8 \pm \sqrt{92,16}}{2 \cdot (-0,32)} =$

$$= \frac{-12,8 \pm 9,6}{-0,64} \Rightarrow \begin{cases} x = 5 \\ \text{ou} \\ x = 35 \end{cases}$$

$$a = -0,32 < 0$$

Logo, o número de batimentos esteve acima do limite entre 5 min e 35 min de treino.

43. alternativa d

$$y_v = -\frac{22^2 - 4 \cdot (-1) \cdot (-85)}{4 \cdot (-1)} =$$

$$= 36 \rightarrow 36^\circ$$

Portanto, a temperatura no interior da estufa está classificada como alta ($30^\circ \leq 36^\circ \leq 43^\circ$).

44. a) $c = 8 + 0,10 \cdot 280 = 36 \rightarrow \text{R\$ } 36,00$
 $p_{200} = 200 \cdot 36 = 7.200 \rightarrow \text{R\$ } 7.200,00$

b) $p_{250} = 250 \cdot (8 + 0,10 \cdot 230) =$
 $= 7.750 \rightarrow \text{R\$ } 7.750,00$
 $p_{400} = 400 \cdot (8 + 0,10 \cdot 80) = 6.400 \rightarrow$
 $\rightarrow \text{R\$ } 6.400,00$

Resposta esperada: É mais vantajoso que compareçam 400 convidados, cujo gasto com a locação será de R\$ 6.400,00, uma vez que, no caso de comparecerem 250 convidados, o gasto será de R\$ 7.750,00.

c) Fazendo $P(x)$ igual ao total a ser pago pela locação e igual ao número de convidados que compareceram, temos:
 $P(x) = x \cdot (8 + 0,10 \cdot (480 - x)) \Rightarrow$
 $\Rightarrow P(x) = -0,10x^2 + 56x$

$$y_v = -\frac{3.136}{4 \cdot (-0,10)} = 7.840 \rightarrow$$

 $\rightarrow \text{R\$ } 7.840,00$

$$x_v = -\frac{56}{2 \cdot (-0,10)} = 280 \rightarrow$$

 $\rightarrow 280 \text{ convidados}$

45. a) Analisando a ordenada do ponto em que o gráfico intercepta o eixo y , temos: 1,3 m.

b) Com base na abscissa do ponto em que o gráfico intercepta o eixo x , temos: 21,6 s.

c) Temos a função g definida por $g(x) = ax^2 + bx + c$.

Como o gráfico intersecta o eixo y no ponto de coordenadas $(0; 1,3)$, temos: $c = 1,3$.

Como os pontos $(6; 10,3)$ e $(21,6; 0)$ pertencem ao gráfico da função, temos:
 $g(6) = 10,3 \Rightarrow a \cdot 6^2 + b \cdot 6 + 1,3 = 10,3 \Rightarrow$
 $\Rightarrow 36a + 6b + 1,3 = 10,3$

$g(21,6) = 0 \Rightarrow a \cdot (21,6)^2 + b \cdot 21,6 + 1,3 = 0 \Rightarrow 466,56a + 21,6b + 1,3 = 0$
 Para obter os valores de a e b , resolvemos o seguinte sistema de equações:

$$\begin{cases} 36a + 6b + 1,3 = 10,3 \\ 466,56a + 21,6b + 1,3 = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a \approx -0,1 \\ b = 2,1 \end{cases}$$

Logo, $g(x) = -0,1x^2 + 2,1x + 1,3$.

$$D(g) = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x \leq 21,6\}.$$

d) $y_v = -\frac{2,1^2 - 4 \cdot (-0,1) \cdot 1,3}{4 \cdot (-0,1)} =$
 $= 12,325 \rightarrow 12,325 \text{ m}$

e) A imagem da função corresponde ao intervalo determinado pela altura nula (quando o projétil está no chão) e a altura máxima, determinada no item d. Assim, $\text{Im}(g) = [0; 12,325]$.

46. Resposta pessoal. Espera-se que os estudantes formulem dois problemas que envolvam a determinação do valor máximo ou valor mínimo de funções quadráticas. Verificar como os estudantes interpretam cada coordenada do vértice das parábolas.

47. a) Em relação à parte do gráfico correspondente aos valores de $x < 1$, podemos identificar os pontos da função quadrática de coordenadas $(-1, 6)$, $(0, 6)$ e $(1, 2)$. Assim, considerando a lei de formação do tipo $f(x) = ax^2 + bx + c$, temos:

I) $6 = a(-1)^2 + b \cdot (-1) + c$

II) $6 = a \cdot 0^2 + b \cdot 0 + c \Rightarrow c = 6$

III) $2 = a \cdot 1^2 + b + c$

De I e II, temos:

IV) $6 = a(-1)^2 + b \cdot (-1) + c \Rightarrow$

$$\Rightarrow a - b + 6 = 6 \Rightarrow a - b = 0 \Rightarrow a = b$$

De I, II e IV, temos:

V) $2 = a \cdot 1^2 + b + c \Rightarrow a + a + 6 = 2 \Rightarrow$

$$\Rightarrow 2a = -4 \Rightarrow a = -2$$

Assim, $a = b = -2$

Logo, $f(x) = -2x^2 - 2x + 6$ para $x < 1$.

Analisando a parte do gráfico correspondente aos valores de $x \geq 1$, podemos identificar os pontos da função afim de coordenadas $(1, 2)$ e $(2, 1)$.

Assim, considerando a lei de formação do tipo $f(x) = dx + e$, temos:

I) $2 = d + e \Rightarrow e = 2 - d$

II) $1 = 2d + e$

Substituindo em II o valor de e obtido em I, temos:

$$1 = 2d + e \Rightarrow 1 = 2d + (2 - d) \Rightarrow 1 = 2d + 2 - d \Rightarrow 1 - 2 = d \Rightarrow d = -1$$

Logo, $e = 2 - d = 2 - (-1) = 3$.

Assim, $f(x) = -x + 3$ para $x \geq 1$.

Portanto,

$$f(x) = \begin{cases} -2x^2 - 2x + 6, & \text{se } x < 1 \\ -x + 3, & \text{se } x \geq 1 \end{cases}$$

b) O valor máximo da função corresponde a:

$$y_v = \frac{-[(-2)^2 - 4 \cdot (-2) \cdot 6]}{4 \cdot (-2)} = \frac{-52}{-8} = 6,5$$

48. Pelo caso AA, temos que os triângulos ABC e CFE são semelhantes. Assim, temos:

$$\frac{1,5}{x} = \frac{2}{2-y} \Rightarrow y = -\frac{4}{3}x + 2$$

Temos que a área A do retângulo é dada por:

$$A(x) = x \cdot y = x \cdot \left(-\frac{4}{3}x + 2\right) = -\frac{4}{3}x^2 + 2x$$

Como a área deve ser a maior possível, calculamos as coordenadas do ponto de máximo de A(x):

$$\bullet y_v = \frac{-\left[2^2 - 4 \cdot \left(-\frac{4}{3}\right) \cdot 0\right]}{4 \cdot \left(-\frac{4}{3}\right)} = \frac{-4}{-\frac{16}{3}} = \frac{12}{16} = \frac{3}{4} = 0,75 \Rightarrow 0,75 \text{ m}^2$$

$$\bullet x_v = \frac{-2}{2 \cdot \left(-\frac{4}{3}\right)} = \frac{-2}{-\frac{8}{3}} = \frac{6}{8} = \frac{3}{4} = 0,75 \Rightarrow 0,75 \text{ m}$$

Assim, temos que a área máxima do painel retangular é 0,75 m² e a medida x do lado desse painel para que isso ocorra é 0,75 m. Logo, a medida do lado y do outro lado desse painel é dada por:

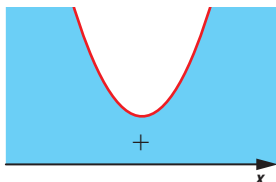
$$y = -\frac{4}{3}x + 2 \Rightarrow y = -\frac{4}{3} \cdot \frac{3}{4} + 2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y = 1 \Rightarrow 1 \text{ m.}$$

Portanto, um corte deve ser realizado paralelo e a 1 m da margem correspondente ao lado AB, e o outro, paralelo e a 0,75 m da margem correspondente ao lado BC.

49. a) $f(x) > 0$ para $x < -4$ ou $x > 3$;
 $f(x) = 0$ para $x = -4$ ou $x = 3$;
 $f(x) < 0$ para $-4 < x < 3$
 b) $f(x) > 0$ para $-8 < x < 0$;
 $f(x) = 0$ para $x = -8$ ou $x = 0$;
 $f(x) < 0$ para $x < -8$ ou $x > 0$
 c) $\nexists x \in D(f)$ tal que $f(x) > 0$;
 $f(x) = 0$ para $x = 3$; $f(x) < 0$ para $x \neq 3$

50. a) $\Delta = 5^2 - 4 \cdot 4 \cdot 2 = -7 < 0$
 A função não tem zeros reais, pois $\Delta < 0$. Como $a > 0$, temos uma parábola com concavidade voltada para cima, sem cruzar o eixo x.



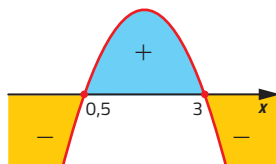
Como $a > 0$ e $\Delta < 0$, $f(x) > 0$ para todo $x \in D(f)$; $\nexists x \in D(f) \mid f(x) \leq 0$.

$$\text{b) } \Delta = 7^2 - 4 \cdot (-2) \cdot (-3) = 25$$

$$x = \frac{-7 \pm \sqrt{25}}{2 \cdot (-2)} = \frac{-7 \pm 5}{-4} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 0,5 \\ \text{ou} \\ x = 3 \end{cases}$$

Como $a < 0$ e $\Delta > 0$, temos uma parábola com concavidade voltada para baixo, intersectando o eixo x em $x = 0,5$ e $x = 3$.



Logo, $f(x) > 0$ para $0,5 < x < 3$;

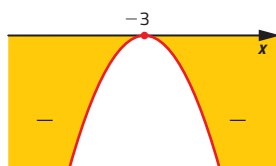
$f(x) = 0$ para $x = 0,5$ ou $x = 3$;

$f(x) < 0$ para $x < 0,5$ ou $x > 3$.

$$\text{c) } \Delta = (-6)^2 - 4 \cdot (-1) \cdot (-9) = 0$$

$$x = \frac{-(-6) \pm \sqrt{0}}{2 \cdot (-1)} = \frac{6 \pm 0}{-2} = -3$$

Como $a < 0$ e $\Delta = 0$, temos uma parábola com concavidade voltada para baixo, intersectando o eixo x em $x = -3$.



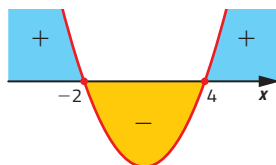
Logo, $\nexists x \in D(f) \mid f(x) > 0$; $f(x) = 0$ para $x = -3$; $f(x) < 0$ para $x \neq -3$.

$$\text{d) } \Delta = (-1)^2 - 4 \cdot 0,5 \cdot (-4) = 9$$

$$x = \frac{-(-1) \pm \sqrt{9}}{2 \cdot 0,5} = \frac{1 \pm 3}{1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = -2 \\ \text{ou} \\ x = 4 \end{cases}$$

Como $a > 0$ e $\Delta > 0$, temos uma parábola com concavidade voltada para cima, intersectando o eixo x em $x = -2$ e $x = 4$.

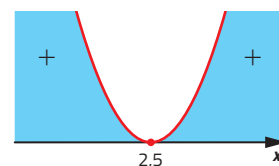


Logo, $f(x) > 0$ para $x < -2$ ou $x > 4$; $f(x) = 0$ para $x = -2$ ou $x = 4$; $f(x) < 0$ para $-2 < x < 4$.

$$\text{e) } \Delta = (-2)^2 - 4 \cdot 0,4 \cdot 2,5 = 0$$

$$x = \frac{-(-2) \pm \sqrt{0}}{2 \cdot 0,4} = \frac{2 \pm 0}{0,8} = 2,5$$

Como $a > 0$ e $\Delta = 0$, temos uma parábola com concavidade voltada para cima, intersectando o eixo x em $x = 2,5$.

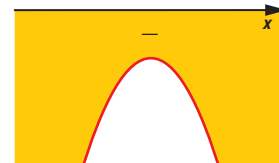


Logo, $f(x) > 0$ para $x \neq 2,5$;

$f(x) = 0$ para $x = 2,5$; $\nexists x \in D(f) \mid f(x) < 0$.

$$\text{f) } \Delta = 3^2 - 4 \cdot \left(-\frac{1}{4}\right) \cdot (-10) = -1 < 0$$

A função não tem zeros reais, pois $\Delta < 0$. Como $a < 0$, temos uma parábola com concavidade voltada para baixo, sem cruzar o eixo x.



Como $a < 0$ e $\Delta < 0$,

$\nexists x \in D(f) \mid f(x) \geq 0$;

$f(x) < 0$ para todo $x \in D(f)$.

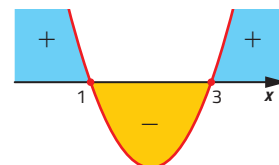
51. a) Fazendo $f(x) = 4x^2 - 16x + 12$, temos:

$$\Delta = (-16)^2 - 4 \cdot 4 \cdot 12 = 64$$

$$x = \frac{-(-16) \pm \sqrt{64}}{2 \cdot 4} = \frac{16 \pm 8}{8} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ \text{ou} \\ x = 3 \end{cases}$$

Como $a > 0$ e $\Delta > 0$, temos uma parábola com concavidade voltada para cima, intersectando o eixo x em $x = 1$ e $x = 3$.



Logo, $f(x) > 0$ para $x < 1$ ou $x > 3$, ou seja, $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 1 \text{ ou } x > 3\}$.

$$\text{b) } x^2 + 15 \leq 0,9x^2 - 2x + 45 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 0,1x^2 + 2x - 30 \leq 0$$

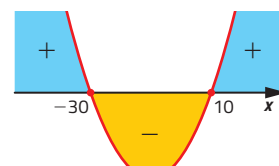
Fazendo $f(x) = 0,1x^2 + 2x - 30$, temos:

$$\Delta = 2^2 - 4 \cdot 0,1 \cdot (-30) = 16$$

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{16}}{2 \cdot 0,1} = \frac{-2 \pm 4}{0,2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = -30 \\ \text{ou} \\ x = 10 \end{cases}$$

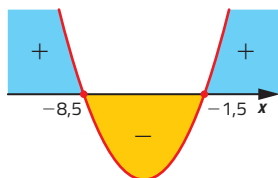
Como $a > 0$ e $\Delta > 0$, temos uma parábola com concavidade voltada para cima, intersectando o eixo x em $x = -30$ e $x = 10$.



Logo, $f(x) \leq 0$ para $-30 \leq x \leq 10$, ou seja, $S = \{x \in \mathbb{R} \mid -30 \leq x \leq 10\}$.

c) $x^2 - 10x - \frac{25}{2} < 3x^2 + 10x + 13 \Rightarrow$
 $\Rightarrow 2x^2 + 20x + 25,5 > 0$
 Fazendo $f(x) = 2x^2 + 20x + 25,5$, temos:
 $\Delta = 20^2 - 4 \cdot 2 \cdot 25,5 = 196$
 $x = \frac{-20 \pm \sqrt{196}}{2 \cdot 2} = \frac{-20 \pm 14}{4} \Rightarrow$
 $\Rightarrow \begin{cases} x = -8,5 \\ \text{ou} \\ x = -1,5 \end{cases}$

Como $a > 0$ e $\Delta > 0$, temos uma parábola com concavidade voltada para cima, intersectando o eixo x em $x = -8,5$ e $x = -1,5$.

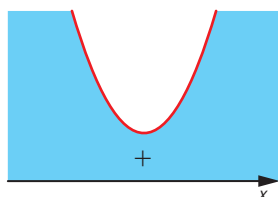


Logo, $f(x) > 0$ para $x < -8,5$ ou $x > -1,5$, ou seja,
 $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x < -8,5 \text{ ou } x > -1,5\}$.

d) $x^2 - 5x \leq \frac{x^2}{2} - 15 \Rightarrow$
 $\Rightarrow \frac{x^2}{2} - 5x + 15 \leq 0$

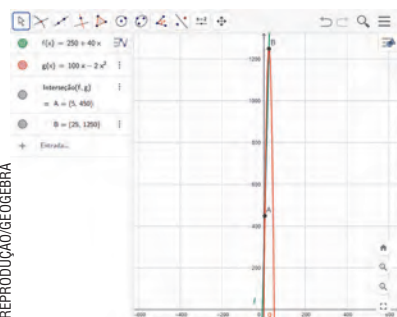
Fazendo $f(x) = \frac{x^2}{2} - 5x + 15$, temos:

$\Delta = (-5)^2 - 4 \cdot 0,5 \cdot 15 = -5$
 A função não tem zeros reais, pois $\Delta < 0$. Como $a > 0$, temos uma parábola com concavidade voltada para cima, sem cruzar o eixo x .



Logo, $f(x) > 0$ para todo $x \in D(f)$;
 $\nexists x \in D(f) \mid f(x) \leq 0$, ou seja, $S = \emptyset$.

52.



Resposta esperada: As abscissas desses pontos determinam que:

- para $x < 5$ e $x > 25 \Rightarrow f(x) > g(x)$;
- para $x = 5$ e $x = 25 \Rightarrow f(x) = g(x)$;
- para $5 < x < 25 \Rightarrow f(x) < g(x)$.

53. $\Delta = 4^2 - 4 \cdot (k - 2) \cdot (-3) = 12k - 8$
 $\Delta < 0 \Rightarrow 12k - 8 < 0 \Rightarrow k < \frac{2}{3}$

54. a) A função g é definida por $g(x) = ax + b$.

Como $g\left(\frac{1}{2}\right) = 0$ e $g(0) = 1$, temos:

$$\begin{cases} a \cdot \frac{1}{2} + b = 0 \\ a \cdot 0 + b = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -2 \\ b = 1 \end{cases}$$

Assim, $g(x) = -2x + 1$.

A função f é definida por

$$f(x) = ax^2 + bx + c.$$

Como o gráfico intersecta o eixo y no ponto de coordenadas $(0, -8)$, temos $c = -8$.

Já o eixo x é intersectado pelo gráfico nos pontos de coordenadas $(-2, 0)$ e $(4, 0)$, ou seja, -2 e 4 são os zeros de f . Assim:

$$f(-2) = 0 \Rightarrow a \cdot (-2)^2 + b \cdot (-2) +$$

$$+ (-8) = 0 \Rightarrow 4a - 2b - 8 = 0$$

$$f(4) = 0 \Rightarrow a \cdot (4)^2 + b \cdot (4) + (-8) =$$

$$= 0 \Rightarrow 16a + 4b - 8 = 0$$

Para obter os valores de a e b , resolvemos o seguinte sistema de equações:

$$\begin{cases} 4a - 2b - 8 = 0 \\ 16a + 4b - 8 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -2 \end{cases}$$

Logo, $f(x) = x^2 - 2x - 8$.

b) $f(x) < g(x) \Rightarrow x^2 - 2x - 8 < -2x +$
 $+ 1 \Rightarrow x^2 - 9 < 0 \Rightarrow -3 < x < 3$

▪ $f(x) > g(x) \Rightarrow x^2 - 2x - 8 > -2x +$
 $+ 1 \Rightarrow x^2 - 9 > 0 \Rightarrow x < -3 \text{ ou } x > 3$

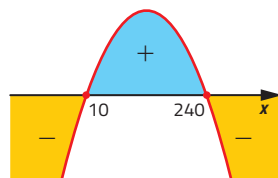
▪ $f(x) = g(x) \Rightarrow x^2 - 2x - 8 = -2x +$
 $+ 1 \Rightarrow x^2 - 9 = 0 \Rightarrow x = -3 \text{ ou } x = 3$

55. a) $T(x) = 0 \Rightarrow -0,02x^2 + 5x - 48 = 0$
 $\Delta = 5^2 - 4 \cdot (-0,02) \cdot (-48) = 21,16$

$$x = \frac{-5 \pm \sqrt{21,16}}{2 \cdot (-0,02)} = \frac{-5 \pm 4,6}{-0,04} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 10 \\ \text{ou} \\ x = 240 \end{cases}$$

Como $a < 0$ e $\Delta > 0$, temos uma parábola com concavidade voltada para baixo, intersectando o eixo x em $x = 10$ e $x = 240$.



Assim, $T(x) > 0$ para $10 < x < 240$,
 $T(x) = 0$ para $x = 10$ ou $x = 240$ e
 $T(x) < 0$ para $x < 10$ ou $x > 240$.

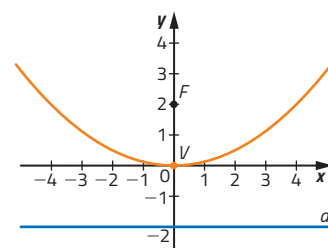
▪ entre 10 min e 240 min

▪ entre 0 min e 10 min e entre 240 min e 250 min

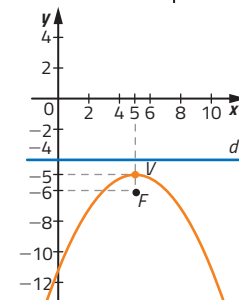
b) $y_v = -\frac{5^2 - 4 \cdot (-0,02) \cdot (-48)}{4 \cdot (-0,02)} =$
 $= 264,5 \Rightarrow 264,5^\circ\text{C}$

$$x_v = -\frac{5}{2 \cdot (-0,02)} = 125 \Rightarrow 125 \text{ min}$$

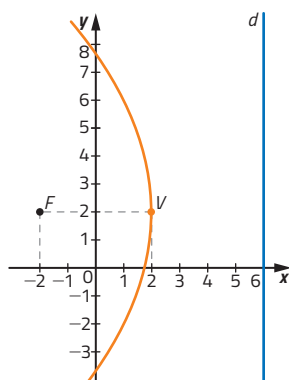
56. a)



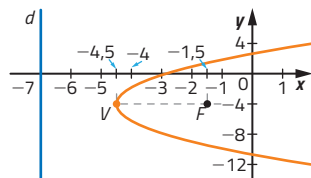
b)



c)



d)



57. a) De acordo com o gráfico, temos uma parábola que tem diretriz paralela ao eixo das ordenadas, vértice $V(0, -4)$ à direita da diretriz e $F(1, -4)$. Assim, a equação da parábola é da forma $(y - y_v)^2 = 4c(x - x_v)$.

Calculando o valor de c , temos:

$$c = FV = \sqrt{(1 - 0)^2 + [-4 - (-4)]^2} = 1$$

A equação da parábola é dada por:

$$(y - (-4))^2 = 4 \cdot 1(x - 0) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y^2 - 4x + 8y = -16$$

b) De acordo com o gráfico, temos uma parábola que tem diretriz paralela ao eixo das abscissas, vértice $V(-1, 1)$ abaixo da diretriz e $F(-1, -1)$. Assim, a equação da parábola é da forma $(x - x_v)^2 = -4c(y - y_v)$.

Calculando o valor de c , temos:

$$c = FV =$$

$$= \sqrt{[(-1 - (-1))]^2 + (-1 - 1)^2} = 2$$

A equação da parábola é dada por:

$$(x - (-1))^2 = -4 \cdot 2(y - 1) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2 + 2x + 8y = 7$$

ILUSTRAÇÕES: CBOOK PRODUÇÕES

- 58.** Pelo gráfico apresentado, temos $V = (-2, 2)$ e $F = (-1, 2)$.
A distância focal, de F a V , é $c = VF = (-1) - (-2) = 1$.
A equação da parábola é da forma $(y - y_v)^2 = 4c(x - x_v)$; assim:
 $(y - 2)^2 = 4 \cdot 1(x - (-2)) \Rightarrow$
 $\Rightarrow y^2 - 4y - 4x = 4$

Tomando $y = 0$ e $y = 4$, podemos determinar dois pontos dessa parábola, utilizando a equação obtida anteriormente.

$$\bullet 0^2 - 4 \cdot 0 - 4x = 4 \Rightarrow x = -1$$

$$\bullet 4^2 - 4 \cdot 4 - 4x = 4 \Rightarrow x = -1$$

Algumas possíveis respostas: $(-1, 0)$, $(-1, 4)$, $(2, -2)$, $(2, 6)$, $(7, -4)$, $(7, 8)$.

Para $x = 0$, temos:

$$y^2 - 4y - 4 \cdot 0 = 4 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y = 2 + 2\sqrt{2} \\ \text{ou} \\ y = 2 - 2\sqrt{2} \end{cases} \text{ (não convém)}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y = 2 + 2\sqrt{2} \\ \text{ou} \\ y = 2 - 2\sqrt{2} \end{cases} \text{ (não convém)}$$

$$\text{Logo, } y_p = 2(\sqrt{2} + 1) \approx 4,83.$$

- 59.** Considerando a lei de formação da função dessa parábola como $f(x) = ax^2 + bx + c$ e os pontos $(0; -1,5)$, $(-2, 0)$ e $(2, -2)$, pertencentes ao gráfico dessa parábola, temos:

$$\begin{cases} a \cdot 0^2 + b \cdot 0 + c = -1,5 \\ a \cdot (-2)^2 + b \cdot (-2) + c = 0 \\ a \cdot 2^2 + b \cdot 2 + c = -2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} c = -1,5 \\ 4a - 2b - 1,5 = 0 \\ 4a + 2b - 1,5 = -2 \end{cases}$$

Resolvendo o sistema de equações,

$$\text{temos } a = \frac{1}{8}, b = -\frac{1}{2} \text{ e } c = -1,5. \text{ Logo,}$$

$$y = \frac{1}{8}x^2 - \frac{1}{2}x - 1,5 \text{ ou ainda,}$$

$$x^2 - 4x - 8y = 12.$$

- 60.** a) Resposta pessoal. Espera-se que os estudantes construam a parábola a partir das etapas apresentadas. Se necessário, reproduzir cada etapa no quadro com a turma.
b) As distâncias são iguais, pois a ponta do lápis corresponde a um ponto da parábola, F corresponde ao foco, e a régua, à reta diretriz.

Integrando com...

- Resposta esperada: Para que essas pessoas também sejam inseridas digitalmente e tenham oportunidades de aprendizado, entretenimento e interação.
- Resposta esperada: A propriedade geométrica do paraboloide garante ser possível determinar um local para instalar um dispositivo de modo que este receba a maior quantidade possível do sinal enviado pelo satélite. Por isso, esse formato é escolhido para a transmissão de sinais de TV e internet (via satélite), por exemplo.
- Para essa parábola, temos a lei de formação da função $f(x) = ax^2 + bx + c$

os pontos $(3, 0)$ e $(0; 1,25)$ pertencentes ao gráfico dessa parábola. Temos, ainda, o vértice $V(3, 0)$ e, como o eixo de simetria é paralelo ao eixo das ordenadas, o ponto $(6; 1,25)$, simétrico a $(0; 1,25)$ em relação a esse eixo, também pertence ao gráfico dessa parábola. Assim, temos:

$$\begin{cases} a \cdot 0^2 + b \cdot 0 + c = 1,25 \\ a \cdot 3^2 + b \cdot 3 + c = 0 \\ a \cdot 6^2 + b \cdot 6 + c = 1,25 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} c = 1,25 \\ 9a + 3b + c = 0 \\ 36a + 6b + c = 1,25 \end{cases}$$

Resolvendo o sistema de equações,

$$\text{temos } a = \frac{5}{36}, b = -\frac{5}{6} \text{ e } c = 1,25.$$

$$\text{Logo, } y = \frac{5}{36}x^2 - \frac{5}{6}x + 1,25 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 5x^2 - 30x - 36y + 45 = 0.$$

$$y = \frac{5}{36}x^2 - \frac{5}{6}x + 1,25 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 5x^2 - 30x - 36y + 45 = 0.$$

- 4.** Resposta pessoal. Espera-se que os estudantes compreendam que as tecnologias podem chegar às comunidades indígenas para auxiliar no acesso à informação e no desenvolvimento econômico e social da comunidade, sem que isso descaracterize sua cultura e de modo que ela seja valorizada.

O que estudei

- Respostas pessoais.
- Resposta pessoal.
- Respostas pessoais.
- a) Analisando a ordenada do vértice da parábola, temos: 10 m.
b) Calculamos a diferença entre os zeros da função: $40 - 0 = 40$. Assim, temos: 40 m.
c) Temos a função g definida por $g(x) = ax^2 + bx + c$. Como o gráfico intersecta o eixo y no ponto de coordenadas $(0, 0)$, temos $c = 0$. Como os pontos de coordenadas $(20, 10)$ e $(40, 0)$ pertencem ao gráfico de g , temos:

$$g(20) = 10 \Rightarrow a \cdot 20^2 + b \cdot 20 + 0 = 10 \Rightarrow 400a + 20b = 10$$

$$g(40) = 0 \Rightarrow a \cdot 40^2 + b \cdot 40 + 0 = 0 \Rightarrow 1600a + 40b = 0$$

Para obter os valores de a e b , resolvemos o seguinte sistema de equações:

$$\begin{cases} 400a + 20b = 10 \\ 1600a + 40b = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -\frac{1}{40} \\ b = 1 \end{cases}$$

$$\text{Logo, } g(x) = -\frac{x^2}{40} + x;$$

$$D(g) = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x \leq 40\}.$$

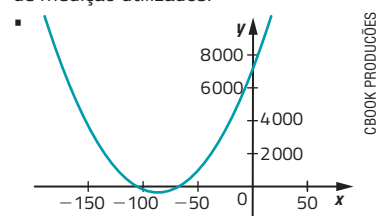
$$\text{d) } f(x) = (105 + x) \cdot (68 + x) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(x) = x^2 + 173x + 7140$$

$$\bullet 7141,7301 = x^2 + 173x + 7140 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 0,01 \\ \text{ou} \\ x = -173,01 \text{ (não convém)} \end{cases}$$

Como 0,01 m equivale a 1 cm, foi necessário reduzir o campo 1 cm no comprimento e na largura. Resposta esperada: Não, uma vez que, nesse contexto, a medida de 1 cm no comprimento e na largura pode ser considerada uma imprecisão relacionada, entre outros motivos, aos instrumentos ou métodos de medição utilizados.



Praticando: Enem e vestibulares

1. alternativa c

Para determinar a medida da base do túnel, inicialmente determinamos as raízes da função:

$$9 - x^2 = 0 \Rightarrow 9 = x^2 \Rightarrow \begin{cases} x = 3 \\ \text{ou} \\ x = -3 \end{cases}$$

Assim, a medida da base é dada por:

$$3 - (-3) = 6 \rightarrow 6 \text{ m.}$$

Para determinar a medida da altura do túnel, calculamos o valor máximo da função:

$$y_v = \frac{-[0^2 - 4 \cdot (-1) \cdot 9]}{4 \cdot (-1)} = \frac{-36}{-4} = 9 \rightarrow 9 \text{ m}$$

Assim, a área procurada é dada por:

$$S = \frac{2}{3} \cdot 6 \cdot 9 = \frac{108}{3} = 36 \rightarrow 36 \text{ m}^2$$

2. alternativa b

Considerando que as raízes são os valores de x , em que $a f(x) = 0$, o domínio que faz sentido no contexto é dado pelo intervalo determinado de 0 até a raiz positiva de f . Assim, $D(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x \leq x_2\}$, sendo x_2 a raiz positiva de f .

3. alternativa d

Temos de calcular a altura máxima atingida pela bola em relação ao chão, que é dada, em metro, por: $1,5 + y_v$. Assim, temos:

$$y_v = \frac{-\left[\left(-\frac{7}{3}\right)^2 - 4 \cdot \left(-\frac{1}{6}\right) \cdot 12\right]}{4 \cdot \left(-\frac{1}{6}\right)} = \frac{-\left(\frac{49}{9} + 8\right)}{-\frac{4}{6}} = \frac{-\frac{121}{9}}{-\frac{4}{6}} = \frac{121}{9} \cdot \frac{6}{4} = \frac{121}{6} \approx 20,2$$

Segue que

$$1,5 + y_v \approx 1,5 + 20,2 = 21,7 \rightarrow$$

\rightarrow aproximadamente 21,7 m

Portanto, o saque será invalidado nos ginásios I, II, III e IV.

4. alternativa e

Como $p = 10$ é uma raiz da equação, temos:

$$10^2 - 5 \cdot 10 + 20 = 0 \Rightarrow 5 = 12$$

5. alternativa c

O mês que tem maior quantidade de infectados é aquele correspondente à abscissa do vértice t_v da função:

$$t_v = \frac{-10}{2 \cdot (-1)} = \frac{-10}{-2} = 5$$

Logo, a proposta aceita foi a III.

6. alternativa c

Desconsiderando o desconto, temos que o valor total seria dado por $2x$, para x bombons vendidos. Como será dado um desconto de $x\%$, temos que o valor total V em função de x é dado por:

$$V = 2x \cdot \left(1 - \frac{1}{100}x\right) \Rightarrow V = 2x - \frac{1}{50}x^2$$

7. alternativa d

A temperatura máxima é dada pelo valor máximo y_v da função f :

$$y_v = \frac{-\left[2^2 - 4 \cdot \left(-\frac{1}{12}\right) \cdot 10\right]}{4 \cdot \left(-\frac{1}{12}\right)} = \frac{-\left(\frac{88}{12}\right)}{-\frac{4}{12}} = \frac{88}{12} \cdot \frac{12}{4} = 22 \rightarrow 22^\circ\text{C}$$

8. alternativa c

Seja x o número de pessoas a desistir, temos:

- preço por pessoa: $800 + 4x$
- número de pessoas a voar: $160 - x$
- receita em função da quantidade de passagens vendida:

$$(160 - x) \cdot (800 + 4x) = 128000 + 640x - 800x - 4x^2 = -4x^2 - 160x + 128000$$

Sabendo que a receita foi de

R\$ 125.504,00, temos:

$$125504 = -4x^2 - 160x + 128000 \Rightarrow -4x^2 - 160x + 2496 = 0$$

Resolvendo a equação obtida, temos:

$$\Delta = (-160)^2 - 4 \cdot (-4) \cdot 2496 =$$

$$= 25600 + 39936 = 65536$$

$$x = \frac{-(-160) \pm \sqrt{65536}}{2 \cdot (-4)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = \frac{160 + 256}{-8} = -52 \text{ (não convém)} \\ \text{ou} \\ x = \frac{160 - 256}{-8} = 12 \end{cases}$$

Portanto, o número de pessoas que realizou a viagem é dado por:

$$160 - 12 = 148 \rightarrow 148 \text{ pessoas}$$

9. alternativa b

$$-x^2 = 2x \Rightarrow -x^2 - 2x = 0$$

Resolvendo a equação obtida, temos:

$$x(-x - 2) = 0 \Rightarrow x = 0 \text{ ou } x = -2$$

Para $x = 0$, temos $y = 2 \cdot 0 = 0$.

Para $x = -2$, temos $y = 2 \cdot (-2) = -4$.

Portanto, o ponto de coordenadas $(-2, -4)$ corresponde à interseção dos gráficos das funções f e g .

10. alternativa d

Representando a venda de cada produto por $p(x) = 400 - x$, temos que a receita obtida por ser expressa por:

$$r(x) = x(400 - x) = 400x - x^2$$

A receita máxima corresponde ao valor máximo y_v da função r :

$$y_v = \frac{-[400^2 - 4 \cdot (-1) \cdot 0]}{4 \cdot (-1)} = \frac{-(160000)}{-4} = 40000 \rightarrow \text{R\$ } 40.000,00$$

11. alternativa b

Como o gráfico de f tangencia o eixo das abscissas, temos que o discriminante Δ da equação $f(x) = 0$ é tal que $\Delta = 0$. Assim, temos:

$$\Delta = 0 \Rightarrow (2m)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 9 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow m^2 = 9 \Rightarrow \begin{cases} m = 3 \\ \text{ou} \\ m = -3 \end{cases}$$

Calculando a abscissa do ponto do gráfico de f em que a ordenada é 9, temos:

$$9 = x^2 + 2mx + 9 \Rightarrow x^2 + 2mx = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x(x + 2m) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ \text{ou} \\ x = -2m \end{cases}$$

Como essa abscissa deve ser negativa, temos $m = 3$, de maneira que $x = -2 \cdot 3 = -6$.

12. alternativa d

Como $(0, 5)$ é o ponto em que o gráfico intersecta o eixo das ordenadas, temos:

$$5 = a \cdot 0^2 + b \cdot 0 + c \Rightarrow c = 5$$

Como $x_v = 2$, temos:

$$2 = \frac{-b}{2 \cdot a} \Rightarrow b = -4a \text{ (I)}$$

Como o ponto de coordenadas $Q(-2, 8)$ pertence ao gráfico função, temos:

$$8 = a \cdot (-2)^2 + b \cdot (-2) + c \text{ (II)}$$

Substituindo I em II, temos:

$$8 = 4a - 2 \cdot (-4a) + 5 \Rightarrow a = \frac{1}{4}$$

Segue que:

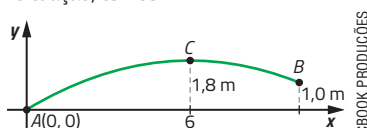
$$b = -4a = -4 \cdot \frac{1}{4} = -1$$

$$\text{Assim, temos } f(x) = \frac{1}{4}x^2 - x + 5.$$

Segue que:

$$y_v = f(2) = \frac{1}{4} \cdot 2^2 - 2 + 5 = 1 + 3 = 4$$

13. Fazendo um esboço do gráfico de $f(x) = ax^2 + bx + c$, que representa essa situação, temos:



Colocando o ponto A na origem do sistema cartesiano, temos $c = 0$, pois o gráfico cruza o eixo y em $(0, 0)$.

$$x_v = 6 \Rightarrow -\frac{b}{2a} = 6 \Rightarrow b = -12a$$

$$y_v = 1,8 \Rightarrow -\frac{\Delta}{4a} = 1,8 \Rightarrow b^2 = -7,2a$$

Substituindo b por $-12a$ na segunda expressão, temos:

$$(-12a)^2 = -7,2a \Rightarrow 144a^2 = -7,2a \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a = -\frac{1}{20} \\ \text{ou} \\ a = 0 \text{ (não convém)} \end{cases}$$

$$b = -12a \Rightarrow b = -12 \cdot \left(-\frac{1}{20}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow b = \frac{3}{5}$$

$$\text{Assim, } f(x) = \frac{-x^2}{20} + \frac{3}{5}x$$

$$f(x) = 1 \Rightarrow 1 = \frac{-x^2}{20} + \frac{3}{5}x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 20 = -x^2 + 12x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2 - 12x + 20 = 0 \Rightarrow x = 2 \text{ ou } x = 10$$

Como a abscissa de B deve ser maior que 6, tomamos $x = 10$. Assim, a largura do rio é de 10 metros.

14. alternativa b

$$f(x) = x(ax + b) \Rightarrow f(x) = ax^2 + bx$$

Como a e b são números reais positivos, então a parábola que representa f tem concavidade voltada para cima e corta o eixo y em seu ramo crescente.

15. alternativa c

$$f(2) = -\frac{1}{2} \cdot 2^2 + 3 \cdot 2 + 4 = 8$$

$$f(6) = -\frac{1}{2} \cdot 6^2 + 3 \cdot 6 + 4 = 4$$

$$y_v = -\frac{\Delta}{4a} = -\frac{3^2 - 4 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot 4}{4 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)} = 8,5$$

Logo, para o intervalo $[2, 6]$, temos

$$\text{Im}(f) = [4; 8,5]. \text{ Assim:}$$

$$C(4) = 2\pi \cdot 4 = 8\pi$$

$$C(8,5) = 2\pi \cdot 8,5 = 17\pi$$

$$17\pi - 8\pi = 9\pi$$

16. alternativa c

Considerando x o valor do desconto e F o valor do faturamento, temos:

$$F(x) = (80 - x) \cdot (1050 + 105x) =$$

$$= -105x^2 + 7350x + 84000$$

$$x_v = -\frac{b}{2a} = -\frac{7350}{2 \cdot (-105)} = 35$$

$$80 - 35 = 45 \rightarrow \text{R\$ } 45,00$$

$$\text{17. a) } d(40) = \frac{1}{120}(40^2 + 8 \cdot 40) = \frac{1}{120} \cdot 1920 = 16 \rightarrow 16 \text{ m}$$

b) Como a distância de frenagem é de 53,2 m, temos que:

$$53,2 = \frac{1}{120}(x^2 + 8x) \Rightarrow 6384 =$$

$$= x^2 + 8x \Rightarrow x^2 + 8x - 6384 = 0$$

Resolvendo a equação obtida, temos:

$$\Delta = 8^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-6384) = 25600$$

$$x = \frac{-8 \pm \sqrt{25600}}{2 \cdot 1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = -8 + \frac{160}{2} = 76 \\ x = -8 - \frac{160}{2} = -84 \text{ (não convém)} \end{cases}$$

Portanto, a velocidade do automóvel deverá ser de 76 km/h.

Unidade 5 • Relações métricas e trigonometria no triângulo

1. a) $\frac{212}{106} = \frac{234}{x} \Rightarrow \frac{2}{1} = \frac{234}{x} \Rightarrow$
 $\Rightarrow x = \frac{234}{2} = 117 \rightarrow 117 \text{ cm}$

b) $\frac{x}{3} = \frac{4}{6} \Rightarrow \frac{x}{3} = \frac{2}{3} \Rightarrow x = 2 \rightarrow 2 \text{ m}$

2. Resposta esperada: Não, pois, para que João pudesse aplicar o teorema de Tales da maneira como ele fez, r , s e t deveriam formar um feixe de retas paralelas; no entanto, conforme o enunciado, apenas r e s são retas paralelas na figura construída por Isabella.

3. alternativa a

$$\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC} \Rightarrow \frac{x-2}{9} = \frac{x}{5x-10} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 5x^2 - 15x + 10 = 12x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 5x^2 - 29x + 20 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 5 \\ \text{ou} \\ x_2 = \frac{4}{5} \end{cases}$$

Para $x = \frac{4}{5}$, as medidas AD e EC seriam negativas; logo, devemos ter $x = 5$. Segue que o perímetro do triângulo ABC é:

$$(x-2) + 9 + 16 + (5x-10) + x =$$

$$= 7x + 15 = 7 \cdot 5 + 15 = 48 \rightarrow 48 \text{ cm}$$

Resposta esperada: Não, pois a medida $DE = 4 \text{ cm}$ não foi utilizada.

4. alternativa b

$$\frac{57,6}{18} = \frac{x+18}{15} \Rightarrow 3,2 = \frac{x+18}{15} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x+18 = 48 \Rightarrow x = 30 \rightarrow 30 \text{ m}$$

5. Como a propriedade tem o formato de um trapézio, os lados de medidas 3 km e 10,84 km são paralelos, pois correspondem às bases do trapézio. Além disso, como os ângulos indicados são congruentes, a cerca dividindo a propriedade será paralela a essas bases. Assim, pelo teorema de Tales:

$$\frac{5}{2} = \frac{3,4}{x} \Rightarrow 5x = 6,8 \Rightarrow x = 1,36$$

Então, o comprimento total da cerca, em km, que será construída é:

$$3 + 3,4 + 1,36 + 10,84 + 2 + 5 +$$

$$+ 8,6 = 34,2$$

Como 34,2 km = 34 200 m, o custo total da cerca será:

$$34\,200 \cdot 0,20 = 6\,840 \rightarrow \text{R\$ } 6.840,00$$

6. Resposta pessoal. Espera-se que os estudantes elaborem problemas que

envolvam feixes de retas paralelas cortados por transversais e identifiquem que existe proporção entre as medidas dos segmentos determinados. Um dos contextos possíveis, por exemplo, é o mapa do bairro formado por, no mínimo, três ruas paralelas e duas transversais.

7. De acordo com a figura, os ângulos \widehat{ABC} , \widehat{CDA} , \widehat{EFG} e \widehat{GHE} são todos congruentes entre si; logo, como dois ângulos adjacentes de um paralelogramo qualquer são suplementares, os ângulos \widehat{DAB} , \widehat{BCD} , \widehat{HEF} e \widehat{FGH} também são congruentes entre si. Além disso, os lados correspondentes são proporcionais entre si, pois:

$$\frac{BC}{FG} = \frac{AD}{EH} = \frac{300}{75} = 4$$

$$\frac{CD}{GH} = \frac{AB}{EF} = \frac{212}{53} = 4$$

Portanto, os paralelogramos são semelhantes com razão de semelhança igual a 4.

8. Triângulo a: A medida do ângulo interno não indicada é:

$$180^\circ - (72^\circ + 66^\circ) = 42^\circ$$

Notar que o triângulo c também tem um ângulo com essa medida e os lados que formam esse ângulo têm medidas tais que:

$$\frac{24}{12} = \frac{25}{12,5} = 2$$

Logo, pelo caso LAL, os triângulos a e c são semelhantes.

Triângulo b: Os três lados do triângulo b são proporcionais aos lados do triângulo e, pois:

$$\frac{24}{4,8} = \frac{18}{3,6} = \frac{15}{3} = 5$$

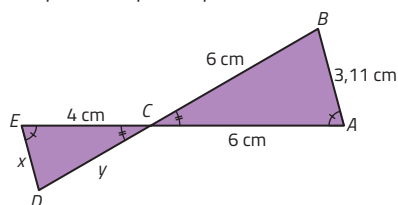
Logo, pelo caso LLL, os triângulos b e e são semelhantes.

Triângulo d: A medida do ângulo interno não indicada é:

$$180^\circ - (60^\circ + 45^\circ) = 75^\circ$$

Como os triângulos d e f têm ângulos de 45° e 75° , então, pelo caso AA, esses triângulos são semelhantes.

9. Observe, na figura a seguir, que os ângulos \widehat{ACB} e \widehat{ECD} são congruentes, pois são opostos pelo vértice.



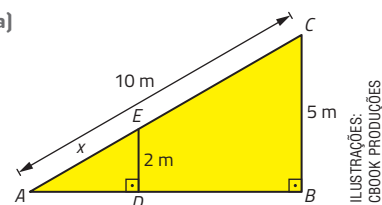
Então, pelo caso de semelhança de triângulos AA, temos que $\triangle ABC \sim \triangle EDC$. Assim:

$$\frac{ED}{AB} = \frac{EC}{AC} \Rightarrow \frac{x}{3,11} = \frac{4}{6} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x \approx 2,07 \rightarrow \text{aproximadamente } 2,07 \text{ cm}$$

$$\frac{CD}{CB} = \frac{EC}{AC} \Rightarrow \frac{y}{6} = \frac{4}{6} \Rightarrow y = 4 \rightarrow 4 \text{ cm}$$

10. a)



b) Os ângulos \widehat{EAD} e \widehat{CAB} são coincidentes e os ângulos \widehat{EDA} e \widehat{CBA} são congruentes, pois são ambos retos; logo, pelo caso de semelhança AA, temos que $\triangle EAD \sim \triangle CAB$. Assim:

$$\frac{AE}{AC} = \frac{ED}{CB} \Rightarrow \frac{x}{10} = \frac{2}{5} \Rightarrow x = 4 \rightarrow 4 \text{ m}$$

11. a) A: $\frac{800}{600} = \frac{8}{6} = \frac{4}{3}$

B: $\frac{1600}{1200} = \frac{16}{12} = \frac{4}{3}$

C: $\frac{1280}{720} = \frac{128}{72} = \frac{16}{9}$

D: $\frac{1024}{768} = \frac{4}{3}$

E: $\frac{1600}{900} = \frac{16}{9}$

Logo, as resoluções A, B e D são utilizadas em formato de DVD padrão, e as resoluções C e E, em formato widescreen.

b) Resposta esperada: Sim, elas têm formatos de polígonos semelhantes quando obtidas nas resoluções A, B e D e quando obtidas nas resoluções C e E. Nessas situações, têm, respectivamente, ângulos internos congruentes (ângulos retos) e lados correspondentes proporcionais.

12. Atividade de elaboração do estudante. Os estudantes podem abordar as dimensões de telas de smartphone ou tablet, por exemplo, e outras resoluções diferentes das apresentadas, como 1280:800 pixels e 1024:600 pixels. Eles podem comparar a qualidade de diferentes resoluções nos próprios aparelhos e discutir com os colegas a respeito dos resultados obtidos na pesquisa.

13. a) Utilizando o teorema de Pitágoras, temos:

$$x^2 = 12,8^2 + 9,6^2 \Rightarrow x^2 = 256 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = \pm \sqrt{256} \Rightarrow \begin{cases} x = 16 \\ \text{ou} \\ x = -16 \text{ (não convém)} \end{cases}$$

Portanto, x corresponde a 16 cm.

b) Utilizando a relação $h^2 = m \cdot n$, temos:

$$26^2 = 15 \cdot x \Rightarrow x = \frac{676}{15} \approx 45$$

Portanto, x corresponde a aproximadamente 45 mm.

c) Seja c a medida do cateto \overline{AB} . Utilizando o teorema de Pitágoras, temos:

$$c^2 = 3^2 + 4^2 \Rightarrow c^2 = 25 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow c = \pm \sqrt{25} \Rightarrow \begin{cases} c = 5 \\ \text{ou} \\ c = -5 \text{ (não convém)} \end{cases}$$

ILUSTRAÇÕES:
CBOOK PRODUÇÕES

Utilizando a relação $c \cdot h = b \cdot n$, temos:

$$5 \cdot 4 = x \cdot 3 \Rightarrow x = \frac{20}{3} \approx 6,67$$

Portanto, x corresponde a aproximadamente 6,67 m.

d) Utilizando a relação $h^2 = m \cdot n$, temos:
 $12^2 = 16 \cdot x \Rightarrow x = 9$

Portanto, x corresponde a 9 dm.

14. alternativa a

Utilizando a relação $b^2 = a \cdot m$, temos:

$$36^2 = 45 \cdot m \Rightarrow m = \frac{1296}{45} = \frac{144}{5}$$

Observe que m é a medida da projeção do cateto de medida 36 m; logo, a medida da projeção do outro cateto é

$$n = 45 - \frac{144}{5} = \frac{81}{5}. \text{ Assim:}$$

$$m \cdot n = \frac{144}{5} \cdot \frac{81}{5} = 466,56$$

Portanto, o produto das medidas das projeções é de aproximadamente 467.

15. a) Seja x a medida do outro cateto. Pelo teorema de Pitágoras, temos:

$$6^2 = x^2 + 3,6^2 \Rightarrow x^2 = 23,04 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = \pm\sqrt{23,04} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 4,8 \\ \text{ou} \\ x = -4,8 \text{ (não convém)} \end{cases}$$

Portanto, o outro cateto mede 4,8 cm.

b) Utilizando a relação $a \cdot h = b \cdot c$, temos:

$$6 \cdot h = 3,6 \cdot 4,8 \Rightarrow h = 2,88$$

Portanto, a altura relativa à hipotenusa mede 2,88 cm.

c) Utilizando a relação $c^2 = a \cdot n$ para obter a medida n da projeção do cateto de medida 3,6 cm sobre a hipotenusa, temos:

$$3,6^2 = 6 \cdot n \Rightarrow n = 2,16$$

Logo, a medida m da projeção do outro cateto é $m = 6 - 2,16 = 3,84$. Portanto, as medidas das projeções são 2,16 cm e 3,84 cm.

16. a) O raio da circunferência mede, em cm:

$$r = \frac{21 + 7}{2} = 14$$

Logo, o comprimento da circunferência é:
 $2\pi \cdot 14 = 28\pi \rightarrow 28\pi$ cm ou aproximadamente 87,92 cm

b) Utilizando a relação $h^2 = m \cdot n$ para obter a medida h da altura relativa à hipotenusa, temos que:

$$h^2 = 21 \cdot 7 \Rightarrow h^2 = 3 \cdot 7^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow h = \pm\sqrt{3 \cdot 7^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} h = 7\sqrt{3} \\ \text{ou} \\ h = -7\sqrt{3} \text{ (não convém)} \end{cases}$$

Assim, a área do triângulo é:

$$\frac{(21 + 7) \cdot 7\sqrt{3}}{2} = 98\sqrt{3} \rightarrow 98\sqrt{3} \text{ cm}^2$$

ou aproximadamente 169,74 cm²

17. As medidas dos catetos do triângulo retângulo, em centímetro, são dadas por:

$$\bullet f(59) = 3 \cdot 59 + 3 = 180$$

$$\bullet f(79) = 3 \cdot 79 + 3 = 240$$

Assim, pelo teorema de Pitágoras, a medida a da hipotenusa é dada por:

$$a^2 = 180^2 + 240^2 \Rightarrow a^2 = 90\,000 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a = \pm\sqrt{90\,000} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a = 300 \\ \text{ou} \\ a = -300 \text{ (não convém)} \end{cases}$$

Portanto, a hipotenusa mede 300 cm.

18. a) Resposta esperada: Como a soma das áreas dos quadrados construídos sobre os dois menores lados do triângulo é igual à área do quadrado construído sobre o maior lado, pode-se concluir que as medidas 3 cm, 4 cm e 5 cm correspondem às medidas dos lados de um triângulo retângulo e que os números 3, 4 e 5 formam um terno pitagórico.

b) Resposta pessoal. Espera-se que os estudantes identifiquem, a partir de suas investigações, outros ternos pitagóricos em formatos como: $3k$, $4k$ e $5k$; $6k$, $8k$ e $10k$; ou $9k$, $12k$ e $15k$; sendo k um número natural positivo.

c) Atividade de elaboração do estudante. Espera-se que eles compreendam a ideia dos ternos pitagóricos e suas aplicações em problemas que podem, por exemplo, envolver a área de triângulos ou retângulos.

19. Inicialmente, vamos determinar a medida do lado AB :

$$43^2 = AB^2 + 35^2 \Rightarrow AB^2 = 624 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow AB = \pm\sqrt{624} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} AB = 4\sqrt{39} \\ \text{ou} \\ AB = -4\sqrt{39} \text{ (não convém)} \end{cases}$$

Assim:

$$\bullet \text{sen } \alpha = \frac{AC}{BC} = \frac{35}{43}$$

$$\bullet \cos \alpha = \frac{AB}{BC} = \frac{4\sqrt{39}}{43}$$

$$\bullet \text{tg } \alpha = \frac{AC}{AB} = \frac{35}{4\sqrt{39}} = \frac{35\sqrt{39}}{156}$$

20. a) Como a razão de semelhança é igual a 2, temos:

$$\frac{AC}{DF} = 2 \Rightarrow \frac{AC}{6} = 2 \Rightarrow AC = 12$$

Usando o teorema de Pitágoras no triângulo ABC , temos:

$$12^2 = 7,2^2 + BC^2 \Rightarrow BC^2 = 92,16 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow BC = \pm\sqrt{92,16} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} BC = 9,6 \\ \text{ou} \\ BC = -9,6 \text{ (não convém)} \end{cases}$$

Assim, o perímetro do triângulo ABC é:

$$7,2 + 9,6 + 12 = 28,8 \rightarrow 28,8 \text{ m}$$

E o perímetro do triângulo DEF é:

$$\frac{7,2}{2} + \frac{9,6}{2} + \frac{12}{2} = \frac{28,8}{2} =$$

$$= 14,4 \rightarrow 14,4 \text{ m}$$

$$\text{b) } \bullet \text{sen } \alpha = \frac{BC}{AC} = \frac{9,6}{12} = \frac{96}{120} = \frac{4}{5}$$

$$\bullet \cos \alpha = \frac{AB}{AC} = \frac{7,2}{12} = \frac{72}{120} = \frac{3}{5}$$

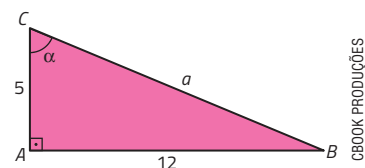
$$\bullet \text{tg } \alpha = \frac{BC}{AB} = \frac{9,6}{7,2} = \frac{96}{72} = \frac{4}{3}$$

$$\text{c) } \bullet \text{sen } \beta = \frac{AB}{AC} = \frac{7,2}{12} = \frac{72}{120} = \frac{3}{5}$$

$$\bullet \cos \beta = \frac{BC}{AC} = \frac{9,6}{12} = \frac{96}{120} = \frac{4}{5}$$

$$\bullet \text{tg } \beta = \frac{AB}{BC} = \frac{7,2}{9,6} = \frac{72}{96} = \frac{3}{4}$$

21. A medida α corresponde à medida do ângulo interno de um triângulo retângulo de catetos medindo 12 e 5 unidades de comprimento, sendo 12 a medida do cateto oposto a esse ângulo, conforme a figura.



A medida da hipotenusa é dada por:

$$a^2 = 5^2 + 12^2 \Rightarrow a^2 = 169 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a = \pm\sqrt{169} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a = 13 \\ \text{ou} \\ a = -13 \text{ (não convém)} \end{cases}$$

Segue que:

$$\text{a) } \text{sen } \alpha = \frac{AB}{BC} = \frac{12}{13}$$

$$\text{b) } \cos \alpha = \frac{AC}{BC} = \frac{5}{13}$$

$$\text{c) } (\text{sen } \alpha)^2 + (\cos \alpha)^2 =$$

$$= \left(\frac{12}{13}\right)^2 + \left(\frac{5}{13}\right)^2 = \frac{12^2 + 5^2}{13^2} =$$

$$= \frac{169}{169} = 1$$

• Resposta esperada: Infinitos triângulos retângulos, semelhantes, cujos ângulos agudos medem α e $90^\circ - \alpha$.

$$\text{22. a) } \text{tg } \beta = \frac{DE}{DC} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

b) Sabendo que $\text{tg } \beta = \frac{2}{3}$, temos:

$$\text{tg } \beta = \frac{AB}{AC} \Rightarrow \frac{2}{3} = \frac{6}{AC} \Rightarrow AC = 9$$

Assim:

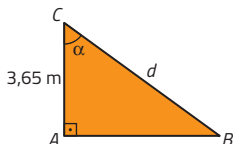
$$AD + DC = AC \Rightarrow AD + 6 = 9 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow AD = 3 \rightarrow 3 \text{ m}$$

c) Como $AC = 9$, a área do triângulo ABC é:

$$\frac{AC \cdot AB}{2} = \frac{9 \cdot 6}{2} = 27 \rightarrow 27 \text{ m}^2$$

- 23.** De acordo com o enunciado, temos o seguinte triângulo retângulo:



Assim:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{AB}{AC} \Rightarrow 1,37 = \frac{AB}{3,65} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow AB = 5,0005 \approx 5$$

Segue que a distância d percorrida pela bola é, aproximadamente, dada por:

$$d^2 = 3,65^2 + 5^2 \Rightarrow d^2 \approx 38,3225 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow d \approx \pm \sqrt{38,3225} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} d \approx 6,19 \\ \text{ou} \\ d \approx -6,19 \text{ (não convém)} \end{cases}$$

Portanto, a distância percorrida é de aproximadamente 6,19 m.

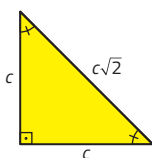
- 24.** A medida da hipotenusa de um triângulo retângulo é sempre maior que a medida de qualquer um dos catetos; logo, um triângulo retângulo isósceles só pode ter os dois catetos congruentes. Sejam c a medida comum dos dois catetos e a a medida da hipotenusa. Então, pelo teorema de Pitágoras:

$$a^2 = c^2 + c^2 \Rightarrow a^2 = 2c^2$$

Como a e c são números positivos, segue que:

$$a = \sqrt{2c^2} = c\sqrt{2}$$

Além disso, como o triângulo é isósceles, os dois ângulos internos agudos são congruentes.



ILUSTRAÇÕES:
CBOOK PRODUÇÕES

Assim:

$$\bullet \operatorname{seno}: \frac{c}{c\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\bullet \operatorname{cosseno}: \frac{c}{c\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\bullet \operatorname{tangente}: \frac{c}{c} = 1$$

- 25.** Resposta pessoal. Para verificar as respostas, os estudantes podem, por exemplo, utilizar relações estudadas, como a que indica que os ângulos agudos do triângulo retângulo são complementares.

26. a) $\bullet \cos 45^\circ = \frac{11\sqrt{2}}{x} \Rightarrow$
 $\Rightarrow \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{11\sqrt{2}}{x} \Rightarrow x = 22$

$$\bullet \operatorname{tg} 45^\circ = \frac{y}{11\sqrt{2}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1 = \frac{y}{11\sqrt{2}} \Rightarrow y = 11\sqrt{2}$$

Portanto, $x = 22$ cm e $y = 11\sqrt{2}$ cm.

b) $\bullet \cos 20^\circ = \frac{x}{4} \Rightarrow$

$$\Rightarrow 0,940 \approx \frac{x}{4} \Rightarrow x \approx 3,76$$

$$\bullet \operatorname{sen} 20^\circ = \frac{y}{4} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 0,342 \approx \frac{y}{4} \Rightarrow y \approx 1,368$$

Portanto, $x \approx 3,76$ m e $y \approx 1,37$ m.

- 27.** Observe que, como a soma dos ângulos internos de um triângulo é igual a 180° , as medidas α e β dos ângulos internos agudos de um triângulo retângulo são tais que:
- $$\alpha + \beta + 90^\circ = 180^\circ \Rightarrow \alpha + \beta = 90^\circ$$
- Ou seja, os ângulos internos agudos de um triângulo retângulo são ângulos complementares.

a) $\operatorname{tg} \alpha = \frac{20\sqrt{3}}{20} = \sqrt{3}$

Como $\operatorname{tg} 60^\circ = \sqrt{3}$, temos $\alpha = 60^\circ$ e

$$\beta = 30^\circ.$$

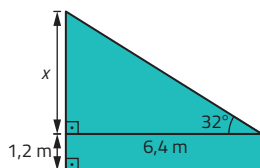
$$90^\circ - 60^\circ$$

b) $\operatorname{tg} \alpha = \frac{20}{32} = 0,625$

Como $\operatorname{tg} 32^\circ \approx 0,625$, temos $\alpha \approx 32^\circ$ e $\beta \approx 58^\circ$.

$$90^\circ - 32^\circ$$

- 28.** A situação está representada na seguinte figura:

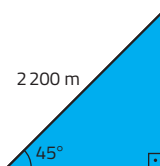


Temos:

$$\operatorname{tg} 32^\circ = \frac{x}{6,4} \Rightarrow 0,625 \approx \frac{x}{6,4} \Rightarrow x \approx 4$$

A altura do barranco corresponde a $x + 1,2$, o que é aproximadamente igual a: $4 + 1,2 = 5,2 \Rightarrow$ aproximadamente 5,2 m

- 29. a)**



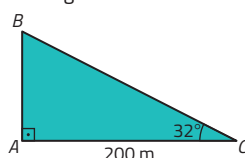
b) Seja h a altura em relação ao solo. Então:

$$\operatorname{sen} 45^\circ = \frac{h}{2200} \Rightarrow \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{h}{2200} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow h = 1100\sqrt{2} \approx 1556$$

Portanto, o avião está a uma altura de $1100\sqrt{2}$ m ou aproximadamente 1556 m.

- 30. a)** Podemos representar parte dessa ponte por um triângulo retângulo ABC e calcular o cosseno do ângulo de 27° , conforme segue.



$$\cos 32^\circ = \frac{AC}{BC} = \frac{200}{BC}$$

Consultando a tabela trigonométrica, temos que $\cos 32^\circ \approx 0,848$. Assim:

$$0,848 \approx \frac{200}{BC} \Rightarrow BC \approx \frac{200}{0,848} \approx 235,85$$

Portanto, o último cabo de sustentação tem aproximadamente 235,85 m de comprimento.

b) Com base no triângulo ABC , representado no item **a**, temos:

$$\operatorname{tg} 32^\circ = \frac{AB}{AC} = \frac{AB}{200}$$

Consultando a tabela trigonométrica, temos que $\operatorname{tg} 32^\circ \approx 0,625$. Assim:

$$0,625 \approx \frac{AB}{200} \Rightarrow AB \approx 200 \cdot 0,625 = 125$$

Portanto, o topo do mastro central está a uma altura de aproximadamente 125 m acima do tabuleiro.

- 31. a) I e III**

I) $\operatorname{tg} \alpha = \frac{90}{149,75} \approx 0,601$

Como $\operatorname{tg} 31^\circ \approx 0,601$, temos que $\alpha \approx 31^\circ$. Logo, a escada atende à norma.

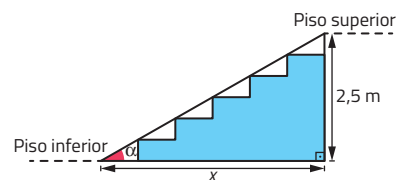
II) $\operatorname{tg} \beta = \frac{95}{140,74} \approx 0,675$

Como $\operatorname{tg} 34^\circ \approx 0,675$, temos que $\beta \approx 34^\circ$. Logo, a escada não atende à norma.

III) $\operatorname{tg} \theta = \frac{100}{173,31} \approx 0,577$

Como $\operatorname{tg} 30^\circ \approx 0,577$, temos que $\theta \approx 30^\circ$. Logo, a escada atende à norma.

b) Na figura a seguir, x é o comprimento da projeção horizontal da escada, o qual depende do ângulo de inclinação de medida α .



Observe que a inclinação mínima, com $\alpha = 26,57^\circ$, determina a escada de comprimento máximo, e a inclinação máxima, com $\alpha = 32,74^\circ$, determina a escada de comprimento mínimo. Vamos calcular x em cada caso:

■ Para $\alpha = 26,57^\circ$:

$$\operatorname{tg} 26,57^\circ = \frac{2,5}{x} \Rightarrow$$

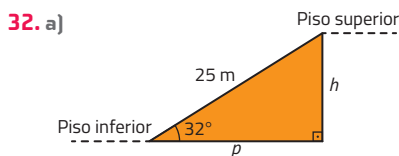
$$\Rightarrow 0,500 \approx \frac{2,5}{x} \Rightarrow x \approx 5$$

■ Para $\alpha = 32,74^\circ$:

$$\operatorname{tg} 32,74^\circ = \frac{2,5}{x} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 0,643 \approx \frac{2,5}{x} \Rightarrow x \approx 3,89$$

Portanto, os comprimentos mínimo e máximo da projeção horizontal são, respectiva e aproximadamente, 3,89 m e 5 m.



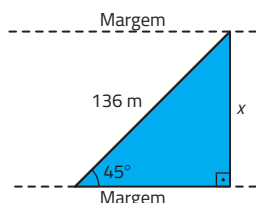
b) O comprimento da projeção horizontal da escada corresponde à medida p indicada na figura. Temos:

$$\cos 32^\circ = \frac{p}{25} \Rightarrow 0,848 \approx \frac{p}{25} \Rightarrow p \approx 21,2 \rightarrow \text{aproximadamente } 21,20 \text{ m}$$

c) A altura do desnível entre os dois pisos corresponde à medida h indicada na figura. Temos:

$$\sin 32^\circ = \frac{h}{25} \Rightarrow 0,530 \approx \frac{h}{25} \Rightarrow h \approx 13,25 \rightarrow \text{aproximadamente } 13,25 \text{ m}$$

33. Na figura a seguir, a medida x corresponde à largura do lago naquele trecho.

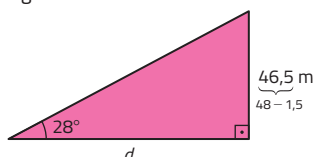


Temos:

$$\sin 45^\circ = \frac{x}{136} \Rightarrow \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{x}{136} \Rightarrow x = 68\sqrt{2} \approx 96$$

Portanto, a largura é de aproximadamente $68\sqrt{2}$ m ou aproximadamente 96 m.

34. A altura total do edifício é de $16 \cdot 3 = 48$ metros, porém precisamos subtrair desse valor a altura dos olhos em relação ao solo para obter o esquema a seguir:

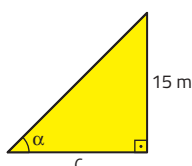


Nesse esquema, a medida d corresponde à distância da pessoa ao edifício e é dada por:

$$\tan 28^\circ = \frac{46,5}{d} \Rightarrow 0,532 \approx \frac{46,5}{d} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow d \approx 87,4 \rightarrow \text{aproximadamente } 87,4 \text{ m}$$

35. A figura a seguir ilustra o comprimento da sombra c de acordo com a medida do ângulo de inclinação α que os raios solares formam com o solo.



ILUSTRAÇÕES:
CBOOK PRODUÇÕES

a) Para $c = 9$ m: $\tan \alpha = \frac{15}{9} \approx 1,667$

Temos $\tan 59^\circ \approx 1,664$ e $\tan 60^\circ \approx 1,732$; logo, o ângulo é de aproximadamente 59° .

b) Para $c = 18$ m: $\tan \alpha = \frac{15}{18} \approx 0,833$

Temos $\tan 39^\circ \approx 0,810$ e $\tan 40^\circ \approx 0,839$; logo, o ângulo é de aproximadamente 40° .

c) Para $c = 15$ m:

$$\tan \alpha = \frac{15}{15} = 1$$

Temos $\tan 45^\circ = 1$; logo, o ângulo é de 45° .

36. A inclinação mínima, com $\beta = 8^\circ$, determina a rampa de extensão máxima, e a inclinação máxima, com $\beta = 12^\circ$, determina a rampa de extensão mínima. Vamos calcular essa extensão em cada caso:

$$\bullet \sin 8^\circ = \frac{6}{x} \Rightarrow 0,139 \approx \frac{6}{x} \Rightarrow x \approx 43,2$$

$$\bullet \sin 12^\circ = \frac{6}{x} \Rightarrow 0,208 \approx \frac{6}{x} \Rightarrow x \approx 28,8$$

Portanto, a rampa pode ter, aproximadamente, de 28,8 m até 43,2 m de extensão.

37. a) Respostas esperadas: Calculando a razão entre a medida do seno e a medida do cosseno de cada ângulo, obtemos a medida da tangente desse ângulo. Logo, $\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$, com $0^\circ < \alpha < 90^\circ$; temos que a medida do seno de um ângulo é igual à medida do cosseno de seu complemento, logo:

$$\sin \alpha = \cos(90^\circ - \alpha), \text{ com } 0^\circ < \alpha < 90^\circ.$$

b) Resposta pessoal. Espera-se que os estudantes consigam realizar a demonstração utilizando ângulos genéricos. Mas, caso apresentem dificuldades, sugerir que desenhem um triângulo retângulo com medidas genéricas para os lados e indiquem a medida de um ângulo agudo qualquer e do outro ângulo em função do primeiro. Após isso, pedir que determinem, utilizando as definições das razões trigonométricas, o seno, o cosseno e a tangente, verificando as relações conjecturadas no item a.

38. Resposta esperada:

$$a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow \frac{a^2}{a^2} = \frac{b^2}{a^2} + \frac{c^2}{a^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1 = \left(\frac{b}{a}\right)^2 + \left(\frac{c}{a}\right)^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1 = \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha$$

39. a) Cada placa tem uma área de $1 \cdot 2 = 2$ metros quadrados. Como o painel é formado por duas placas, sua área é de: $2 \cdot 2 = 4 \rightarrow 4 \text{ m}^2$

b) Como o comprimento da placa é de 2 m, temos:

$$\cos \alpha = \frac{1,82}{2} = 0,91$$

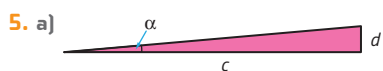
Temos $\cos 24^\circ \approx 0,914$ e $\cos 25^\circ \approx 0,906$, logo α está entre 24° e 25° . O município com a latitude mais próxima desse ângulo é Guarapuava (PR).

c) Resposta pessoal. Os estudantes podem se basear, por exemplo, na situação descrita no enunciado e realizar os cálculos de modo análogo, ajustando os valores de acordo com as coordenadas geográficas pesquisadas.

d) Resposta pessoal. Espera-se que os estudantes reconheçam que o investimento em painéis solares tem um retorno financeiro a médio prazo, possibilitando economia na conta de energia elétrica e potencial contribuição ao meio ambiente por ser uma fonte de energia limpa e renovável. Os estudantes podem, por exemplo, abordar no texto as vantagens desse tipo de geração de energia para o meio ambiente, em comparação com as hidrelétricas e fontes não renováveis.

Integrando com...

1. Algumas respostas possíveis: Construção de rampas; instalação de elevadores; adaptação de banheiros; aplicação de piso tátil em calçadas; disponibilização de transporte coletivo adaptado; instalação de semáforo sonoro; estacionamento de vagas especiais em estacionamentos. Resposta pessoal. Espera-se que os estudantes reflitam sobre a necessidade de inclusão por meio da acessibilidade e reconheçam nas melhorias citadas um caminho para uma sociedade mais justa.
2. Resposta esperada: As normas de acessibilidade estabelecem critérios e parâmetros técnicos para garantir que diferentes construções e espaços sejam acessíveis à maior quantidade possível de pessoas. Resposta pessoal. Espera-se que esta atividade proporcione um momento de pesquisas e debates a respeito de outras normas de acessibilidade, de modo que os estudantes possam refletir sobre a legislação de inclusão e o seu cumprimento ou não na comunidade em que vivem.
3. a) A letra c representa o comprimento da projeção horizontal da rampa, d representa a altura do desnível da rampa e α representa o ângulo de inclinação da rampa.
b) alternativa III
Como a altura do desnível é representada por d e o comprimento da projeção horizontal da rampa por c , temos que a razão $\frac{d}{c}$ representa, no triângulo formado, a razão entre as medidas dos catetos oposto e adjacente a α , ou seja, $\tan \alpha$.
4. Resposta esperada: Não, pois a norma estabelece que a inclinação da rampa não deve ultrapassar 0,0833 e, nesse caso, a inclinação é de 0,1.



b) De acordo com as informações, é necessário que $\frac{d}{c} \leq 0,0833$, ou seja, $\text{tg } \alpha \leq 0,0833$. Como $\text{tg } 4^\circ \approx 0,070$ e $\text{tg } 5^\circ \approx 0,087$, podemos concluir que a inclinação máxima corresponde a um ângulo com medida aproximadamente igual a 5° .

6. a) Observando o quadro, podemos estabelecer a seguinte relação:

$$\frac{d}{c} = \frac{0,1}{1,2} \Rightarrow c = 12d$$

Com base nessa relação, completamos o quadro.

d	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8
c	1,2	2,4	3,6	4,8	6	7,2	8,4	9,6

b) Resposta pessoal. Espera-se que os estudantes coloquem em prática o que foi estudado na seção. Eles podem, por exemplo, investigar rampas na escola, em alguma edificação no bairro em que moram ou em outro local do município. Orientar as medições para que os resultados sejam próximos da realidade.

c) Resposta pessoal. Espera-se que os estudantes identifiquem possíveis melhorias nos ambientes em que circulam visando a acessibilidade e inclusão. Eles podem, por exemplo, apresentar a pesquisa realizada e as conclusões obtidas para a comunidade escolar e, se for o caso, para órgãos governamentais a fim de reivindicar o cumprimento das normas de inclusão.

40. a) A medida x do ângulo $\hat{A}CB$ é dada por:
 $x + 43^\circ + 68^\circ = 180^\circ \Rightarrow x = 69^\circ$

Assim:

$$\frac{5}{\sin 69^\circ} = \frac{AC}{\sin 68^\circ} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{5}{0,934} \approx \frac{AC}{0,927} \Rightarrow AC \approx 4,96$$

$$\frac{5}{\sin 69^\circ} = \frac{BC}{\sin 43^\circ} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{5}{0,934} \approx \frac{BC}{0,682} \Rightarrow BC \approx 3,65$$

Portanto, o perímetro do triângulo é, aproximadamente:

$$5 + 4,96 + 3,65 = 13,61 \rightarrow \text{aproximadamente } 13,61 \text{ cm}$$

b) A medida x do ângulo $\hat{B}AC$ é dada por:
 $x + 60^\circ + 80^\circ = 180^\circ \Rightarrow x = 40^\circ$

Assim:

$$\frac{9}{\sin 80^\circ} = \frac{BC}{\sin 40^\circ} \Rightarrow$$

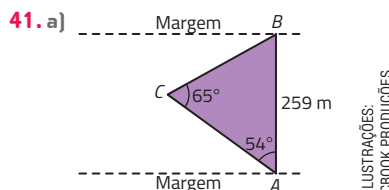
$$\Rightarrow \frac{9}{0,985} = \frac{BC}{0,643} \Rightarrow BC \approx 5,88$$

$$\frac{9}{\sin 80^\circ} = \frac{AC}{\sin 60^\circ} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{9}{0,985} = \frac{AC}{\frac{\sqrt{3}}{2}} \Rightarrow AC \approx 7,91$$

Portanto, o perímetro do triângulo é, aproximadamente:

$$9 + 5,88 + 7,91 = 22,79 \rightarrow \text{aproximadamente } 22,79 \text{ m}$$



b) A medida x do ângulo $\hat{A}BC$ é dada por:
 $x + 54^\circ + 65^\circ = 180^\circ \Rightarrow x = 61^\circ$

Assim:

$$\frac{259}{\sin 65^\circ} = \frac{AC}{\sin 61^\circ} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{259}{0,906} \approx \frac{AC}{0,875} \Rightarrow AC \approx 250,14$$

$$\frac{259}{\sin 65^\circ} = \frac{BC}{\sin 54^\circ} \Rightarrow$$

$$\frac{259}{0,906} \approx \frac{BC}{0,809} \Rightarrow BC \approx 231,27$$

Portanto, a distância aproximada percorrida pelo pescador foi:

$$AC + BC \approx 250,14 + 231,27 = 481,41 \rightarrow \text{aproximadamente } 481,41 \text{ m}$$

42. A medida x do ângulo $\hat{A}BC$ é dada por:
 $x + 58^\circ + 72^\circ = 180^\circ \Rightarrow x = 50^\circ$

Assim:

$$\frac{250}{\sin 50^\circ} = \frac{AB}{\sin 58^\circ} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{250}{0,766} \approx \frac{AB}{0,848} \Rightarrow AB \approx 276,76$$

Portanto, a distância do ponto A até a boia é de aproximadamente 276,76 m.

43. a)
$$\frac{3}{\sin 45^\circ} = \frac{7}{\sin \alpha} \Rightarrow$$

$$\frac{3}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{7}{\sin \alpha} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{3}{\frac{\sqrt{2}}{2}} \cdot \frac{2}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sin \alpha} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sin \alpha = \frac{3\sqrt{2}}{2\sqrt{6}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sin \alpha = \frac{3\sqrt{12}}{12} \Rightarrow \sin \alpha = \frac{6\sqrt{3}}{12} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sin \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2} = \sin 60^\circ$$

$$\Rightarrow \sin \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2} = \sin 60^\circ$$

$$\Rightarrow \sin \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2} = \sin 60^\circ$$

$$\Rightarrow \sin \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2} = \sin 60^\circ$$

$$\Rightarrow \sin \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2} = \sin 60^\circ$$

$$\Rightarrow \sin \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2} = \sin 60^\circ$$

$$\Rightarrow \sin \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2} = \sin 60^\circ$$

$$\Rightarrow \sin \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2} = \sin 60^\circ$$

$$\Rightarrow \sin \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2} = \sin 60^\circ$$

$$\Rightarrow \sin \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2} = \sin 60^\circ$$

$$\Rightarrow \sin \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2} = \sin 60^\circ$$

$$\Rightarrow \sin \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2} = \sin 60^\circ$$

Logo, $\alpha \approx 46^\circ$ é a única possibilidade, pois, como o ângulo $\hat{A}BC$ mede 78° , então $\alpha < 102^\circ$. Assim:

$$46^\circ + \beta + 78^\circ \approx 180^\circ \Rightarrow \beta \approx 56^\circ$$

$$\Rightarrow \frac{52,8}{\sin \beta} = \frac{60}{\sin 77^\circ} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{52,8}{\sin \beta} = \frac{60}{0,974} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sin \beta \approx 0,857 \approx \sin 59^\circ$$

Logo, $\beta \approx 59^\circ$ é a única possibilidade, pois, como o ângulo \hat{ACB} mede 77° , então $\beta < 103^\circ$. Assim:

$$\alpha + 59^\circ + 77^\circ \approx 180^\circ \Rightarrow \alpha \approx 44^\circ$$

$$\Rightarrow \frac{32}{\sin \beta} = \frac{45}{\sin 60^\circ} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{32}{\sin \beta} = \frac{45}{0,866} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sin \beta \approx 0,616 \approx \sin 38^\circ$$

Logo, $\beta \approx 38^\circ$ é a única possibilidade, pois, como o ângulo \hat{ABC} mede 60° , então $\beta < 120^\circ$. Assim:

$$\alpha + 38^\circ + 60^\circ \approx 180^\circ \Rightarrow \alpha \approx 82^\circ$$

$$\Rightarrow \frac{13}{\sin 81^\circ} = \frac{BC}{\sin 55^\circ} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{13}{0,988} \approx \frac{BC}{0,819} \Rightarrow BC \approx 10,78$$

$$\frac{13}{\sin 81^\circ} = \frac{AC}{\sin 44^\circ} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{13}{0,988} \approx \frac{AC}{0,695} \Rightarrow AC \approx 9,14$$

Portanto, Maurício estava a aproximadamente 10,78 m de distância do drone e Pamela, a aproximadamente 9,14 m.

45. A medida x do ângulo \hat{ACB} é dada por:
 $x + 55^\circ + 44^\circ = 180^\circ \Rightarrow x = 81^\circ$

Assim:

$$\frac{13}{\sin 81^\circ} = \frac{BC}{\sin 55^\circ} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{13}{0,988} \approx \frac{BC}{0,819} \Rightarrow BC \approx 10,78$$

$$\frac{13}{\sin 81^\circ} = \frac{AC}{\sin 44^\circ} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{13}{0,988} \approx \frac{AC}{0,695} \Rightarrow AC \approx 9,14$$

Portanto, Maurício estava a aproximadamente 10,78 m de distância do drone e Pamela, a aproximadamente 9,14 m.

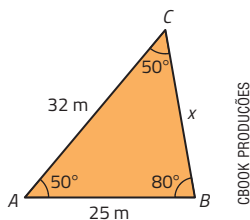
46. O ângulo \hat{ABC} é suplementar de um ângulo de 100° ; logo, mede $180^\circ - 100^\circ = 80^\circ$. Seja β a medida do ângulo \hat{ACB} . Então, pela lei dos senos:

$$\frac{32}{\sin 80^\circ} = \frac{25}{\sin \beta} \Rightarrow \frac{32}{0,985} \approx \frac{25}{\sin \beta} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sin \beta \approx 0,770$$

Temos $\sin 50^\circ \approx 0,766$ e $\sin 51^\circ \approx 0,777$; logo, $\sin \beta \approx \sin 50^\circ$. Então $\beta \approx 50^\circ$, pois, como o ângulo \hat{ABC} mede 80° , temos $\beta < 100^\circ$. Segue que a medida γ do ângulo \hat{BAC} é dada por:

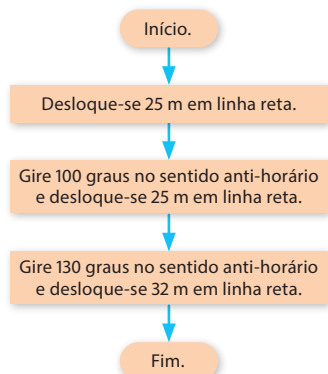
$$\gamma + 50^\circ + 80^\circ \approx 180^\circ \Rightarrow \gamma \approx 50^\circ$$



Assim, a medida x é dada, aproximadamente, por:

$$\frac{x}{\sin 50^\circ} \approx \frac{25}{\sin 50^\circ} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x \approx 25 \Rightarrow \text{aproximadamente } 25 \text{ m}$$



$$\begin{aligned} 47. 74^2 &= 35^2 + 45^2 - 2 \cdot 35 \cdot 45 \cdot \cos \alpha \Rightarrow \\ &\Rightarrow 5476 = 1225 + 2025 - 3150 \cdot \cos \alpha \Rightarrow \\ &\Rightarrow -3150 \cdot \cos \alpha = 2226 \Rightarrow \\ &\Rightarrow \cos \alpha = -\frac{2226}{3150} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \cos (180^\circ - \alpha) = \frac{2226}{3150} \approx 0,707 \end{aligned}$$

Temos $\cos 45^\circ \approx 0,707$, assim:
 $180^\circ - \alpha \approx 45^\circ \Rightarrow \alpha \approx 135^\circ$

$$\begin{aligned} 48. x^2 &= 32,3^2 + 30^2 - 2 \cdot 32,3 \cdot 30 \cdot \cos 70^\circ \Rightarrow \\ &\Rightarrow x^2 \approx 1043,29 + 900 - 1938 \cdot 0,342 \Rightarrow \\ &\Rightarrow x^2 \approx 1280,494 \Rightarrow \\ &\Rightarrow x \approx \pm \sqrt{1280,494} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \begin{cases} x \approx 35,78 \\ \text{ou} \\ x \approx -35,78 \text{ (não convém)} \end{cases} \end{aligned}$$

Portanto, aproximadamente
 $\sqrt{1280,494}$ cm ou
 aproximadamente 35,78 cm.

49. Utilizando a lei dos cossenos, temos:

$$\begin{aligned} \text{a)} (BC)^2 &= 6^2 + \\ &+ 3^2 - 2 \cdot 6 \cdot 3 \cdot \cos 60^\circ \Rightarrow \\ &\Rightarrow (BC)^2 = 27 \Rightarrow BC = 3\sqrt{3} \text{ ou } BC = \\ &= -3\sqrt{3} \text{ (não convém)} \Rightarrow BC = 3\sqrt{3} \text{ cm} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b)} (AC)^2 &= 8^2 + \\ &+ (8\sqrt{2})^2 - 2 \cdot 8 \cdot 8\sqrt{2} \cdot \cos 45^\circ \Rightarrow \\ &\Rightarrow (AC)^2 = 64 \Rightarrow AC = 8 \text{ ou} \\ &AC = -8 \text{ (não convém)} \Rightarrow AC = 8 \text{ cm} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{c)} (AB)^2 &= 28^2 + \\ &+ 20^2 - 2 \cdot 28 \cdot 20 \cdot \cos 120^\circ \Rightarrow \\ &\Rightarrow (AB)^2 = 1744 \Rightarrow AB = \sqrt{1744} \text{ ou} \\ &AB = -\sqrt{1744} \text{ (não convém)} \Rightarrow \\ &\Rightarrow AB = 4\sqrt{109} \text{ cm ou aproximadamente } 41,8 \text{ cm} \end{aligned}$$

50. a) Seja x a distância de B até C , em metro. Então:

$$\begin{aligned} x^2 &= 150^2 + \\ &+ 118,2^2 - 2 \cdot 150 \cdot 118,2 \cdot \cos 88^\circ \Rightarrow \\ &\Rightarrow x^2 \approx 36471,24 - 1241,1 \Rightarrow \\ &\Rightarrow x^2 \approx 35230,14 \Rightarrow \\ &\Rightarrow x \approx \pm \sqrt{35230,14} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x \approx 187,7 \\ \text{ou} \\ x \approx -187,7 \text{ (não convém)} \end{cases}$$

Portanto, aproximadamente 187,7 m.

b) Seja α a medida do ângulo \hat{ACB} . Então:

$$\frac{150}{\sin \alpha} \approx \frac{187,7}{\sin 88^\circ} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sin \alpha \approx 0,798 \approx \sin 53^\circ$$

Logo, $\text{med}(\hat{ACB}) = \alpha \approx 53^\circ$ e

$$\text{med}(\hat{ABC}) \approx 180^\circ - 88^\circ - 53^\circ \approx 39^\circ.$$

51. Seja $(x-2, x, x+2)$ a sequência cujos termos representam as medidas dos lados do triângulo, em centímetro. O maior lado, cuja medida é $x+2$, é oposto ao maior ângulo, que tem 120° de medida. Assim, pela lei dos cossenos:

$$\begin{aligned} (x+2)^2 &= x^2 + \\ &+ (x-2)^2 - 2 \cdot x \cdot (x-2) \cdot \cos 120^\circ \Rightarrow \\ &\Rightarrow x^2 + 4x + 4 = x^2 + \\ &+ x^2 - 4x + 4 - (2x^2 - 4x) \cdot (-\cos 60^\circ) \Rightarrow \\ &\Rightarrow -x^2 + 8x = -(2x^2 - 4x) \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \Rightarrow \\ &\Rightarrow -x^2 + 8x = x^2 - 2x \Rightarrow \\ &\Rightarrow -2x^2 + 10x = 0 \Rightarrow \\ &\Rightarrow x^2 - 5x = 0 \Rightarrow x(x-5) = 0 \Rightarrow \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 0 \text{ (não convém)} \\ \text{ou} \\ x = 5 \end{cases}$$

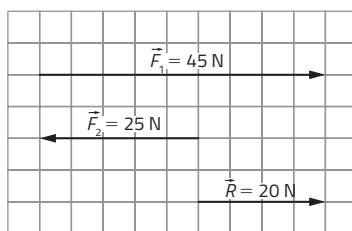
Logo, os lados do triângulo medem 3 cm, 5 cm e 7 cm, e seu perímetro é:
 $3 + 5 + 7 = 15 \rightarrow 15$ cm

52. a) Analisando os vetores apresentados na figura, temos:

- mesma direção: \vec{B} , \vec{E} , \vec{F} e \vec{H} ; \vec{A} e \vec{D} ; \vec{C} , \vec{G} e \vec{I}
- mesmo sentido: \vec{B} e \vec{F} ; e \vec{H} ; \vec{C} e \vec{I}
- mesmo módulo: \vec{A} e \vec{D} ; \vec{B} e \vec{G} ; \vec{C} e \vec{H} ; \vec{E} , \vec{F} e \vec{I}

b) O vetor resultante \vec{R} tem módulo igual a:

$$45 - 25 = 20 \rightarrow 20 \text{ N}$$

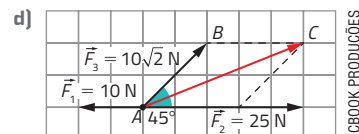


c) Pela lei dos cossenos:

$$\begin{aligned} 15,04^2 &= 8^2 + d^2 - 2 \cdot 8 \cdot d \cdot \cos 40^\circ \Rightarrow \\ &\Rightarrow 226,2016 \approx 64 + d^2 - 12,256d \Rightarrow \\ &\Rightarrow d^2 - 12,256d - 162,2016 \approx 0 \Rightarrow \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} d \approx 20,26 \\ \text{ou} \\ d \approx -8,01 \text{ (não convém)} \end{cases}$$

Portanto, $d \approx 20,26$ m.



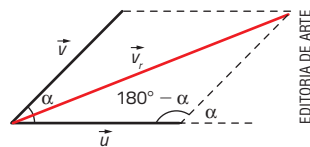
Observe que $BC = 25 - 10 = 15$ e $\text{med}(\hat{ABC}) = 45^\circ + 90^\circ = 135^\circ$. Logo, sendo x o módulo do vetor resultante, representado em vermelho, e utilizando a lei dos cossenos no triângulo ABC , temos:

$$\begin{aligned} x^2 &= (10\sqrt{2})^2 + \\ &+ 15^2 - 2 \cdot 10\sqrt{2} \cdot 15 \cdot \cos 135^\circ \Rightarrow \\ &\Rightarrow x^2 = 425 - 300\sqrt{2} \cdot (-\cos 45^\circ) \Rightarrow \\ &\Rightarrow x^2 = 425 - 300\sqrt{2} \cdot \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \Rightarrow \\ &\Rightarrow x^2 = 425 + 300 \Rightarrow x^2 = 725 \Rightarrow \\ &\Rightarrow x = \pm \sqrt{725} \Rightarrow \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x \approx 26,93 \\ \text{ou} \\ x \approx -26,93 \text{ (não convém)} \end{cases}$$

Portanto, o módulo do vetor resultante é de aproximadamente 26,93 N.

e) Resposta esperada: Essa diferença acontece porque, ao somar dois vetores, o ângulo considerado entre os vetores é aquele cuja origem coincide com a origem de ambos os vetores. Por exemplo, na imagem a seguir, o ângulo α é determinado na soma dos vetores \vec{u} e \vec{v} . Entretanto, quando traçamos o vetor resultante \vec{v}_r , formando um triângulo, o ângulo oposto ao vetor resultante é o suplementar a α . Como $\cos(180^\circ - \alpha) = -\cos \alpha$, justificamos a diferença entre as expressões das relações apresentadas.



O que estudei

1. Respostas pessoais.
2. Resposta pessoal.
3. Respostas pessoais.
4. a) Premissas: Os triângulos ABC e $A'B'C'$ são semelhantes entre si e a razão de semelhança entre esses triângulos é k ; conclusão: a razão entre os perímetros dos triângulos ABC e $A'B'C'$ também é k .

$$\begin{aligned} \text{b)} \bullet \cos 30^\circ &= \frac{AB}{8} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{AB}{8} \Rightarrow \\ &\Rightarrow AB = 4\sqrt{3} \rightarrow 4\sqrt{3} \text{ cm} \\ \text{sen } 30^\circ &= \frac{AC}{8} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{AC}{8} \Rightarrow \\ &\Rightarrow AC = 4 \rightarrow 4 \text{ cm} \end{aligned}$$

Seja m a medida da projeção do cateto AB sobre a hipotenusa. Então:

$$\cos 30^\circ = \frac{m}{AB} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{m}{4\sqrt{3}} \Rightarrow m = 6 \rightarrow 6 \text{ cm}$$

A medida n da projeção do cateto AC sobre a hipotenusa é dada por:
 $n + m = BC \Rightarrow n + 6 = 8 \Rightarrow$
 $\Rightarrow n = 2 \rightarrow 2 \text{ cm}$

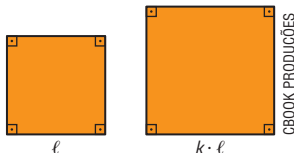
c) Nessas condições, os triângulos ADE e ABC serão semelhantes e com razão de semelhança igual a $\frac{DE}{BC} = \frac{5}{8}$. Assim:

$$\frac{AD}{AB} = \frac{5}{8} \Rightarrow \frac{AD}{4\sqrt{3}} = \frac{5}{8} \Rightarrow AD = \frac{5\sqrt{3}}{2}$$

$$\frac{AE}{AC} = \frac{5}{8} \Rightarrow \frac{AE}{4} = \frac{5}{8} \Rightarrow AE = \frac{5}{2} = 2,5$$

Portanto, as medidas dos outros lados serão $\frac{5\sqrt{3}}{2}$ cm e 2,5 cm.

d) Sejam dois quadrados em que a razão de semelhança entre eles é k . Um deles tem o lado medindo ℓ e o outro, $k \cdot \ell$, sendo ℓ um número positivo.



Assim, a razão entre suas áreas é:

$$\frac{(k \cdot \ell)^2}{\ell^2} = \frac{k^2 \cdot \ell^2}{\ell^2} = k^2$$

Praticando: Enem e vestibulares

1. alternativa d

$$\begin{aligned} R^2 &= 10^2 + 10^2 - 2 \cdot 10 \cdot 10 \cdot \cos 120^\circ \Rightarrow \\ &\Rightarrow R^2 = 100 + 100 - 200 \cdot -\frac{1}{2} \Rightarrow \\ &\Rightarrow R^2 = 300 \Rightarrow R = 10\sqrt{3} \text{ ou} \\ &R = -10\sqrt{3} \text{ (não convém)} \Rightarrow \\ &\Rightarrow R = 10\sqrt{3} \text{ cm} \approx 17 \text{ m} \end{aligned}$$

2. alternativa d

$$\begin{aligned} x^2 &= 7^2 + (5\sqrt{2})^2 - 2 \cdot 7 \cdot 5\sqrt{2} \cdot \cos 135^\circ \Rightarrow \\ &\Rightarrow x^2 = 49 + 50 - 70\sqrt{2} \cdot \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \Rightarrow \\ &\Rightarrow x^2 = 169 \Rightarrow x = 13 \text{ ou} \\ &x = -13 \text{ (não convém)} \rightarrow 13 \text{ m} \end{aligned}$$

3. alternativa e

Calculando, em metro, a altura do triângulo equilátero de lado 6 m, temos:

$$\frac{6\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{3}$$

Temos que a parte superior entre o caminhão e o túnel formam outro triângulo, do qual precisamos determinar a altura, que corresponde à altura máxima do caminhão. Assim, como os triângulos são semelhantes pelo caso **AA**, temos:

$$\frac{6}{3} = \frac{3\sqrt{3}}{a} \Rightarrow 6a = 9\sqrt{3} \Rightarrow a = \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

Logo, a altura máxima do caminhão, em metro, é dada por:

$$3\sqrt{3} - \frac{3\sqrt{3}}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

4. alternativa c

Utilizando o teorema de Pitágoras, podemos determinar a altura h do triângulo de lados 3 m, 3 m e 2 m, em relação ao lado de medida 2 m:

$$3^2 = h^2 + 1^2 \Rightarrow h^2 = 9 - 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow h = \sqrt{8} \text{ ou } h = -\sqrt{8} \text{ (não convém)} \rightarrow h = \sqrt{8} \text{ m}$$

Assim, a medida x , em metro, é dada por:
 $x = \sqrt{8} - 0,5$

5. alternativa b

Os maiores ângulos internos do triângulo ABC são opostos aos maiores lados, ou seja, $AC = 18$ cm, $BC = 14$ cm e $AB = 12$ cm. Como após a dobra o vértice B ficará sobre \overline{AC} , temos que esse triângulo terá sua altura dividida ao meio, formando triângulos semelhantes, como mostra a figura a seguir.

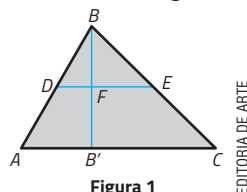


Figura 1

Pelo caso **AA**, os triângulos $AB'B$ e DFB são semelhantes. Assim, como a altura BB' será dividida ao meio ($BF = FB'$), temos, por consequência, que $AD = DB = 6$ cm e $BE = EC = 7$ cm.

Logo, temos:

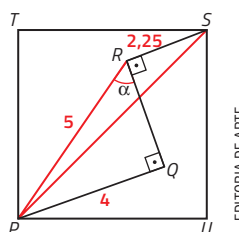
$$\begin{aligned} DB + BE + EC &= 6 + 7 + 7 = \\ &= 20 \rightarrow 20 \text{ cm} \end{aligned}$$

6. a) $(PR)^2 = 3^2 + 4^2 \Rightarrow PR = 5$ ou $PR = -5$ (não convém)

$$(QS)^2 = 3^2 + (2,25)^2 \Rightarrow QS = 3,75 \text{ ou } QS = -3,75 \text{ (não convém)}$$

Logo, $PR = 5$ cm e $QS = 3,75$ cm = 3,75 mm.

b) Vamos, inicialmente, determinar a medida da diagonal do quadrado $TSUP$. Para isso, construímos a figura a seguir, com as medidas de comprimento indicadas em centímetro.



Do triângulo PQR , temos $\sin \alpha = \frac{4}{5}$.

Note que $\cos(\alpha + 90^\circ) = -\sin \alpha$. Logo, pela lei dos cossenos aplicada ao triângulo PRS , temos:

$$\begin{aligned} (PS)^2 &= 5^2 + \\ &+ (2,25)^2 - 2 \cdot 5 \cdot 2,25 \cdot \cos(\alpha + 90^\circ) \Rightarrow \\ &\Rightarrow (PS)^2 = \frac{769}{16} \end{aligned}$$

Como a medida da diagonal do quadrado de lado ℓ pode ser expressa por $\ell\sqrt{2}$, temos que a área do quadrado $TSUP$ é dada por:

$$(\ell\sqrt{2})^2 = \frac{769}{16} \Rightarrow 2\ell^2 = \frac{769}{16} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ell^2 = \frac{769}{32} \rightarrow \frac{769}{32} \text{ cm}^2$$

7. alternativa b

Da figura, temos:

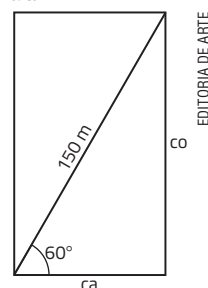
$$\text{tg } \alpha = \frac{17,5}{30} = \frac{7}{12} \approx 0,58$$

Assim, a medida p do pilar menor é dada por:

$$\text{tg } \alpha = \frac{m}{22} \Rightarrow \frac{7}{12} = \frac{m}{22} \Rightarrow m = \frac{77}{6}$$

Analisando pela tabela, temos que $30^\circ < \alpha < 31^\circ$.

8. alternativa a



Sendo x e y as medidas, em metro, do menor e do maior lado da região retangular, respectivamente, temos:

$$\bullet \text{ sen } 60^\circ = \frac{x}{150} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{x}{150} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = 75\sqrt{3}$$

$$\bullet \text{ cos } 60^\circ = \frac{y}{150} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{y}{150} \Rightarrow y = 75$$

Assim, a área da região retangular é dada por:

$$\begin{aligned} x \cdot y &= 75\sqrt{3} \cdot 75 = 5625\sqrt{3} \rightarrow \\ &\rightarrow 5625\sqrt{3} \text{ m}^2 \end{aligned}$$

9. alternativa b

Calculamos a lei dos cossenos no triângulo ABC em dois casos:

$$\bullet x = 60^\circ$$

$$\begin{aligned} (AC)^2 &= 3^2 + 4^2 - 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \cos 60^\circ \Rightarrow \\ &\Rightarrow AC = \sqrt{13} \text{ ou } AC = \\ &= -\sqrt{13} \text{ (não convém)} \rightarrow AC = \sqrt{13} \end{aligned}$$

$$\bullet x = 90^\circ$$

$$\begin{aligned} (AC)^2 &= 3^2 + 4^2 - 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \cos 90^\circ \Rightarrow \\ &\Rightarrow AC = 5 \text{ ou} \end{aligned}$$

$$AC = -5 \text{ (não convém)} \rightarrow AC = 5$$

Portanto, a variação mínima e máxima da mola são, respectivamente, $\sqrt{13}$ e 5.

10. alternativa b

Dado o paralelismo indicado no enunciado, pelo caso **AA**, temos que são semelhantes os triângulos ABC , SRC e NMC . Além disso, pelas informações do enunciado, temos $BR = RM = x$ e $MC = 2x$.

Da semelhança dos triângulos ABC e SRC , temos:

$$\frac{RC}{BC} = \frac{3x}{4x} = \frac{3}{4}$$

Logo, a área do triângulo SRC corresponde a $\left(\frac{3}{4}\right)^2$ da área do triângulo ABC .

Já em relação à semelhança dos triângulos ABC e NMC , temos:

$$\frac{MC}{BC} = \frac{2x}{4x} = \frac{2}{4}$$

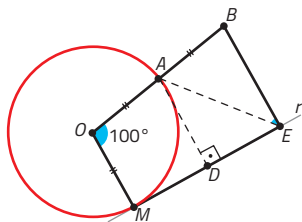
Logo, a área do triângulo NMC corresponde a $\left(\frac{2}{4}\right)^2$ da área do triângulo ABC .

A área do trapézio $RMNS$, em relação à área do triângulo ABC , é dada por:

$$\left(\frac{3}{4}\right)^2 - \left(\frac{2}{4}\right)^2 = \frac{5}{16} = 0,3125$$

Portanto, a área do trapézio $RMNS$ corresponde a 31,25% da área do triângulo ABC .

11. De acordo com as informações do enunciado, temos a seguinte situação:



Temos $OM = OA$, pois são raios da mesma circunferência. Além disso, o triângulo OAM é isósceles, com os ângulos da base medindo 40° ($180^\circ - 100^\circ = 80^\circ : 2 = 40^\circ$).

Como as projeções indicadas são ortogonais, $OM \parallel AD \parallel BE$, pelo Teorema de Tales, $OA = AB \Rightarrow DM = BE$. Logo, pelo caso **LAL**, os triângulos ADM e ADE são semelhantes. Disso, temos que $AM = AE$ e que a altura do triângulo AME coincide com o ponto médio do lado oposto, ou seja, esse é um triângulo isósceles. Assim, como $OMD = 90^\circ$ e $OMA = 40^\circ$, temos $AMD = 90^\circ - 40^\circ = 50^\circ$ e, do mesmo modo, $AEM = 40^\circ$. Logo, como $BED = 90^\circ$, temos $BEA = 40^\circ$.

12. alternativa **b**

$$40^2 = (PR)^2 + 9^2 \Rightarrow PR = 40 \text{ ou}$$

$$PR = -40 \text{ (não convém)}$$

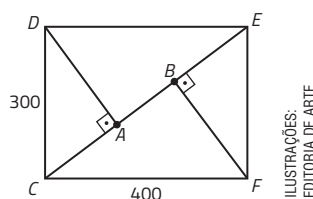
Pelo caso **AA**, temos que os triângulos PRQ e PST são semelhantes. Assim, temos:

$$\frac{9}{ST} = \frac{40}{100} \Rightarrow 40 \cdot ST = 9 \cdot 100 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow ST = 22,5 \Rightarrow 22,5 \text{ cm}$$

13. alternativa **e**

Nomeando os vértices do retângulo correspondente à praça, temos:



ILUSTRAÇÕES:
EDITORIA DE ARTE

Aplicando o teorema de Pitágoras no triângulo retângulo CDE , temos:

$$(CE)^2 = 300^2 + 400^2 \Rightarrow CE = 500 \text{ ou } CE = -500 \text{ (não convém)} \Rightarrow CE = 500$$

Aplicando uma relação métrica no triângulo retângulo CDE , temos:

$$300^2 = CA \cdot 500 \Rightarrow CA = 180$$

Aplicando uma relação métrica no triângulo retângulo CEF , temos:

$$300^2 = BE \cdot 500 \Rightarrow BE = 180$$

Logo, a distância entre os dois postes é dada por:

$$CE - CA - BE = 500 - 180 - 180 = 140 \rightarrow 140 \text{ m}$$

14. alternativa **c**

Seja x a distância entre os prédios, temos:

$$\text{tg } 45^\circ = \frac{x}{20} \Rightarrow 1 = \frac{x}{20} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = 20 \rightarrow 20 \text{ m}$$

Unidade 6 • Estatística: gráficos e tabelas

1. a) Analisando a segunda coluna da tabela simples, temos que o maior número está na última linha, que representa o ano de 2023.

b) A resposta depende da região em que o estudante mora. Espera-se que o estudante identifique a região em que mora na primeira coluna e o percentual de cobertura da vacina contra poliomielite na segunda coluna da tabela de dupla entrada.

2. a) Verdadeira, pois o percentual indicado era de 22,8%.

b) Falsa. Resposta esperada: De 2016 para 2022, houve redução no percentual de pessoas de 14 e 15 anos que realizavam atividades econômicas em ocupações da Lista TIP.

c) Falsa. Resposta esperada: Em 2022, dentre os setores ocupados pelas pessoas de 5 a 17 anos em situação de trabalho infantil, o de comércio e reparação era o de menor percentual.

d) Verdadeira, pois, analisando a barra referente a 2022 do grupo de 5 a 13 anos, verificamos que o percentual é maior que 69,4%, enquanto dois terço corresponde a aproximadamente 66,7%.

3. a) De acordo com o título do gráfico, de 2017 a 2022.

b) De acordo com a fonte indicada, site do Inep.

$$\text{c) } 2017: 42852 : 56750 \approx 0,755 \rightarrow$$

$$\rightarrow \text{aproximadamente } 75,5\%$$

$$2022: 28272 : 44195 \approx 0,640 \rightarrow \text{aproximadamente } 64\%$$

d) $44195 : 9444116 \approx 0,0047 \rightarrow$ aproximadamente 0,47%. Resposta pessoal. Espera-se que os estudantes debatam o baixo percentual de indígenas matriculados nos cursos superiores, assim como a necessidade de políticas públicas que garantam o acesso e a permanência de populações historicamente marginalizadas, como os indígenas, em cursos superiores.

4. a) Resposta pessoal. Conversar com os estudantes a respeito da importância daqueles que já têm a idade mínima para tirar o título de eleitor e votar nas eleições.

b) Analisando o gráfico de setores, Ensino Médio. Setor verde.

c) 43% de 156 milhões $\rightarrow 0,43 \cdot 156 \text{ milhões} \approx 67,1 \text{ milhões}$ Portanto, aproximadamente 67,1 milhões de eleitores tinham o Ensino Médio.

5. a) Observando a última linha da segunda coluna, temos que 148920333 pessoas com 15 anos ou mais não frequentavam a escola.

b) Observando a segunda coluna da segunda linha, temos que, das pessoas com 15 anos ou mais que não frequentavam a escola em 2020 no Brasil, 44108417 tinham o Ensino Fundamental incompleto ou equivalente.

$$\text{c) } 100\% - 52,1\% = 47,9\%$$

d) Algumas respostas possíveis: Necessidade de trabalhar ou ajudar nos afazeres domésticos, desinteresse pelos estudos, ausência de escola na localidade em que mora, ausência de oferta de turno escolar desejado etc. Algumas respostas possíveis: Implantação de políticas públicas específicas, disponibilização de ambientes escolares acolhedores e inclusivos, construção de novas escolas, ampliação de ofertas de turnos escolares demandados etc.

6. a) **Sítios arqueológicos cadastrados na Região Nordeste, até 24 de março 2024**

Estado	Quantidade de sítios arqueológicos
Alagoas	379
Bahia	1402
Ceará	589
Maranhão	171
Paraíba	192
Pernambuco	737
Piauí	1928
Rio Grande do Norte	429
Sergipe	237

Fonte dos dados: BRASIL. Instituto do Patrimônio Histórico e Artístico Nacional. **Cadastro nacional de sítios arqueológicos CNSA/SGPA**. Brasília, DF: Iphan, c2014. Disponível em: <http://portal.iphan.gov.br/pagina/detalhes/1699>. Acesso em: 23 jul. 2024.

b) Comparando as quantidades apresentadas na segunda coluna da tabela, temos que o estado é o Piauí. 1928 sítios arqueológicos.

c) $379 + 1402 + 589 + 171 + 192 + 737 + 1928 + 429 + 237 = 6064 \rightarrow 6064$ sítios arqueológicos

d) Resposta pessoal. Espera-se que os estudantes compreendam o que são os sítios arqueológicos e descubram alguns próximos da região em que moram, bem como a história do local. A região em que moram pode, por exemplo, ser subdividida para pesquisa, de modo que duplas distintas façam diferentes pesquisas e compartilhem com a turma. Se necessário, ampliar a extensão geográfica a ser pesquisada.

7. alternativa b

$171 : 6064 \approx 0,0282 \rightarrow$ aproximadamente 2,82%

$$\frac{100\%}{2,82} = \frac{360^\circ}{x} \Rightarrow \frac{1}{0,0282} = \frac{360^\circ}{x} \Rightarrow 1 \cdot x = 360^\circ \cdot 0,0282 \Rightarrow x \approx 10^\circ$$

8. a) O dado está localizado na terceira linha e terceira coluna e representa que 65% das crianças e adolescentes de 11 e 12 anos utilizaram a internet para enviar mensagem instantânea em 2023 no Brasil.

b) Analisando o menor índice da última coluna, temos que a faixa etária de 9 a 10 anos é aquela que apresentou o menor percentual de crianças e adolescentes que conversaram por chamada de vídeo.

c) Comparando a última linha da terceira e da quarta colunas, temos que enviar mensagem instantânea é o uso da internet que mais crianças e adolescentes de 15 a 17 anos de idade, em 2023, faziam no Brasil.

d) Resposta esperada: Gráfico de colunas ou de barras, para possibilitar a comparação visual entre os dados pesquisados de cada faixa etária.

e) Resposta esperada: A coluna verde mais alta corresponderia ao percentual de crianças e adolescentes de 15 a 17 anos (95%) que usou rede social, e a coluna amarela mais baixa, ao percentual de crianças e adolescentes de 9 a 10 anos (45%) que enviou mensagem instantânea no Brasil em 2023.

f) Resposta pessoal. Espera-se que os estudantes compreendam as potencialidades desses recursos para a comunicação no mundo globalizado e que façam sugestões para o uso consciente desses recursos, como um tempo adequado de exposição às telas.

9. a) Analisando a parte verde do gráfico, temos que 17,6% das mortes violentas intencionais no Brasil, em 2021, foram causadas por arma branca.

$$b) \frac{360^\circ}{x} = \frac{100\%}{6,4\%} \Rightarrow 100x = 6,4 \cdot 360^\circ \Rightarrow x = \frac{2304}{100} \Rightarrow x \approx 23^\circ$$

c) Como 76% das mortes foram por arma de fogo, temos que esse valor se aproxima de $75\% = \frac{75}{100} = \frac{3}{4}$. Logo, a alternativa II é a que melhor se adequa a um título para o texto.

d) Resposta pessoal. Conversar com os estudantes que um caminho possível para a redução de mortes violentas a longo prazo é ampliar o acesso à educação, à cultura e ao esporte a toda a população.

10. a) Representa que 44,3% dos estudantes de 13 a 15 anos que participaram da pesquisa responderam ter consumido dois ou mais itens de biscoitos e sobremesas industrializadas no dia anterior à pesquisa.

b) Analisando a barra azul dos estudantes de 16 e 17 anos, temos que 24% deles disseram ter consumido nenhuma bebida ultraprocessada.

Analisando a barra verde dos estudantes de 16 e 17 anos, temos que 28,9% deles disseram ter consumido um item de AUP salgados.

Analisando a barra laranja dos estudantes de 16 e 17 anos, temos que 39,4% deles disseram ter consumido dois ou mais itens de biscoitos e sobremesas industrializadas.

c) Resposta pessoal. Conversar com os estudantes para que compreendam que o consumo excessivo de alimentos ultraprocessados pode prejudicar a saúde.

11. a) Resposta esperada: Não, pois, em 2020 e em 2023, a quantidade de idosos inscritos no Enem aumentou em relação ao ano anterior.

b) $5900 : 11768 \approx 0,50 \rightarrow$ aproximadamente 50%

50% de 9 cm $\rightarrow 0,50 \cdot 9 = 4,5 \rightarrow 4,5$ cm

c) Respostas pessoais. Espera-se que os estudantes pesquisem e identifiquem os serviços referentes ao atendimento especializado aos idosos no Enem, bem como os serviços e programas voltados para pessoas idosas no município em que moram, e que discutam a importância desses programas que buscam um processo de envelhecimento ativo e saudável.

12. a) $76,2 - 72,8 = 3,4$. 3,4 anos. A redução ocorreu por causa da pandemia de covid-19.

b) Analisando o gráfico de linhas, 1991 e 2010, respectivamente.

c) Resposta esperada: Significa que, de 1940 a 2022, as mulheres mantiveram o padrão de ter uma expectativa de vida maior que a dos homens. Resposta

pessoal. Espera-se que os estudantes verifiquem em suas pesquisas que há diversas razões para que esse padrão se mantenha na expectativa de vida, como as diferenças genéticas, hormonais e comportamentais. Eles podem, por exemplo, citar algumas dessas diferenças e apresentar resultados de estudos que as demonstrem.

13. a) O setor azul tem área maior que o setor roxo, indicando que, em 26/3/2024, estavam cadastrados no Iphan mais grupos e entidades de capoeira do Rio Grande do Sul que de Santa Catarina.

b) Paraná: 38,75% de 80:

$0,3875 \cdot 80 = 31 \rightarrow 31$ grupos e entidades; Rio Grande do Sul: 33,75% de 80: $0,3375 \cdot 80 = 27 \rightarrow 27$ grupos e entidades; Santa Catarina: 27,50% de 80: $0,2750 \cdot 80 = 22 \rightarrow 22$ grupos e entidades

c) setor verde: 38,75% de 360°:

$0,3875 \cdot 360 = 139,5 \rightarrow 139,5^\circ$;

setor azul: 33,75% de 360°:

$0,3375 \cdot 360 = 121,5 \rightarrow 121,5^\circ$;

setor roxo: 27,50% de 360°:

$0,2750 \cdot 360 = 99 \rightarrow 99^\circ$

d) Resposta pessoal. Espera-se que os estudantes pesquisem e conheçam mais a capoeira, como sua origem, ainda no Brasil Col nia, com os africanos escravizados, em resposta   violência que sofriam. Os estudantes podem pesquisar o Dia Mundial da Capoeira e grupos e entidades cadastrados no Iphan em outras regiões do Brasil.

14. a) De acordo com o título do gráfico, o título do eixo horizontal e a legenda, indica a quantidade de denúncias em 2018.

$$b) \frac{(33374 - 30962) \cdot 100}{30962} \approx 7,8 \rightarrow$$

\rightarrow aproximadamente 7,8%

c) Denúncias por tipo de viol  o sofridas por crianças e adolescentes no Brasil, 2018-2019

Tipos de viol��o	Ano	
	2018	2019
Negligência	55 375	62 019
Violência psicológica	37 160	36 304
Violência física	30 962	33 374
Violência sexual	17 073	17 029
Outras viol��es	11 608	12 558

Fonte dos dados: BRASIL. Ministério da Mulher, da Família e dos Direitos Humanos. **Disque direitos humanos**: relatório 2019. Brasília, DF: MMFDH, 2019. p. 51. Disponível em: https://www.gov.br/mdh/pt-br/centrais-de-conteudo/disque-100/relatorio-2019_disque-100.pdf. Acesso em: 23 jul. 2024.

Resposta pessoal. Espera-se que os estudantes consigam utilizar argumentos para defender sua escolha. Por exemplo, eles podem argumentar que ambos os recursos comunicam igualmente as informações, mas o gráfico tem apelo visual.

d) Resposta esperada: Gráfico de setores, pois esse tipo de gráfico tem como uma de suas características a possibilidade de destacar a relação entre as partes e o todo dos dados representados.

e) Resposta pessoal. A partir da pesquisa realizada, espera-se que os estudantes consigam aplicar os conhecimentos estudados na Unidade na construção de gráficos e tabelas para comunicar os principais resultados obtidos. É importante verificar se o gráfico ou a tabela escolhida foi construída compondo todos os elementos necessários.

15. a) Analisando o eixo horizontal, temos motocicleta e automóvel, respectivamente.

b) automóveis: velocidade mínima de 20 km/h e máxima de 70 km/h; motocicletas: velocidade mínima de 30 km/h e máxima entre 70 km/h e 80 km/h

c) Como cerca de metade do *box-plot* correspondente a motocicleta está posicionado acima de 50 km/h, temos que cerca de 50% das motocicletas pesquisadas trafegaram acima do limite de velocidade permitido.

d) Analisando o *box-plot* correspondente a automóvel, temos que aproximadamente 25% dos automóveis pesquisados trafegou entre 40 km/h e 50 km/h.

e) $50 \text{ km/h} \cdot 1,2 = 60 \text{ km/h}$

$25\% \text{ de } 340 = 0,25 \cdot 340 = 85 \rightarrow 85 \text{ motocicletas}$

f) Resposta esperada: A afirmativa é verdadeira, uma vez que, em relação aos automóveis, o terceiro quartil é igual a 50 km/h, o que indica que cerca de 75% dos automóveis (maior parte) trafegaram em uma velocidade menor ou igual ao limite permitido.

16. Atividade de elaboração do estudante. Espera-se que os estudantes analisem e interpretem as informações contidas no *box-plot* e, a partir delas, elaborar um texto sintetizando as conclusões a que chegaram com base nessas informações. Eles podem, por exemplo, discorrer sobre os quartis e sobre o limite superior. É importante que os estudantes, ao elaborarem o texto e avaliarem o texto elaborado pelo colega, possam expressar a compreensão a respeito da interpretação do recurso.

17. a) Resposta esperada: A estimativa das quantidades de novas vagas de emprego nas áreas de formação industrial com maior demanda por técnicos, em 2023.

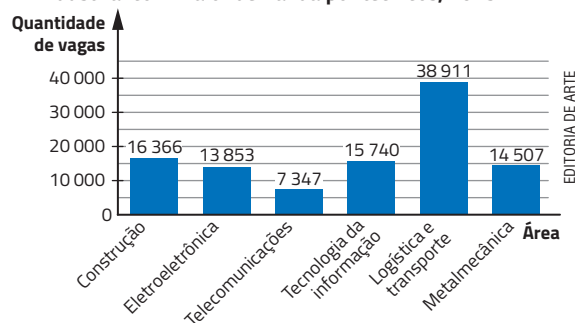
b) Algumas respostas possíveis: Construção: carpinteiro, eletricista, encanador; Eletrônica: técnico eletrônico, técnico em eletrônica industrial; Telecomunicações: técnico de telecomunicações, instalador-reparador de redes telefônicas e de comunicação de dados, instaladores e reparadores de linhas e cabos elétricos, telefônicos e de comunicação de dados; Tecnologia da informação: programador de internet, técnico de apoio ao usuário de informática, programador de multimídia; Logística e transporte: técnico de planejamento de produção, controlador de entrada e saída, almoxarife; Metalmeccânica: forneiro, tecnólogo em manutenção industrial, tecnólogo em mecânica de precisão.

c) Logística e transporte; 38 911 vagas.

d) Algumas respostas possíveis: Gráficos de colunas ou de barras, pois esses tipos de gráfico facilitam visualmente a comparação entre a quantidade de vagas de cada área.

e) Uma resposta possível:

Estimativa de novas vagas de emprego nas áreas de formação industrial com maior demanda por técnicos, 2023



Fonte dos dados: CHMURZYNSKI, Giovanna. Brasil precisa formar mais de 77 mil técnicos industriais em 2023. **Agência de Notícias da Indústria**, Brasília, DF, 25 jan. 2023. Disponível em: <https://noticias.portaldaindustria.com.br/noticias/educacao/brasil-precisa-formar-mais-de-77-mil-tecnicos-industriais-em-2023/>. Acesso em: 23 jul. 2024.

Atividade de elaboração do estudante. É importante verificar se a construção do gráfico tem as colunas com mesma largura e alturas proporcionais às quantidades representadas, bem como a inclusão de elementos como título, nome dos eixos e fonte dos dados. Espera-se que os estudantes criem questões que envolvam a interpretação do gráfico que construíram. Eles podem, por exemplo, elaborar questões de comparação entre as quantidades de vagas de cada área e as alturas das colunas do gráfico.

18. a) Diretores e gerentes: $5870 : 7948 \approx 0,739$
Profissionais das ciências e intelectuais: $4600 : 7268 \approx 0,633$
Técnicos e profissionais de nível médio: $2852 : 3837 \approx 0,743$
Trabalhadores de apoio administrativo: $1956 : 2634 \approx 0,827$
Trabalhadores dos serviços, vendedores dos comércios e mercados: $1552 : 2374 \approx 0,654$

Resposta esperada: Trabalhadores de apoio administrativo. Razão: aproximadamente 0,827. Essa razão indica que, dentre os grupos operacionais mostrados no gráfico, o grupo "Trabalhadores de apoio administrativo" é o que apresenta a menor disparidade entre os rendimentos médios de homens e mulheres; nesse grupo, o rendimento médio das mulheres corresponde a aproximadamente 82,7% (0,827) do rendimento médio dos homens.

b) Resposta esperada: Gráfico de colunas, sendo cada pilha de dinheiro correspondente a uma coluna.

c) Resposta esperada: As figuras de pilhas de dinheiro utilizadas remetem a valores monetários, associados ao rendimento médio de trabalhos realizados por homens e mulheres, que é o tema tratado no pictograma.

d) Resposta pessoal. Espera-se que os estudantes consigam projetar um pictograma a partir de outro gráfico apresentado, utilizando figuras que possam ser associadas ao tema tratado nesse gráfico.

e) Resposta pessoal. Espera-se que os estudantes reconheçam a discriminação de gênero histórica existente no mercado de trabalho e proponham ações como igualdade salarial entre homens e mulheres com mesmas funções e experiência e cotas para inserção das mulheres em cargos de liderança e na política.

19. a) primeiro diagrama: 6 ramos; segundo diagrama: 12 ramos
b) Analisando a quantidade de folhas de cada ramo dos diagramas, temos ramo 3 e ramo 4', respectivamente.
c) Contabilizando aqueles que estão nos ramos 4' acima de 70 e nos ramos 5* e 5', temos 5 recém-nascidos.

d) $7 : 32 \approx 0,22 \rightarrow$ aproximadamente 22%

Resposta pessoal. Espera-se que os estudantes realizem as pesquisas em *sites* confiáveis, selecionem e organizem as informações que julgarem pertinentes para elaborar o material de divulgação dos dados obtidos. Nesse material, espera-se que os estudantes utilizem recursos estudados na Unidade, como a elaboração de gráficos e tabelas.

20. a) Contando as folhas de cada ramo, temos que 25 estudantes tiveram a frequência cardíaca aferida.
 b) Resposta esperada: Considerar como ramo o algarismo da dezena da frequência cardíaca de cada estudante, em batimentos por minuto, e a folha, o algarismo da unidade correspondente.
 c) Analisando a quantidade de folhas de valor 3 no ramo 8, temos 2 estudantes.
 d) Resposta esperada: O ramo 7, indicando que há mais estudantes com frequência cardíaca aferida de 70 a 79 bpm do que nos demais intervalos representados.
 e) Analisando a folha com maior frequência em um mesmo ramo, temos 75 bpm.
 f) Uma resposta possível: Dividir cada ramo em dois, compostos de folhas de valores menores que 5 e folhas de valores maiores ou iguais a 5.
21. a) Uma resposta possível: Cada ramo corresponde à parte inteira do índice, e as folhas, à parte decimal.

1	79
2	67 99
3	00 15 64 75 78 81
4	19 22 25 28 35 51 64 69 74 88 94 94
5	27 93
6	08 43 89
7	45

b) Respostas pessoais. Espera-se que os estudantes incluam nos textos uma análise interpretativa e crítica a respeito do diagrama elaborado, indicando, por exemplo, que a maior parte das unidades da Federação têm o indicador abaixo de 5, que 4,94 foi o indicador mais frequente no período de janeiro a dezembro de 2023.

c) Resposta pessoal. Espera-se que os estudantes possam dialogar a respeito das análises realizadas e, se necessário, corrigir possíveis equívocos. Caso tenham sido produzidos diferentes diagramas, pedir que os comparem a fim de opinarem, com base em argumentos, acerca das vantagens e desvantagem de cada diagrama em relação aos demais.

6'	4
6*	5 8
7'	1 2
7*	5 5 5 7 8 9 9
8'	0 3 3 4
8*	6 7 7
9'	0 1 2 3
9*	9 9

Integrando com...

- Uma resposta possível: Não, pois pode ocorrer também no ônibus, entre outros locais, por meio da internet, por exemplo.
- Algumas respostas possíveis: Verbal, física, por escrito, moral, social, virtual.
- a) Respostas pessoais.
 b) Uma resposta possível: O *cyberbullying* ou *bullying* virtual ocorre por meio das tecnologias da comunicação e informação, como na postagem ou envio de mensagens ofensivas ou difamatórias em redes sociais.
- a) Analisando as informações das páginas 266 a 268, temos que a resposta da pergunta é meninas.
 b) A resposta depende da região do Brasil em que o estudante mora.
 c) Aparência do corpo. 16,5%.
 d) Resposta esperada: Incentivar as pessoas a informar os casos; dialogar com os envolvidos; implantar regras contra o *bullying*.
 e) Algumas respostas possíveis: Baixo rendimento escolar, transtornos alimentares, comportamentos antissociais, depressão.

5. Resposta pessoal. Espera-se que os estudantes abordem, na peça publicitária, informações como as apresentadas anteriormente na seção, mas referentes à realidade local. Nessa produção, é importante observar a escolha pelo tipo de gráfico mais adequado para representar a situação, a construção do gráfico ou tabela e as medidas *antibullying* propostas pela turma.

22. a) Analisando o gráfico de setores apresentado, temos que as respostas às questões são nível intermediário e nível avançado, respectivamente.
 b) De acordo com o setor verde do gráfico, temos que 16% dos estudantes têm nível de conhecimento avançado.
 c) Resposta esperada: Sim, pois 52% dos estudantes estão nos níveis de conhecimento básico ou iniciante, ou seja, mais da metade do total (50%).
 d) 105 estudantes; 84%. Resposta esperada: A quantidade de estudantes está indicada na célula correspondente à *fo* do nível de conhecimento intermediário, e o porcentual, na célula correspondente à *far* desse mesmo nível de conhecimento.

23. a) II

ME: 9; E: 18; M: 7; B: 1

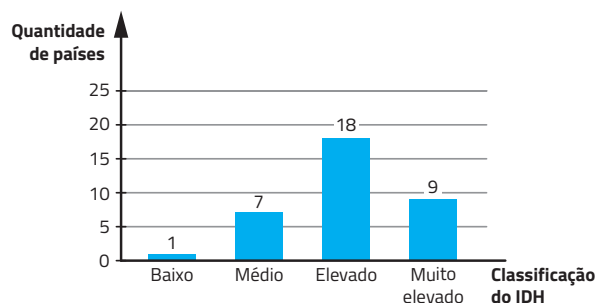
$$ME: \frac{9}{35} > \frac{1}{5}$$

b) Classificação do IDH dos países da América, 2021

Classificação do IDH	Frequência absoluta (f)	Frequência acumulada absoluta (fa)	Frequência relativa (fr)	Frequência acumulada relativa (far)
Baixo	1	1	2,86%	2,86%
Médio	7	8	20%	22,86%
Elevado	18	26	51,43%	74,29%
Muito elevado	9	35	25,71%	100%
Total	35		100%	

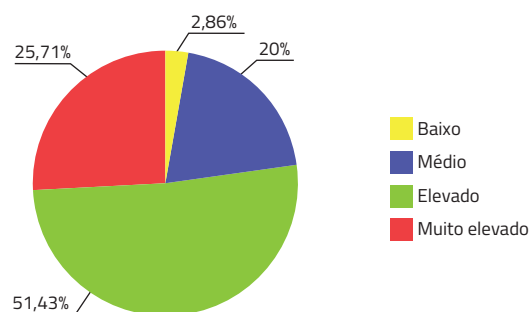
Fonte dos dados: PROGRAMA DAS NAÇÕES UNIDAS PARA O DESENVOLVIMENTO. **Relatório do desenvolvimento humano 2021/2022:** tempos incertos, vidas instáveis: a construir o nosso futuro num mundo em transformação. Nova York: Pnud, c2022. p. 272-276. Localizável em: *Download*. Disponível em: <https://www.undp.org/sites/g/files/zskgke326/files/2023-05/hdr2021-22ptpdf.pdf>. Acesso em: 23 jul. 2024.

c) Classificação do IDH dos países da América, 2021



Fonte dos dados: PROGRAMA DAS NAÇÕES UNIDAS PARA O DESENVOLVIMENTO. **Relatório do desenvolvimento humano 2021/2022:** tempos incertos, vidas instáveis: a construir o nosso futuro num mundo em transformação. Nova York: Pnud, c2022. p. 272-276. Localizável em: *Download*. Disponível em: <https://www.undp.org/sites/g/files/zskgke326/files/2023-05/hdr2021-22ptpdf.pdf>. Acesso em: 23 jul. 2024.

Classificação do IDH dos países da América, 2021



EDITORIA DE ARTE

Fonte dos dados: PROGRAMA DAS NAÇÕES UNIDAS PARA O DESENVOLVIMENTO. **Relatório do desenvolvimento humano**

2021/2022: tempos incertos, vidas instáveis: a construir o nosso futuro num mundo em transformação. Nova York: Pnud, c2022. p. 272-276. Localizável em: *Download*. Disponível em: <https://www.undp.org/sites/g/files/zskgke326/files/2023-05/hdr2021-22ptpdf.pdf>. Acesso em: 23 jul. 2024.

- Resposta pessoal. Os estudantes podem responder, por exemplo, que escolheram o gráfico de colunas para facilitar a comparação entre as frequências absolutas e o gráfico de setores para facilitar a comparação entre o percentual das partes com o todo.
- Resposta esperada: Gráfico de colunas: frequência absoluta; gráfico de setores: frequência relativa.

24. a) Atividade de elaboração do estudante. Os estudantes podem elaborar questionamentos a respeito do IDH da unidade de Federação em que moram e compará-lo com os de outras. É importante que, ao realizarem comparações, os estudantes ponderem os fatores que levam àquele IDH, como acesso a educação e saúde pública, e as principais fontes de renda da população.

25. a) Analisando as duas primeiras barras do primeiro histograma, temos que 14 municípios apresentaram taxa de aprovação escolar menor que 82 ($10 + 4 = 14$). De acordo com o segundo histograma, que representa a frequência relativa, temos 22,6% correspondentes a essa quantidade de municípios amazonenses.

b) Analisando o segundo histograma, de frequência relativa, temos que 4,8% de municípios amazonenses apresentaram taxa de aprovação escolar maior ou igual a 94.

c) $82 - 88$

d) Resposta esperada: Não, pois, nessa tabela de distribuição de frequências, os dados estão agrupados em intervalos de classe, não apresentando a taxa de aprovação escolar de cada município.

26. a) Igual ou maior que 20 anos e menor que 40 anos; 60 anos ou mais.

b) Analisando a terceira linha da coluna frequência relativa, temos que 28% dos acidentes notificados foram com pessoas de idade igual ou superior a 40 anos e inferior a 60 anos.

c) De acordo com o total apresentado na tabela, temos que foram notificados ao todo 196884 acidentes.

d) De acordo com a segunda linha da coluna frequência relativa acumulada, temos que 53% dos acidentes foram notificados com pessoas de idade inferior a 40 anos.

e) Resposta pessoal. Espera-se que os estudantes elaborem questões que considerem a interpretação da tabela com dados agrupados em intervalos de classe. Por exemplo: Qual é o percentual de acidentes de pessoas com idade superior a 60 anos? E inferior a 20 anos? Os estudantes podem ainda propor que se compare a faixa etária com mais acidentes notificados e com menos acidentes notificados.

f) Atividade de elaboração do estudante. Os textos devem abordar medidas de prevenção contra esse tipo de acidente. Alguns exemplos são: usar calçados e luvas nas atividades rurais e de jardinagem; examinar calçados, roupas pessoais, de cama e banho antes de usá-las; afastar camas das paredes e evitar pendurar roupas fora de armários; não acumular entulhos e materiais de construção; limpar regularmente móveis, cortinas, quadros, cantos de parede; vedar frestas e buracos em paredes, assoalhos, forros e rodapés; utilizar telas, vedantes ou sacos de areia em portas, janelas e ralos; manter limpos os locais próximos das casas, jardins, quintais, paióis e celeiros; evitar plantas tipo trepadeiras e bananeiras junto às casas e manter a grama sempre cortada; limpar terrenos baldios, pelo menos na faixa de um a dois metros junto ao muro ou cercas.

27. a) $35\% \text{ de } 60 \rightarrow 0,35 \cdot 60 = 21$

$20\% \text{ de } 60 \rightarrow 0,20 \cdot 60 = 12$

$15\% \text{ de } 60 \rightarrow 0,15 \cdot 60 = 9$

$30\% \text{ de } 60 \rightarrow 0,30 \cdot 60 = 18$

Salário mensal, em reais, dos funcionários da empresa, janeiro de 2025

Faixa salarial	Frequência absoluta (<i>f</i>)	Frequência acumulada absoluta (<i>fa</i>)	Frequência relativa (<i>fr</i>)	Frequência acumulada relativa (<i>far</i>)
1 500,00–2 000,00	21	21	35%	35%
2 000,00–2 500,00	12	33	20%	55%
2 500,00–3 000,00	9	42	15%	70%
3 000,00–3 500,00	18	60	30%	100%
Total	60		100%	

Fonte: Dados fictícios.

b) Analisando a terceira linha da frequência absoluta acumulada, 42 funcionários têm salário mensal menor que R\$ 3.000,00.

c) A faixa salarial que contém a maior frequência absoluta é 1 500,00–2 000,00.

d) Analisando a frequência relativa da classe correspondente à faixa salarial 2.000,00 a 2.500,00, temos que 20% dos funcionários têm salário mensal maior ou igual a R\$ 2.000,00 e menor que R\$ 2.500,00.

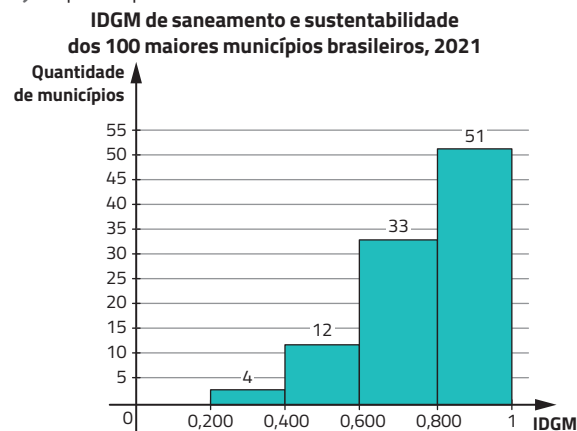
e) Resposta esperada: Não, pois os salários dos funcionários não foram listados. No entanto, existe a possibilidade de isso ocorrer, pois 21 funcionários têm salário mensal maior ou igual a R\$ 1.500,00 e menor que R\$ 2.000,00.

28. a) **IDGM de saneamento e sustentabilidade dos 100 maiores municípios brasileiros, 2021**

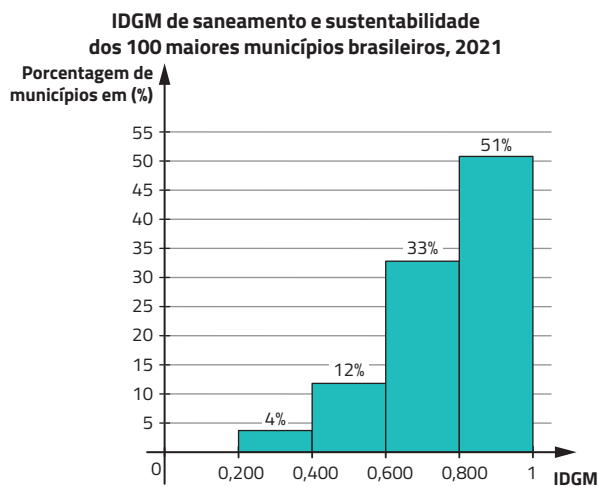
Resultados dos índices	Frequência absoluta (<i>f</i>)	Frequência acumulada absoluta (<i>fa</i>)	Frequência relativa (<i>fr</i>)	Frequência acumulada relativa (<i>far</i>)
0,200–0,400	4	4	4%	4%
0,400–0,600	12	16	12%	16%
0,600–0,800	33	49	33%	49%
0,800–1	51	100	51%	100%
Total	100		100%	

Fonte dos dados: DESAFIOS DA GESTÃO MUNICIPAL. **IDGM 2021:** ranking por área: 100+: saneamento e sustentabilidade. [S. l.]: DGM: Macroplan, 2021. Disponível em: https://desafiosdosmunicipios.com.br/ranking_saneamento.php. Acesso em: 23 jul. 2024.

b) Respostas possíveis:



Fonte dos dados: DESAFIOS DA GESTÃO MUNICIPAL. **IDGM 2021: ranking** por área: 100+: saneamento e sustentabilidade. [S. l.]: DGM: Macroplan, 2021. Disponível em: https://desafiosdosmunicipios.com.br/ranking_saneamento.php. Acesso em: 23 jul. 2024.



Fonte dos dados: DESAFIOS DA GESTÃO MUNICIPAL. **IDGM 2021: ranking** por área: 100+: saneamento e sustentabilidade. [S. l.]: DGM: Macroplan, 2021. Disponível em: https://desafiosdosmunicipios.com.br/ranking_saneamento.php. Acesso em: 23 jul. 2024.

c) Atividade de elaboração do estudante. Espera-se que os estudantes interpretem o histograma construído e realizem questionamentos a partir disso. É importante que os questionamentos sejam referentes à temática e que envolvam a necessidade de interpretar informações a partir do histograma, de modo que a atividade se torne um instrumento para que o professor avalie a aprendizagem dos estudantes a respeito dos conceitos estudados.

29. a) Respostas esperadas: Os anos correspondentes aos dados da pesquisa. Crianças e adolescentes, por atividades realizadas na internet e faixa etária (2022).

b) Pesquisou na internet para fazer trabalhos escolares. Resposta esperada: Comparar os comprimentos das barras de cada atividade e identificar a atividade em que a barra correspondente à faixa etária de 13 a 14 anos é mais comprida que a de 15 a 17 anos.

c) Resposta esperada: Não, pois as barras correspondentes à atividade "Usou redes sociais" não estão com os comprimentos proporcionais aos valores representados por elas.

d) Resposta esperada: O leitor pode acreditar, de maneira incorreta, que um porcentual menor de crianças e adolescentes usou redes sociais do que realmente foi identificado na pesquisa. Isso, de alguma maneira, pode interferir em tomada de decisões ou ajudar a propagar notícias falsas.

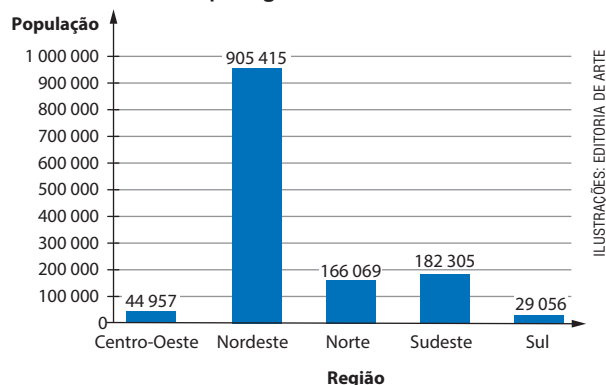
30. Resposta esperada: Na tabela, não há indicação da fonte, e os dados referentes às regiões Norte e Nordeste estão invertidos entre si; no gráfico de colunas, no título, o ano correspondente aos dados pesquisados está incorreto, os valores da escala do eixo horizontal estão desalinhados com as linhas horizontais correspondentes, de maneira que as linhas não correspondem aos valores representados no eixo, e os títulos dos eixos estão invertidos entre si.

População quilombola no Brasil, por região, 2022

Região	População
Norte	166 069
Nordeste	905 415
Sudeste	182 305
Sul	29 056
Centro-Oeste	44 957

Fonte dos dados: BRASIL. Serviços e Informações do Brasil. **População quilombola é de 1,3 milhão, indica recorte inédito do censo**. Brasília, DF: SIB, 27 jul. 2023. Disponível em: <https://www.gov.br/pt-br/noticias/assistencia-social/2023/07/populacao-quilombola-e-de-1-3-milhao-indica-recorte-inedito-do-censo>. Acesso em: 23 jul. 2024.

População quilombola no Brasil, por região, 2022



Fonte dos dados: BRASIL. Serviços e Informações do Brasil. **População quilombola é de 1,3 milhão, indica recorte inédito do censo**. Brasília, DF: SIB, 27 jul. 2023. Disponível em: <https://www.gov.br/pt-br/noticias/assistencia-social/2023/07/populacao-quilombola-e-de-1-3-milhao-indica-recorte-inedito-do-censo>. Acesso em: 23 jul. 2024.

31. A: $6\,500 : 500 = 13$. B: $8\,000 : 500 = 16$. C: $4\,500 : 500 = 9$
Resposta esperada: Não, pois não está indicado o título do pictograma e, como cada figura de garrafa PET representa 500 garrafas PET, as quantidades arrecadadas correspondentes às escolas B e C foram indicadas incorretamente: a escola B deveria ter 16 figuras de garrafas PET (e está com 15) e a escola C, 9 garrafas (e está com 10).

32. alternativa c

$$146 + 60 + 40 + 21 + x = 276 \Rightarrow x = 276 - 267 \Rightarrow x = 9$$

33. Resposta pessoal. Espera-se que os estudantes consigam identificar inadequações em gráficos e tabelas divulgados na mídia, sejam na estrutura, sejam na fonte dos dados indicados. É importante que os estudantes debatam e compreendam as consequências desse tipo de erro e a importância de uma construção fidedigna, de modo a não influenciar em possíveis divulgações de notícias falsas e interpretações equivocadas.

34. a) Resposta esperada: Para construir o gráfico de segmentos, foram utilizadas as frequências absolutas e, para construir o gráfico de setores, as frequências relativas.

b) Resposta esperada: Não, pois esse tipo de gráfico costuma ser utilizado para representar o comportamento de certa variável no decorrer de determinado intervalo de tempo, o que não é o caso.

▪ Resposta esperada: Histograma, pois esse tipo de gráfico permite representar dados agrupados em intervalos de classe e comparar visualmente esses dados.

c) Resposta esperada: No gráfico de segmentos, alterar o tipo de gráfico para histograma, pois esse tipo de gráfico permite representar dados agrupados em intervalos de classe, comparar visualmente esses dados; e incluir a fonte dos dados. No gráfico de setores, é necessário indicar no título o ano correspondente aos dados pesquisados e ajustar os elementos apresentados na legenda de maneira que correspondam adequadamente aos respectivos setores.

O que estudei

1. Respostas pessoais.

2. Resposta pessoal.

3. Respostas pessoais.

4. a) $5840919 + 19812217 + 34524858 + 12050812 + 5711522 = 77940328 \rightarrow 78$ milhões de pessoas

b) Mato Grosso do Sul: 18% de $5711522 \rightarrow 0,18 \cdot 5711522 \approx 1028074 \rightarrow 1028074$ pessoas

Mato Grosso: 21% de $5711522 \rightarrow 0,21 \cdot 5711522 \approx 1199420 \rightarrow 1199420$ pessoas

Goiás: 42% de $5711522 \rightarrow 0,42 \cdot 5711522 \approx 2398839 \rightarrow 2398839$ pessoas

Distrito Federal: 19% de $5711522 \rightarrow 0,19 \cdot 5711522 \approx 1085189 \rightarrow 1085189$ pessoas

c) **Distribuição da estimativa de pessoas a ser vacinadas contra a *influenza* na Região Centro-Oeste, por Unidade da Federação, 2022**

Unidade da Federação	Quantidade de pessoas
Mato Grosso do Sul	1028074
Mato Grosso	1199420
Goiás	2398839
Distrito Federal	1085189

Fonte dos dados: BRASIL. Ministério da Saúde. **Informe técnico:** 24ª campanha nacional de vacinação contra a *influenza*. Brasília, DF: MS, mar. 2022. p. 18. Disponível em: www.gov.br/saude/pt-br/assuntos/saude-de-a-a-z/c/calendario-nacional-de-vacinacao/arquivos/informe-da-24a-campanha-nacional-de-vacinacao-contra-a-influenza.pdf. Acesso em: 23 jul. 2024.

d) Resposta esperada: Pode-se, inicialmente, calcular o percentual da estimativa de pessoas a ser vacinadas contra *influenza* correspondente a cada região em relação ao total do país. Em seguida, determinar, de maneira proporcional, a medida do ângulo central de cada setor do gráfico correspondente às regiões. Por fim, colorir os setores do gráfico, elaborar a legenda e indicar o título e a fonte desse gráfico.

e) ▪ Resposta esperada: Quantidade de pessoas que receberam uma dose da vacina contra *influenza* em uma unidade básica de saúde, em determinada semana de 2022.

▪ Uma resposta possível: Gráfico de barras ou de colunas, pois esses tipos de gráfico permitem comparar visualmente a quantidade de pessoas que receberam a vacina em cada dia dessa semana; ou gráfico de segmentos, pois esse tipo de gráfico permite avaliar a variação da quantidade diária de pessoas que receberam a vacina nessa semana.

Praticando: Enem e vestibulares

1. alternativa c

$$7,9\% \text{ de } 240851510 = 0,079 \cdot 240851510 \approx 19027269 \\ 19027269 : 105051936 \approx 0,18 \approx 18\%$$

2. alternativa c

Considerando a variação entre o 10º e o 20º dia, temos que, no setor adulto, o volume de vendas diminui em R\$ 3.000,00 ($18000 - 15000 = 3000$). Assim, mantendo essa variação para o período entre o 20º e o 30º dia, temos que o volume de vendas no 30º dia será dado por:

$$15000,00 - 3000,00 = 12000 \rightarrow \text{R\$ } 12.000,00$$

Considerando a variação entre o 10º e o 20º dia, temos que, no setor infantil, o volume de vendas diminui em R\$ 1.000,00 ($8000 - 7000 = 1000$). Assim, mantendo essa variação para o período entre o 20º e o 30º dia, temos que o volume de vendas no 30º dia será dado por:

$$7000,00 - 1000,00 = 6000 \rightarrow \text{R\$ } 6.000,00$$

Então, o total de vendas é dado por:

$$18000 + 15000 + 12000 + 8000 + 7000 + 6000 = 66000 \rightarrow \text{R\$ } 66.000,00$$

Assim, segue que:

$$77000 - 66000 = 11000 \rightarrow \text{R\$ } 11.000,00$$

3. alternativa c

$$\frac{67}{(1,60)^2} = \frac{67}{2,56} \approx 26,17$$

Como $25 < 26,17 < 29,9$, a pessoa apresenta sobrepeso.

4. alternativa d

$$30 \cdot 6 + 40 \cdot 6 + 50 \cdot 7 + 30 \cdot 8 + 25 \cdot 4 + 25 \cdot 5 = \\ = 180 + 240 + 350 + 240 + 100 + 125 = 1235$$

5. alternativa c

$$13,6\% + 45,2\% = 58,8\% \\ 58,8\% \text{ de } 363000 \rightarrow 0,588 \cdot 363000 = 213444$$

6. alternativa a

a) Correta, pois, analisando o gráfico, temos que as internações no SUS de todas as regiões foram superiores a 50%.

b) Incorreta, pois a maior parte das internações na Região Sudeste foi no SUS (56,40%).

c) Incorreta, pois o percentual de internações foi 23,80% na Região Norte e 22,20% na Região Nordeste.

d) Incorreta, pois o número de internações pelo SUS nessas regiões foi inferior a 70%.

7. alternativa d

$$20\% \text{ de } 105 \rightarrow 0,20 \cdot 105 = 21$$

$$30\% \text{ de } 100 \rightarrow 0,30 \cdot 100 = 30$$

$$50\% \text{ de } 20 \rightarrow 0,50 \cdot 20 = 10$$

$$40\% \text{ de } 80 \rightarrow 0,40 \cdot 80 = 32$$

$$60\% \text{ de } 40 \rightarrow 0,60 \cdot 40 = 24$$

Portanto, o reservatório com maior volume de água era o **IV**.